SESSION 2016

Concours commun Centrale

MATHÉMATIQUES 2. FILIERE MP

Partie I - Suites et intégrales

I.A - Étude d'une intégrale à paramètres

I.A - 1) Soit $\phi\ :\ \begin{array}{ccc}[0,+\infty[\times]0,+\infty[& \rightarrow & \mathbb{R}\\ (x,t) & \mapsto & \dfrac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}\end{array}$ de sorte que pour tout réel $x \geqslant 0$, $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\Phi(x,t)\ dt$.

• Pour chaque réel $x\in[0,+\infty[$, la fonction $t\mapsto\Phi(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$;
• Pour chaque réel $t\in]0,+\infty[$, la fonction $x\mapsto\Phi(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$;
• Pour tout $(x,t)\in[0,+\infty[\times]0,+\infty[$, $|\Phi(x,t)|\leqslant\dfrac{1-\cos t}{t^2}=\varphi_0(t)$. De plus, la fonction φ_0 est continue par morceaux et positive sur $]0,+\infty[$, prolongeable par continuité en 0 car $\dfrac{1-\cos t}{t^2}\underset{t\to 0}{\sim}\dfrac{1}{2}$, et dominée par $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$. La fonction φ_0 est donc intégrable sur $]0,+\infty[$.

D'après le théorème (d'existence et) de continuité des intégrales à paramètres,

$$\boxed{f \text{ est définie et continue sur } [0,+\infty[.}$$

Soit $a>0$. Φ admet sur $[a+\infty[\times]0,+\infty[$ des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 par rapport à sa première variable x et pour tout $(x,t)\in[a,+\infty[\times]0,+\infty[$.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)=-\frac{1-\cos t}{t}e^{-xt}\quad\text{et}\quad\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x,t)=-(1-\cos t)e^{-xt}.$$

• Pour $k\in\{1,2\}$ et $x\in[a,+\infty[$, la fonction $t\mapsto\dfrac{\partial^k\Phi}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$;
• Pour $k\in\{1,2\}$ et $t\in]0,+\infty[$, la fonction $x\mapsto\dfrac{\partial^k\Phi}{\partial x^k}(x,t)$ est continue sur $[a,+\infty[$;
• Pour $k\in\{1,2\}$ et $(x,t)\in[0,+\infty[\times]0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant\dfrac{1-\cos t}{t}e^{-at}=\varphi_1(t)$ et $\left|\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x,t)\right|\leqslant(1-\cos t)e^{-at}=\varphi_2(t)$.
De plus, les fonctions φ_1 et φ_2 sont continues par morceaux et positives sur $]0,+\infty[$, prolongeable par continuité en 0 (par 0), et négligeables devant $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$. Les fonctions φ_1 et φ_2 sont donc intégrables sur $]0,+\infty[$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de Leibniz), f est de classe C^2 sur $[a,+\infty[$ et ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout $a>0$,

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^2 \text{ sur }]0,+\infty[\text{ et pour tout } x>0,\ f'(x)=-\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}\ dt \text{ et } f''(x)=\int_0^{+\infty}(1-\cos t)e^{-xt}\ dt.}$$

I.A - 2) La fonction $u\ :\ t\mapsto\dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et admet des limites réelles en 0 et $+\infty$ (à savoir $\dfrac{1}{2}$ et 0). On en déduit que cette fonction est bornée sur $]0,+\infty[$. Soit M un majorant de cette fonction sur $]0,+\infty[$. Pour $x>0$,

$$|f(x)|=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}\ dt\leqslant M\int_0^{+\infty}e^{-xt}\ dt=\frac{M}{x}.$$

Puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{M}{x}=0$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$. De même, La fonction $u\ :\ t\mapsto\dfrac{1-\cos t}{t}$ est bornée sur $]0,+\infty[$ et par un travail analogue, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0.}$$

I.A - 3) Soit $x > 0$. $f''(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\, dt - \int_0^{+\infty} \cos t e^{-xt}\, dt = \frac{1}{x} - \int_0^{+\infty} \cos t e^{-xt}\, dt$ puis

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \cos t e^{-xt}\, dt &= \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-x+i)t}\, dt\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{e^{(-x+i)t}}{-x+i}\right]_0^{+\infty}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{x-i} + \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{(-x+i)t}}{-x+i}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{x-i}\right) \text{ (car } x > 0 \text{ et donc } \left|\frac{e^{(-x+i)t}}{-x+i}\right| = \frac{e^{-xt}}{|-x+i|} \underset{x\to+\infty}{\to} 0)\\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{x+i}{x^2+1}\right) = \frac{x}{x^2+1}.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\forall x > 0,\ f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}.}$$

Par suite, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \ln x - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C$. Quand x tend vers $+\infty$,

$$\ln x - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) = \ln x - \ln x - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = o(1),$$

et donc quand x tend vers $+\infty$, on obtient $C = 0$ (d'après la question précédente).

$$\boxed{\forall x > 0,\ f'(x) = \ln x - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right).}$$

I.A - 4) Une intégration par parties fournit

$$\int \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) = \frac{x}{2}\ln\left(x^2+1\right) - \int \frac{x^2}{x^2+1}\, dx = \frac{x}{2}\ln\left(x^2+1\right) - \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\, dx = \frac{x}{2}\ln\left(x^2+1\right) - x + \mathrm{Arctan}\, x + \lambda$$

Donc, de nouveau, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0$,

$$f(x) = x\ln x - x - \frac{x}{2}\ln\left(x^2+1\right) + x - \mathrm{Arctan}\, x + \lambda = x\ln x - \frac{x}{2}\ln\left(x^2+1\right) - \mathrm{Arctan}\, x + \lambda.$$

Quand x tend vers $+\infty$, $x\ln x - \frac{x}{2}\ln\left(x^2+1\right) = x\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \sim \frac{1}{x}$ et donc $x\ln x - \frac{x}{2}\ln\left(x^2+1\right)$ tend vers 0. Quand x tend vers $+\infty$, on obtient donc $-\frac{\pi}{2} + \lambda = 0$ et donc

$$\boxed{\forall x > 0,\ f(x) = x\ln x - \frac{x}{2}\ln\left(x^2+1\right) - \mathrm{Arctan}\, x + \frac{\pi}{2}.}$$

Enfin, f est continue en 0 et donc $f(0) = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = \frac{\pi}{2}$ d'après un théorème de croissances comparées.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\, dt = f(0) = \frac{\pi}{2}.}$$

I.A - 5) L'égalité est vraie quand $s = 0$. Soit $s > 0$. En posant $u = st$ et donc $dt = \frac{du}{s}$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos u}{u^2/s^2}\, \frac{du}{s} = s\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos u}{u^2}\, du = \frac{\pi}{2}s$$

et donc $|s| = s = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{1-\cos(st)}{t^2}\,dt$. Si $s < 0$,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(-st)}{t^2}\,dt = -s = |s|.$$

Finalement,

$$\boxed{\forall s \in \mathbb{R},\ \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\,dt = |s|.}$$

I.B - Étude d'une suite d'intégrales

I.B - 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1-(\cos t)^n}{t^2}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$.

$\dfrac{1-(\cos t)^n}{t^2} \underset{t\to 0}{=} \dfrac{1-\left(1-\dfrac{t^2}{2}+o\left(t^2\right)\right)^n}{t^2} \underset{t\to 0}{=} \dfrac{n}{2} + o(1)$. Donc, la fonction $t \mapsto \dfrac{1-(\cos t)^n}{t^2}$ se prolonge par continuité en 0 et en particulier, est intégrable sur un voisinage de 0.

$\dfrac{1-(\cos t)^n}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Donc, la fonction $t \mapsto \dfrac{1-(\cos t)^n}{t^2}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.

Finalement, la fonction $t \mapsto \dfrac{1-(\cos t)^n}{t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et on en déduit l'existence de u_n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$u_{2n} - u_{2n+2} = \int_0^{+\infty} \frac{\cos^{2n} t\left(1-\cos^2 t\right)}{t^2}\,dt > 0$$

(intégrale d'une fonction continue, positive et non nulle). Donc,

$$\boxed{\text{la suite } (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est strictement décroissante.}}$$

I.B - 2) $u_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{1-\cos t}{t^2}\,dt = f(0) = \dfrac{\pi}{2}$. Puis, en posant $x = \dfrac{t}{2}$

$$u_1 = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin^2\left(\dfrac{t}{2}\right)}{t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin^2 x}{4x^2}\,2dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^2 x}{x^2}\,dx = u_2.$$

$$\boxed{u_1 = u_2 = \frac{\pi}{2}.}$$

I.C - Calcul d'un équivalent de u_n

I.C - 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En posant $t = \sqrt{\dfrac{2u}{n}}$ et donc $dt = \sqrt{\dfrac{2}{n}}\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\,du = \dfrac{1}{\sqrt{2n}}\dfrac{1}{\sqrt{u}}\,du$, on obtient

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1-\left(\cos\left(\sqrt{\dfrac{2u}{n}}\right)\right)^n}{\dfrac{2u}{n}}\frac{1}{\sqrt{2n}}\frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}}\int_0^{+\infty} \frac{1-\left(\cos\left(\sqrt{\dfrac{2u}{n}}\right)\right)^n}{u\sqrt{u}}\,du.$$

I.C - 2) Soit $(n, u) \in \mathbb{N}^* \times]0, 1]$. On sait que pour tout réel x, $|\sin x| \leqslant |x|$, et donc

$$\begin{aligned}
\left|1-\left(\cos\left(\sqrt{2u/n}\right)\right)^n\right| &= \left|1-\cos\left(\sqrt{2u/n}\right)\right|\left|1+\cos\left(\sqrt{2u/n}\right)+\ldots+\left(\cos\left(\sqrt{2u/n}\right)\right)^{n-1}\right| \\
&\leqslant n\left(1-\cos\left(\sqrt{2u/n}\right)\right) = 2n\sin^2\left(\sqrt{u/2n}\right) \\
&\leqslant 2n\left(\sqrt{u/2n}\right)^2 = u.
\end{aligned}$$

I.C - 3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit g_n la fonction définie par : $\forall u > 0,\ g_n(u) = \dfrac{1-\left(\cos\left(\sqrt{\dfrac{2u}{n}}\right)\right)^n}{u\sqrt{u}}$ de sorte que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(u)\ du$.

• Chaque fonction g_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$;
• Soit $u > 0$.

$$1-\left(\cos\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)\right)^n = 1-e^{n\ln\left(\cos\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)\right)} \underset{n\to+\infty}{=} 1-e^{n\ln\left(1-\frac{u}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \underset{n\to+\infty}{=} 1-e^{-u}+o(1)$$

et donc la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $g\ :\ u \mapsto \dfrac{1-e^{-u}}{u\sqrt{u}}$. De plus, la fonction g est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
• Pour tout $(n,u) \in \mathbb{N}^*\times]0,+\infty[$, d'après la question précédente,

$$|g_n(u)| \leqslant \left\{\begin{array}{l} u/u\sqrt{u} \text{ si } u \in]0,1] \\ 2/u\sqrt{u} \text{ si } u \in]1,+\infty[\end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l} 1/\sqrt{u} \text{ si } u \in]0,1] \\ 2/u\sqrt{u} \text{ si } u \in]1,+\infty[\end{array}\right. = \varphi(u).$$

La fonction φ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, intégrable sur un voisinage de 0 (car $\dfrac{1}{2} < 1$) et sur un voisinage de $+\infty$ (car $\dfrac{3}{2} > 1$). Donc, la fonction φ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

D'après le théorème de convergence dominée, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, la fonction g est intégrable sur $]0,+\infty[$ et enfin

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \int_0^{+\infty} g(u)\ du = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-u}}{u\sqrt{u}}\ du.$$

I.C - 4) Soient ε et A deux réels tels que $0 < \varepsilon < A$. Les deux fonctions $u \mapsto 1-e^{-u}$ et $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{u}}$ sont de classe C^1 sur le segment $[\varepsilon, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^A \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\ du &= \left[\frac{1-e^{-u}}{\sqrt{u}}\right]_\varepsilon^A + \frac{1}{2}\int_\varepsilon^A \frac{1-e^{-u}}{u\sqrt{u}}\ du \\ &= \frac{1-e^{-A}}{\sqrt{A}} - \frac{1-e^{-\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{1}{2}\int_\varepsilon^A \frac{1-e^{-u}}{u\sqrt{u}}\ du\end{aligned}$$

Quand A tend vers $+\infty$, $\dfrac{1-e^{-A}}{\sqrt{A}}$ tend vers 0 et d'autre part, $\dfrac{1-e^{-\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}} \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} = \sqrt{\varepsilon}$ et donc $\dfrac{1-e^{-\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}}$ tend vers 0 quand ε tend vers 0.

Quand A tend vers $+\infty$ et ε tend vers 0, on obtient

$$l = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-u}}{u\sqrt{u}}\ du = 2\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\ du = 2\sqrt{\pi}.$$

On en déduit que $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}} v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}} \times \sqrt{2\pi} = \sqrt{\dfrac{n\pi}{2}}$.

$$\boxed{u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos t)^n}{t^2}\ dt \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{n\pi}{2}}.}$$

Partie II - Autour du pile ou face

II.A - Étude de $E(|S_n|)$

II.A - 1) Pour $k \in [\![1,n]\!]$, $E(X_k) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = 0$ puis

$$V(X_k) = E\left(X_k^2\right) - (E(X_k))^2 = \frac{1}{2}\times 1^2 + \frac{1}{2}\times(-1)^2 - 0 = 1.$$

Par linéarité de l'espérance, $E(S_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = 0$ puis, les variables $X_1, \ldots, X_n$ étant mutuellement indépendantes et en particulier deux à deux indépendantes,

$$V(S_n) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = n.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E(S_n) = 0 \text{ et } V(S_n) = n.}$$

II.A - 2) Par linéarité de l'espérance, $E(\cos(S+T)) = E(\cos(S)\cos(T)) - E(\sin(S)\sin(T))$. Puisque les variables S et T sont indépendantes, il en est de même des variables $\cos(S)$ et $\cos(T)$ et des variables $\sin(S)$ et $\sin(T)$ d'après le lemme des coalitions. Donc,

$$E(\cos(S+T)) = E(\cos(S))E(\cos(T)) - E(\sin(S))E(\sin(T)).$$

Puisque T et $-T$ ont même lois, les variables $\sin(T)$ et $\sin(-T)$ ont même espérance. Donc,

$$-E(\sin(T)) = E(-\sin(T)) = E(\sin(-T)) = E(\sin(T)),$$

et finalement, $E(\sin(T)) = 0$. Il reste

$$\boxed{E(\cos(S+T)) = E(\cos(S))E(\cos(T)).}$$

II.A - 3) L'égalité est immédiate si $t = 0$.

Soit $t \in \mathbb{R}^*$. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi_n(t) = (\cos t)^n$.

• D'après le théorème de transfert, $\varphi_1(t) = E(\cos(X_1 t)) = \dfrac{1}{2}\cos t + \dfrac{1}{2}\cos(-t) = \cos t$. La formule est donc vraie quand $n = 1$.

• Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $\varphi_n(t) = (\cos t)^n$. D'après le lemme des coalitions, les variables $X_{n+1}t$ et $S_n t$ sont indépendantes et donc d'autre part, les variables tX_{n+1} et $-tX_{n+1}$ ont même lois : $P(tX_n = t) = P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = P(-tX_n = t)$ et de même $P(tX_n = -t) = P(X_n = -1) = P(X_n = 1) = P(-tX_n = -t)$. Donc,

$$\begin{aligned}
E(\cos(S_{n+1}T)) &= E(\cos(S_n t + X_{n+1}t)) \\
&= E(\cos(S_n t))\,E(\cos(X_{n+1}t)) \text{ (d'après la question précédente)} \\
&= (\cos t)^n \times \cos t \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= (\cos t)^{n+1}.
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_n(t) = (\cos t)^n.}$$

II.A - 4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned}
E(|S_n|) &= \sum_{s \in S_n(\Omega)} |s| P(S_n = s) \\
&= \sum_{s \in S_n(\Omega)} \left(\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\,dt\right) P(S_n = s) \text{ (d'après I.A.5)} \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\displaystyle\sum_{s \in S_n(\Omega)} (1-\cos(st))P(S_n = s)}{t^2}\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\displaystyle\sum_{s \in S_n(\Omega)} P(S_n = s) - \sum_{s \in S_n(\Omega)} \cos(st)P(S_n = s)}{t^2}\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1 - E(\cos(S_n t))}{t^2}\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos t)^n}{t^2}\,dt \text{ (d'après II.A.3)} \\
&= \frac{2}{\pi} u_n.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E(|S_n|) = \frac{2}{\pi} u_n.}$$

II.A - 5) $E(|S_{2n+2}|) = \dfrac{1}{2^{2n+2}} \displaystyle\sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{2n+2})\in\{-1,1\}^{2n+2}} |\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{2n+2}|$.

Puisque $2n+1$ est impair, $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{2n+1} \neq 0$ et donc, ou bien $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{2n+1} \geqslant 1$ ou bien $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{2n+1} \leqslant -1$. Donc,

$$\begin{aligned}
E(|S_{2n+2}|) &= \frac{1}{2^{2n+2}} \sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{2n+2})\in\{-1,1\}^{2n+2}} |\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{2n+2}| \\
&= \frac{1}{2^{2n+2}} \left(\sum_{\substack{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{2n+2})\in\{-1,1\}^{2n+2} \\ \varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_{2n+1}\geqslant 1}} |\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{2n+2}| + \sum_{\substack{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{2n+2})\in\{-1,1\}^{2n+2} \\ \varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_{2n+1}\leqslant -1}} |\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{2n+2}| \right) \\
&= \frac{1}{2^{2n+2}} \left(\sum_{\substack{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{2n+2})\in\{-1,1\}^{2n+2} \\ \varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_{2n+1}\geqslant 1}} (\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{2n+2}) - \sum_{\substack{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{2n+2})\in\{-1,1\}^{2n+2} \\ \varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_{2n+1}\leqslant -1}} (\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{2n+2}) \right) \\
&= \frac{1}{2^{2n+2}} \times 2 \sum_{\substack{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{2n+2})\in\{-1,1\}^{2n+2} \\ \varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_{2n+1}\geqslant 1}} (\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{2n+2}) \\
&= \frac{1}{2^{2n+1}} \left(\sum_{\substack{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{2n+1})\in\{-1,1\}^{2n+1} \\ \varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_{2n+1}\geqslant 1}} (\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{2n+1} + 1) + \sum_{\substack{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{2n+1})\in\{-1,1\}^{2n+1} \\ \varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_{2n+1}\geqslant 1}} (\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{2n+1} - 1) \right) \\
&= \frac{1}{2^{2n+1}} \times 2 \sum_{\substack{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{2n+1})\in\{-1,1\}^{2n+1} \\ \varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_{2n+1}\geqslant 1}} (\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{2n+1}) = \frac{1}{2^{2n+1}} \sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{2n+1})\in\{-1,1\}^{2n+1}} |\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{2n+1}| \\
&= E(|S_{2n+1}|).
\end{aligned}$$

On en déduit que $u_{2n+1} = \dfrac{\pi}{2} E(|S_{2n+1}|) = \dfrac{\pi}{2} E(|S_{2n+2}|) = u_{2n+2}$.

II.B - Étude de $\dfrac{S_n}{n}$

II.B - 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $S_n^4 = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^4$. En développant, on obtient une somme de n^4 termes.

- les n termes du type X_k^4 d'espérance $\dfrac{1}{2} \times 1^4 + \dfrac{1}{2} \times (-1)^4 = 1$;
- les termes du type $X_k^3 X_l$, $k \neq l$, d'espérance $E\left(X_k^3\right) E(X_l) = 0$ (les variables X_k^3 et X_l sont indépendantes d'après le lemme des coalitions) ;
- les termes du type $X_k^2 X_l^2$, $k < l$, d'espérance $E\left(X_k^2\right) E\left(X_l^2\right) = 1$;
le nombre de ces termes est le nombre de choix de 2 parenthèses parmi les 4 (dans lesquelles on prend X_k) à savoir $\dbinom{4}{2} = 6$.
- les termes du type $X_j^2 X_k X_l$, j, k l deux à deux distincts, d'espérance nulle ;
- les termes du type $X_i X_j X_k X_l$, i, j, k l deux à deux distincts, d'espérance nulle.

Par linéarité de l'espérance

$$E\left(S_n^4\right) = \sum_{k=1}^{n} 1 + 6 \sum_{1\leqslant k<l\leqslant n} 1 = n + 6\binom{n}{2} = n + 3n(n-1) = 3n^2 - 2n.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E\left(S_n^4\right) = 3n^2 - 2n.}$$

II.B - 2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La variable U_n est positive. L'inégalité de MARKOV s'écrit

$$P\left(U_n \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \frac{E(U_n)}{1/\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}E\left(S_n^4\right)}{n^4} = \frac{\sqrt{n}\left(3n^2-2n\right)}{n^4} \leqslant \frac{\sqrt{n}\left(3n^2\right)}{n^4} = \frac{3}{n^{3/2}}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P\left(U_n \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \frac{3}{n^{3/2}}.}$$

II.B - 3) $\mathcal{Z}_n = \bigcup_{k \geqslant n}\left(U_k \geqslant \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$. Puisque chaque événement $\left(U_k \geqslant \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ est dans $\mathcal{A}$ et que $\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable, $\mathcal{Z}_n \in \mathcal{A}$. Ensuite,

$$0 \leqslant P(\mathcal{Z}_n) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} P\left(U_k \geqslant \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{3}{k^{3/2}}.$$

$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{3}{k^{3/2}}$ est le reste à l'ordre $n-1$ d'une série convergente (car $\frac{3}{2} > 1$) et donc $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{3}{k^{3/2}} = 0$. On en déduit que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} P(\mathcal{Z}_n) = 0.}$$

II.B - 4) $\mathcal{Z}$ est une intersection dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$ et donc un élément de $\mathcal{A}$. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{Z}_{n+1} \subset \mathcal{Z}_n$, on sait que

$$P(\mathcal{Z}) = \lim_{n \to +\infty} P(\mathcal{Z}_n) = 0.$$

$\mathcal{Z}$ est donc un événement négligeable.

Soit $\omega \notin \mathcal{Z}$. Donc, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\omega \notin \mathcal{Z}_n$. Par définition de $\mathcal{Z}_n$, pour tout $k \geqslant n$, $\left|\frac{S_k(\omega)}{k}\right| = \sqrt[4]{U_k(\omega)} < \frac{1}{k^{\frac{1}{8}}}$ et en particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\frac{S_n(\omega)}{n}\right| < \frac{1}{n^{\frac{1}{8}}}.$$

On en déduit que $\frac{S_n(\omega)}{n} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$.

Partie III - D'autres sommes aléatoires

III.A - Étude de $E(|T_n|)$

III.A - 1) Soient x et y deux réels tels que $y \geqslant 0$.
Si $x \geqslant 0$, $|x+y|+|x-y| = x+y+|x-y| = 2\mathrm{Max}(x,y)$ et si $x \leqslant 0$, $|x+y|+|x-y| = |-x-y|+|-x+y| = 2\mathrm{Max}(-x,y)$.
Donc, dans tous les cas, $|x+y|+|x-y| = 2\mathrm{Max}(|x|,y)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
E(|T_{n+1}|) &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n+1}) \in \{-1,1\}^{n+1}} |\varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_{n+1} a_{n+1}| \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n} \left(|\varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n + a_{n+1}| + |\varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n - a_{n+1}|\right) \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n} \mathrm{Max}\left(|\varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n|, a_{n+1}\right) \\
&\geqslant \frac{1}{2^n} \sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n} |\varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n| = E(|T_n|).
\end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{\text{la suite } \left(E(|T_n|)\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}}$$

III.A - 2) Posons $\Sigma = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 < +\infty$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
(\mathsf{E}(|T_n|))^2 &\leqslant \mathsf{E}\left(1^2\right)\mathsf{E}\left(T_n^2\right)\\
&= 1 \times \mathsf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)^2\right) = \mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 X_i^2 + \sum_{i \neq j} a_i a_j X_i X_j\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \mathsf{E}\left(X_i^2\right) + \sum_{i \neq j} a_i a_j \mathsf{E}(X_i)\mathsf{E}(X_j) \text{ (car les } X_i \text{ sont deux à deux indépendantes)}\\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i^2\\
&\leqslant \Sigma.
\end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(\mathsf{E}(|T_n|))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par $\sqrt{\Sigma}$ et donc la suite $(\mathsf{E}(|T_n|))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

III.A - 3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Avec la même démarche qu'à la question III.A.1),

$$\mathsf{E}(|T_{n+1}|) = \frac{1}{2^n} \sum_{(\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n+1}) \in \{-1,1\}^n} \mathrm{Max}\left(|\varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_{n+1} a_{n+1}|, a_1\right).$$

Or, pour tout tout n-uplet $(\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n+1}) \in \{-1, 1\}^n$,

$$|\varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_{n+1} a_{n+1}| \leqslant \sum_{k=2}^{n+1} a_k \leqslant a_1$$

et donc

$$\mathsf{E}(|T_{n+1}|) = \frac{1}{2^n} \sum_{(\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n+1}) \in \{-1,1\}^n} a_1 = a_1.$$

Ceci montre que, pour $n \geqslant 2$, si $a_1 \geqslant a_2 + \ldots + a_n$, alors $\mathsf{E}(|T_n|) = a_1 = \mathsf{E}(|T_1|)$.

III.B - Application à une suite d'intégrales

III.B - 1) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, posons $a_k = \dfrac{1}{2k-1}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(|T_n|) &= \sum_{u \in T_n(\Omega)} |u| P(T_n = u)\\
&= \sum_{u \in T_n(\Omega)} \left(\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(ut)}{t^2}\, dt\right) P(T_n = u) \text{ (d'après I.A.5)}\\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\displaystyle\sum_{u \in T_n(\Omega)} (1-\cos(ut))P(T_n = u)}{t^2}\, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\displaystyle\sum_{u \in T_n(\Omega)} P(T_n = u) - \sum_{u \in T_n(\Omega)} \cos(ut)P(T_n = u)}{t^2}\, dt\\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\mathsf{E}(\cos(T_n t))}{t^2}\, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\mathsf{E}(\cos(ta_1X_1 + \ldots + ta_nX_n))}{t^2}\, dt.
\end{aligned}$$

Les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes et il est de même des variables $a_1X_1, \ldots, a_nX_n$. De plus, pour $k \in [\![1, n]\!]$, les variables a_kX_k et $-a_kX_k$ ont mêmes lois. D'après II.A.2) et par récurrence, $\mathsf{E}(\cos(ta_1X_1 + \ldots + ta_nX_n)) = \mathsf{E}(\cos(ta_1X_1)) \ldots \mathsf{E}(\cos(ta_nX_n))$ puis

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(|T_n|) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\mathsf{E}(\cos(ta_1X_1))\ldots\mathsf{E}(\cos(ta_nX_n))}{t^2}\, dt\\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(ta_1)\ldots\cos(ta_n)}{t^2}\, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)\cos\left(\frac{t}{3}\right)\ldots\cos\left(\frac{t}{2n-1}\right)}{t^2}\, dt\\
&= \frac{2}{\pi} J_n.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{E}\left(|T_n|\right) = \frac{2}{\pi} J_n.}$$

Ceci montre au passage l'existence de chaque J_n. De plus, la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante d'après III.A.1) et convergente d'après III.A.2) car la série de terme général $a_n^2 = \dfrac{1}{(2n-1)^2}$ converge.

III.B - 2) $a_1 - (a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7) = 1 - \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{11} + \dfrac{1}{13}\right) = 0,04\ldots \geqslant 0$. Donc, $\mathrm{E}\left(|T_7|\right) = \mathrm{E}\left(|T_1|\right)$ puis, la suite $\left(\mathrm{E}\left(|T_n|\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant croissante, $\forall n \in [\![1,7]\!]$, $\mathrm{E}\left(|T_n|\right) = \mathrm{E}\left(|T_1|\right)$ et finalement

$$\boxed{\forall n \in [\![1,7]\!],\ J_n = J_1 = \frac{\pi}{2}.}$$

$a_1 - (a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8) = -0,02\ldots < 0$ puis pour $n \geqslant 8$, $a_1 < \displaystyle\sum_{k=2}^{n} a_k$.

Soit $n \geqslant 7$. On reprend le calcul de la question III.A.1).

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(|T_{n+1}|\right) &= \frac{1}{2^n} \sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n} \mathrm{Max}\left(|\varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n|, a_{n+1}\right) \\
&\geqslant \frac{1}{2^n} \sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n} |\varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n| = \mathrm{E}\left(|T_n|\right).
\end{aligned}$$

L'inégalité écrite est une égalité si et seulement si $\forall (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$, $|\varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n| \geqslant a_{n+1}$.

- Pour $n = 7$, on a $a_1 - (a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7) > 0$ et donc $|a_1 - (a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7)| - a_8 = a_1 - (a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8) < 0$. Donc, pour $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_7) = (1, -1, \ldots, -1)$, on a $|\varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_7 a_7| < a_8$. Ceci montre que $\mathrm{E}\left(|T_8|\right) > \mathrm{E}\left(|T_7|\right)$ puis que $J_8 > J_7$.

Inachevé.

$$\boxed{\text{La suite } (J_n)_{n\geqslant 7} \text{ est strictement croissante.}}$$

