SESSION 2018

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE MP

MATHEMATIQUES 2

EXERCICE I

Q1 Montrons que $(.|.)$ est un produit scalaire sur E.

• Soit $(f,g) \in E^2$. La fonction fg est continue sur le segment $[-1,1]$ et donc (f,g) existe dans $\mathbb{R}$. Ainsi, $(\ .\ |\ .\ )$ est une application de E^2 dans $\mathbb{R}$.

• Soit $(f,g) \in E^2$. $(f|g) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\ dt = \int_{-1}^{1} g(t)f(t)\ dt = (g|f)$. Donc, $(\ .\ |\ .\ )$ est symétrique.

• Soient $(f_1, f_2, g) \in E^3$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$(\lambda f_1 + \mu f_2|g) = \int_{-1}^{1} \left(\lambda f_1(t) + \mu f_2(t)\right) g(t)\ dt = \lambda \int_{-1}^{1} f_1(t)g(t)\ dt + \mu \int_{-1}^{1} f_2(t)g(t)\ dt = \lambda\left(f_1|g\right) + \mu\left(f_2|g\right).$$

Donc, $(\ .\ |\ .\ )$ est linéaire par rapport à sa première variable puis bilinéaire par symétrie.

• Soit $f \in E$. $(f,f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f^2(t)\ dt \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale. Donc, $(\ .\ |\ .\ )$ est une forme bilinéaire, symétrique, positive sur E.

• Soit $f \in E$. Si $(f|f) = 0$, alors $\displaystyle\int_{-1}^{1} f^2(t)\ dt = 0$ puis $f^2 = 0$ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle) et donc $f = 0$. Donc, $(\ .\ |\ .\ )$ est définie, positive.

En résumé, $(\ .\ |\ .\ )$ est une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive sur E et donc $(\ .\ |\ .\ )$ est un produit scalaire sur E.

Q2 Par parité, $(u|v) = \displaystyle\int_{-1}^{1} t\ dt = 0$. Ensuite, $\|u\|^2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} dt = 2$ et $\|v\|^2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} t^2\ dt = \frac{2}{3}$. Une base orthonormée de F est donc $(e_0, e_1) = \left(\dfrac{1}{\|u\|}u, \dfrac{1}{\|v\|}v\right) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}u, \sqrt{\dfrac{3}{2}}v\right)$.

Q3 Puisque $\dim(F) = 2 < +\infty$, la projection orthogonale sur F, notée p_F, est bien définie d'après le théorème de la projection orthogonale. On sait d'autre part que

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \left[\int_{-1}^{1} \left(e^t - (a+bt)\right)^2\ dt\right] = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|w - (au+bv)\|^2 = (d(w,F))^2 = \|w - p_F(w)\|^2,$$

avec $p_F(w) = (w|e_0)\, e_0 + (w|e_1)\, e_1$.

• $(w|e_0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \displaystyle\int_{-1}^{1} e^t\ dt = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(e^1 - e^{-1}\right)$.

• $(w|e_1) = \sqrt{\dfrac{3}{2}} \displaystyle\int_{-1}^{1} te^t\ dt = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\left[(t-1)e^t\right]_{-1}^{1} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}2e^{-1} = \sqrt{6}e^{-1}$.

• On en déduit que pour tout réel t de $[0,1]$,

$$\begin{aligned} p_F(w)(t) &= (w|e_0)\, e_0(t) + (w|e_1)\, e_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^1 - e^{-1}\right)\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{6}e^{-1}\sqrt{\frac{3}{2}}t \\ &= \frac{1}{2}\left(e^1 - e^{-1}\right) + 3e^{-1}t. \end{aligned}$$

• Ensuite,

$$\begin{aligned}\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\left[\int_{-1}^{1}\left(e^t-(a+bt)\right)^2\ dt\right] &= \|w-p_F(w)\|^2\\ &= \int_{-1}^{1}\left(e^t-\left(\frac{1}{2}\left(e^1-e^{-1}\right)+3e^{-1}t\right)\right)^2\ dt\\ &= \int_{-1}^{1} e^{2t}\ dt-\int_{-1}^{1}\left(\left(e^1-e^{-1}\right)+6e^{-1}t\right)e^t\ dt+\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}\left(e^1-e^{-1}\right)+3e^{-1}t\right)^2\ dt.\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{2t}\ dt=\frac{1}{2}\left(e^2-e^{-2}\right)$ puis une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\left(\left(e^1-e^{-1}\right)+6e^{-1}t\right)e^t\ dt &= \left[\left(\left(e^1-e^{-1}\right)+6e^{-1}t\right)e^t\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}6e^{-1}e^t\ dt\\ &= \left(\left(e^1-e^{-1}\right)+6e^{-1}\right)e^1-\left(\left(e^1-e^{-1}\right)-6e^{-1}\right)e^{-1}-6e^{-1}\left(e^1-e^{-1}\right)\\ &= e^2+5-1+7e^{-2}-6+6e^{-2}=e^2+13e^{-2}-2\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}\left(e^1-e^{-1}\right)+3e^{-1}t\right)^2\ dt &= \frac{1}{4}\left(e^1-e^{-1}\right)^2\int_{-1}^{1}dt+9e^{-2}\int_{-1}^{1}t^2\ dt\\ &\text{(par parité ou d'après le théorème de PYTHAGORE)}\\ &= \frac{1}{2}\left(e^2-2+e^{-2}\right)+6e^{-2}=\frac{1}{2}\left(e^2-2+13e^{-2}\right).\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\left[\int_{-1}^{1}\left(e^t-(a+bt)\right)^2\ dt\right] &= \frac{1}{2}\left(e^2-e^{-2}\right)-\left(e^2+13e^{-2}-2\right)+\frac{1}{2}\left(e^2-2+13e^{-2}\right)\\ &= 1-7e^{-2}.\end{aligned}$$

EXERCICE II

Q4 Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Puisque k est constant quand n varie,

$$\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\dots\frac{n-k+1}{n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\underbrace{\frac{n}{n}\times\frac{n}{n}\times\dots\times\frac{n}{n}}_{\text{k facteurs}}=1.$$

Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Pour $n\geqslant k$,

$$\begin{aligned}P\left(X_n=k\right) &= \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\\ &= \frac{\lambda^k}{k!}\times\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}\times\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\end{aligned}$$

Ensuite, $\displaystyle\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\underset{n\to+\infty}{=}e^{(n-k)\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)}\underset{n\to+\infty}{=}e^{(n+o(n))\left(-\frac{\lambda}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}\underset{n\to+\infty}{=}e^{-\lambda+o(1)}$ et donc

$$P\left(X_n=k\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\lambda^k}{k!}\times 1\times e^{-\lambda}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

(ce qui reste vrai quand $k=0$).

Q5 L'année 1998 n'est pas bissextile et compte donc 365 jours. Chaque candidat a une probabilité $p = \dfrac{1}{365}$ d'être convoqué le jour de son anniversaire et une probabilité $1 - p = \dfrac{364}{365}$ de ne pas l'être. Donc, en supposant que les dates de naissance sont indépendantes les unes des autres, $X_n \sim \mathscr{B}\left(n, \dfrac{1}{365}\right)$. On en déduit que

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ P(X_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{365}\right)^k\left(\frac{364}{365}\right)^{n-k} = \frac{\binom{n}{k}}{365^n}364^{n-k}$$

et

$$E(X_n) = \frac{n}{365}.$$

Q6 On note que $n = 219 \geqslant 50$, $p = \dfrac{1}{365} \leqslant 0,01$ et $np = \dfrac{219}{365} = 0,6 < 10$. La probabilité demandée est $P(X_n = 2)$. On approche la loi de X_n par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np = \dfrac{219}{365} = 0,6$. On obtient

$$P(X_n = 2) \approx \frac{0,6^2 \times e^{-0,6}}{2!} \approx 0,18 \times 0,55 = 0,099 \approx 0,1.$$

Il y a environ une chance sur 10 que deux étudiants soient convoqués le jour de leur anniversaire.

PROBLÈME

Questions préliminaires

Q7 Puisque u est diagonalisable, on sait que $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$. Soient $i \in [\![1, p]\!]$ puis $x \in E_{\lambda_i}(u)$. Puisque des polynômes en u commutent,

$$P(u)(x) = \left(\prod_{j=1}^{p}(u - \lambda_j \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})\right)(x) = \left(\prod_{j \neq i}(u - \lambda_j \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})\right)((u - \lambda_i \mathrm{Id})(x)) = \prod_{j \neq i}(u - \lambda_j \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})(0) = 0.$$

Ainsi, l'endomorphisme $P(u)$ s'annule sur chacun des $E_{\lambda_i}(u)$, $1 \leqslant i \leqslant p$. Puisque les sous-espaces $E_{\lambda_i}(u)$ sont supplémentaires, on en déduit que $P(u) = 0$.

Q8 Puisque les nombres $\mu_1, \ldots, \mu_r$, sont deux à deux distincts, les polynômes $X - \mu_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$, sont deux à deux premiers entre eux. Le théorème de décomposition des noyaux permet d'écrire

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(Q(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(u - \mu_i \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) \quad (*).$$

Dans la décomposition $(*)$, un sous-espace $\mathrm{Ker}(u - \mu_i \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$, $1 \leqslant i \leqslant r$, peut être réduit à $\{0\}$, ce qui correspond au cas où μ_i n'est pas une valeur propre de u. On supprime ces éventuels μ_i et on obtient une décomposition de la forme

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(Q(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r'} \mathrm{Ker}(u - \mu'_i \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$$

où $\{\mu'_1, \ldots, \mu'_{r'}\} \subset \{\mu_1, \ldots, \mu_r\}$. Soit $\mathscr{B}$ une base adaptée à cette décomposition de $\mathbb{R}^n$. $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de u et donc u est diagonalisable. De plus, la matrice de u dans $\mathscr{B}$ est diagonale ce qui montre que $\mathrm{Sp}(u) = \{\mu'_1, \ldots, \mu'_{r'}\} \subset \{\mu_1, \ldots, \mu_r\}$.

Un exemple où la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$

Q9 $\chi_V = X^2 - (\mathrm{Tr}(V))X + \det(V) = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$. Ainsi, $\mathrm{Sp}(V) = (1,2)$. χ_V est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples et on sait que V est diagonalisable.

$E_1(V)$ est la droite d'équation $3x + 2y = 0$. Donc $E_1(V) = \mathrm{Vect}(e_1)$ où $e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$E_2(V)$ est la droite d'équation $x + y = 0$. Donc $E_2(V) = \mathrm{Vect}(e_2)$ où $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $V = PDP^{-1}$ où $D = \mathrm{diag}(1,2)$, $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ et donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ à partir de la formule $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Q10 $Q = \begin{pmatrix} 2I_n & I_n \\ -3I_n & -I_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Un calcul par blocs fournit

$$\begin{pmatrix} 2I_n & I_n \\ -3I_n & -I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -I_n & -I_n \\ 3I_n & 2I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}.$$

Donc, Q est inversible, d'inverse la matrice $\begin{pmatrix} -I_n & -I_n \\ 3I_n & 2I_n \end{pmatrix}$. De nouveau, avec un calcul par blocs, on obtient

$$\begin{aligned} QBQ^{-1} &= \begin{pmatrix} 2I_n & I_n \\ -3I_n & -I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & 2A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -I_n & -I_n \\ 3I_n & 2I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2I_n & I_n \\ -3I_n & -I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -A & -A \\ 6A & 4A \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc, la matrice $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & 2A \end{pmatrix}$.

Q11 Un calcul par blocs fournit

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} R^{-1} & 0_n \\ 0_n & R^{-1} \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} R & 0_n \\ 0_n & R \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} R^{-1} & 0_n \\ 0_n & R^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & 2A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R & 0_n \\ 0_n & R \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R^{-1} & 0_n \\ 0_n & R^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} AR & 0_n \\ 0_n & 2AR \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^{-1}AR & 0_n \\ 0_n & 2R^{-1}AR \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Delta & 0_n \\ 0_n & 2\Delta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Soient $P = \begin{pmatrix} R & 0_n \\ 0_n & R \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$ et $D = \begin{pmatrix} \Delta & 0_n \\ 0_n & 2\Delta \end{pmatrix} \in \mathscr{D}_{2n}(\mathbb{R})$. Un calcul par blocs montre que P est inversible, d'inverse la matrice $\begin{pmatrix} R^{-1} & 0_n \\ 0_n & R^{-1} \end{pmatrix}$ et de plus, $P^{-1}BP = D$.

Ainsi, la matrice $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice B et la matrice B est semblable à une matrice diagonale. On en déduit que la matrice $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Q12 On note toujours Q la matrice $\begin{pmatrix} 2I_n & I_n \\ -3I_n & -I_n \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} T\left(\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}\right) &= T\left(QBQ^{-1}\right) = QT(B)Q^{-1} \\ &= Q\begin{pmatrix} T(A) & 0_n \\ 0_n & T(2A) \end{pmatrix}Q^{-1} \text{ (par un calcul par blocs).} \end{aligned}$$

Puisque $T\left(\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}\right) = 0_{2n}$, on en déduit que $\begin{pmatrix} T(A) & 0_n \\ 0_n & T(2A) \end{pmatrix} = 0_{2n}$ puis que $T(A) = 0_n$.

Il existe donc un polynôme non nul T, scindé sur $\mathbb{R}$ et à racines simples, qui est annulateur de A. On en déduit que la matrice $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$ si et seulement si la matrice A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Un exemple où la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est trigonalisable sur $\mathbb{R}$

Q13 $\chi_E = X^2 - (\mathrm{Tr}(E))X + \det(E) = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$. χ_E est scindé sur $\mathbb{R}$ et donc E est trigonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à E.

$E_1(f)$ est la droite d'équation $2x - 2y = 0$ ou encore $y = x$. Donc, $E_1(f) = \mathrm{Vect}\,(e_1)$ où $e_1 = (1, 1)$.
Soit $e_2 = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} f(e_2) = -2e_1 + e_2 &\Leftrightarrow (f - \mathrm{Id})(e_2) = -2e_1 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow 2x - 2y = -2 \Leftrightarrow y = x + 1. \end{aligned}$$

Le vecteur $e_2 = (0, 1)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^2$ tel que $f(e_2) = -2e_1 + e_2$. De plus, les vecteurs e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires et donc la famille (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.
Par suite, si P est la matrice de la base (e_1, e_2) dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ ou encore si $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, P est, d'après les formules de changement de base, une matrice inversible telle que

$$E = P\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}.$$

Q14 Soit $Q = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Un calcul par blocs fournit

$$\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}$$

et donc Q est une matrice inversible, d'inverse la matrice $\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}$. De nouveau un calcul par blocs fournit

$$\begin{aligned} Q^{-1}EQ &= \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & -2A \\ A & -A \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & -2A \\ 0_n & A \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ceci montre que la matrice $\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $F = \begin{pmatrix} A & -2A \\ 0_n & A \end{pmatrix}$

Q15 Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $F^k = \begin{pmatrix} A^k & -2kA^k \\ 0_n & A^k \end{pmatrix}$.

- La formule est vraie quand $k = 1$.
- Soit $k \geqslant 1$. Supposons que $F^k = \begin{pmatrix} A^k & -2kA^k \\ 0_n & A^k \end{pmatrix}$. Alors

$$F^{k+1} = \begin{pmatrix} A^k & -2kA^k \\ 0_n & A^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & -2A \\ 0_n & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{k+1} & -2(k+1)A^{k+1} \\ 0_n & A^{k+1} \end{pmatrix}.$$

On a montré par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $F^k = \begin{pmatrix} A^k & -2kA^k \\ 0_n & A^k \end{pmatrix}$. Ce dernier résultat reste clair pour $k = 0$ si on adopte la convention usuelle $A^0 = I_n$.

Soit alors $U = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$.

$$U(F)=\sum_{k=0}^{m}a_kF^k=\sum_{k=0}^{m}a_k\begin{pmatrix}A^k & -2kA^k\\ 0_n & A^k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{k=0}^{m}a_kA^k & \displaystyle -2\sum_{k=0}^{m}ka_kA^k\\ 0_n & \displaystyle\sum_{k=0}^{m}a_kA^k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}U(A) & -2AU'(A)\\ 0_n & U(A)\end{pmatrix}.$$

Donc, $\begin{pmatrix}U(A) & -2AU'(A)\\ 0_n & U(A)\end{pmatrix}=U(F)=0_{2n}$.

Q16 Mais alors, $U(A)=0_n$ et $AU'(A)=0_n$ ou encore U et XU' sont annulateurs de A. Par définition de μ_A, μ_A est un diviseur commun à U et XU'. U est à racines simples et donc U et U' n'ont pas de racine commune dans $\mathbb{C}$ ou encore U et U' sont premiers entre eux.
μ_A divise U et U et U' sont premiers entre eux. Donc, μ_A et U' sont premiers entre eux car sans racine commune dans $\mathbb{C}$. Ainsi, μ_A divise XU' et μ_A est premier avec U'. D'après le théorème de Gauss, μ_A divise X. Enfin, μ_A est de degré au moins 1 et est unitaire et on en déduit que $\mu_A=X$.

Puisque μ_A est annulateur de A, on en déduit enfin que $A=0_n$.

Q17 Si F est diagonalisable alors $A=0_n$. Réciproquement, si $A=0_n$, alors $F=0_{2n}$ et en particulier, F est diagonalisable. D'après Q14, la matrice $\begin{pmatrix}3A & -2A\\ 2A & -A\end{pmatrix}$ est diagonalisable si et seulement si la matrice F est diagonalisable et finalement,

$$\begin{pmatrix}3A & -2A\\ 2A & -A\end{pmatrix}\text{ diagonalisable}\Leftrightarrow A=0_n.$$

Q18 Les matrices $\begin{pmatrix}3A & -2A\\ 2A & -A\end{pmatrix}$ et F sont semblables et donc $\begin{pmatrix}3A & -2A\\ 2A & -A\end{pmatrix}$ est trigonalisable dans $\mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$ si et seulement si F est trigonalisable dans $\mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$.
$\chi_F=\det(XI_{2n}-F)=\det\begin{pmatrix}XI_n-A & 2A\\ 0_n & XI_n-A\end{pmatrix}=(\det(XI_n-A))^2=(\chi_A)^2$. On en déduit que χ_F est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$. On en déduit encore que $\begin{pmatrix}3A & -2A\\ 2A & -A\end{pmatrix}$ est trigonalisable dans $\mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$ si et seulement si A est trigonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Q19 Soit $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. $\chi_A=X^2+1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ et donc A n'est pas trigonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. D'après la question précédente, la matrice $\begin{pmatrix}3A & -2A\\ 2A & -A\end{pmatrix}$ n'est pas trigonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

Applications

Q20 Soit $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ de sorte que $M=\begin{pmatrix}A & 2A\\ 2A & A\end{pmatrix}$. Soit $V=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.
$\chi_V=X^2-2X-3=(X+1)(X-3)$ et donc $\mathrm{Sp}(V)=(-1,3)$. Ensuite, $E_{-1}(V)=\mathrm{Vect}((1,-1))$ et $E_3(V)=\mathrm{Vect}((1,1))$.
Soit $Q=\begin{pmatrix}I_2 & I_2\\ -I_2 & I_2\end{pmatrix}$. Comme à la question Q10,

$$\begin{aligned}Q^{-1}MQ&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}I_2 & -I_2\\ I_2 & I_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & 2A\\ 2A & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_2 & I_2\\ -I_2 & I_2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}I_2 & -I_2\\ I_2 & I_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-A & 3A\\ A & 3A\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-A & 0\\ 0 & 3A\end{pmatrix}=\Delta.\end{aligned}$$

Soit $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Soient f et d les endomorphismes de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associés à Q et Δ respectivement. Alors, $f^{-1}\circ u\circ f=d$ ou encore $u\circ f=f\circ d$.
Soient $F=f(\mathrm{Vect}(e_1,e_2))$ et $G=f(\mathrm{Vect}(e_3,e_4))$. F et G sont deux sous-espaces de $\mathbb{R}^4$ de dimension 2 (image d'un sous-espace de dimension 2 par un automorphisme). La matrice de d dans $\mathscr{B}$ est diagonale par blocs et donc d laisse stable le sous-espace $\mathrm{Vect}(e_1,e_2)$ et le sous-espace $\mathrm{Vect}(e_3,e_4)$.

$u(F)=u(\mathrm{Vect}(f(e_1),f(e_2)))=\mathrm{Vect}(u\circ f(e_1),u\circ f(e_2))=\mathrm{Vect}(f(d(e_1)),f(d(e_2)))\subset\mathrm{Vect}(f(e_1),f(e_2))=F$ (car $d(e_1)$ et $d(e_2)$ sont dans $\mathrm{Vect}(e_1,e_2)$). Donc, F est stable par u. De même, G est stable par u.

Déterminons explicitement F et G. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$Q\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -a \\ -b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et donc $F = \text{Vect}\,(e_1 - e_3, e_2 - e_4)$. De même,

$$Q\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a \\ b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et donc $G = \text{Vect}\,(e_1 + e_3, e_2 + e_4)$.

Q21 $M = \begin{pmatrix} 2A & A \\ A & 2A \end{pmatrix}$ où $A = 2I_2$. Soit $P = \begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ -I_2 & I_2 \end{pmatrix}$. Alors, P est inversible, d'inverse la matrice $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} I_2 & -I_2 \\ I_2 & I_2 \end{pmatrix}$ puis

$$\begin{aligned} P^{-1}MP &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I_2 & -I_2 \\ I_2 & I_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2A & A \\ A & 2A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ -I_2 & I_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I_2 & -I_2 \\ I_2 & I_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 3A \\ -A & 3A \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2I_2 & 0 \\ 0 & 6I_2 \end{pmatrix} = \text{diag}(2, 2, 6, 6) = D. \end{aligned}$$

Q22 Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ puis $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ de sorte que $X = PY$.

$$\begin{aligned} \left\{\begin{array}{l} x_1' = 4x_1 + 2x_3 \\ x_2' = 4x_2 + 2x_4 \\ x_3' = 2x_1 + 4x_3 \\ x_4' = 2x_2 + 4x_4 \end{array}\right. &\Leftrightarrow X' = MX \Leftrightarrow X' = PDP^{-1}X \Leftrightarrow P^{-1}X' = DP^{-1}X \Leftrightarrow \left(P^{-1}X\right)' = D\left(P^{-1}X\right) \\ &\Leftrightarrow Y' = DY \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y_1' = 2y_1 \\ y_2' = 2y_2 \\ y_3' = 6y_3 \\ y_4' = 6y_4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 /\ \forall t \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{l} y_1(t) = \alpha e^{2t} \\ y_2(t) = \beta e^{2t} \\ y_3(t) = \gamma e^{6t} \\ y_4(t) = \delta e^{6t} \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 /\ \forall t \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha e^{2t} \\ \beta e^{2t} \\ \gamma e^{6t} \\ \delta e^{6t} \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 /\ \forall t \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha e^{2t} + \gamma e^{6t} \\ \beta e^{2t} + \delta e^{6t} \\ -\alpha e^{2t} + \gamma e^{6t} \\ -\beta e^{2t} + \delta e^{6t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Q23 Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Il existe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^{2t} + \gamma e^{6t} \\ \beta e^{2t} + \delta e^{6t} \\ -\alpha e^{2t} + \gamma e^{6t} \\ -\beta e^{2t} + \delta e^{6t} \end{pmatrix}$.

$$\varphi(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha + \gamma \\ \beta + \delta \\ -\alpha + \gamma \\ -\beta + \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a-c)/2 \\ (b-d)/2 \\ (a+c)/2 \\ (b+d)/2 \end{pmatrix}.$$

Donc, pour tout réel t et tout $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$,

$$e^{tM}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \varphi(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{a-c}{2}e^{2t} + \dfrac{b-d}{2}e^{6t} \\ \dfrac{a+c}{2}e^{2t} + \dfrac{b+d}{2}e^{6t} \\ -\dfrac{a-c}{2}e^{2t} + \dfrac{b-d}{2}e^{6t} \\ -\dfrac{a+c}{2}e^{2t} + \dfrac{b+d}{2}e^{6t} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{2t} & e^{6t} & -e^{2t} & -e^{6t} \\ e^{2t} & e^{6t} & e^{2t} & e^{6t} \\ -e^{2t} & e^{6t} & e^{2t} & -e^{6t} \\ -e^{2t} & e^{6t} & -e^{2t} & e^{6t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

puis, pour tout réel t, $e^{tM} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{2t} & e^{6t} & -e^{2t} & -e^{6t} \\ e^{2t} & e^{6t} & e^{2t} & e^{6t} \\ -e^{2t} & e^{6t} & e^{2t} & -e^{6t} \\ -e^{2t} & e^{6t} & -e^{2t} & e^{6t} \end{pmatrix}$ et donc

$$e^{M} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{2} & e^{6} & -e^{2} & -e^{6} \\ e^{2} & e^{6} & e^{2} & e^{6} \\ -e^{2} & e^{6} & e^{2} & -e^{6} \\ -e^{2} & e^{6} & -e^{2} & e^{6} \end{pmatrix}.$$

