SESSION 2018

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE MP

MATHEMATIQUES 1

Partie I - « Permutation limite-intégrale » et intégrale de Gauss

I.1 - Utilisation d'une série entière

Q1 Pour $x \in [0,1]$, on pose $f(x) = e^{-x^2}$. Pour tout réel x de $[0,1]$,

$$f(x) = e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} \quad (*).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{n!}$ de sorte que la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge simplement vers la fonction f sur le segment $[0,1]$. De plus, on sait qu'une série entière converge uniformément vers sa somme sur tout segment inclus dans son intervalle ouvert de convergence.

Ici, l'intervalle ouvert de convergence est $]-\infty,+\infty[$ et donc la série de fonctions de terme général $f_n \ : \ x \mapsto (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ converge uniformément vers sa somme f sur le segment $[0,1]$.

En résumé, chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}$, est continue par morceaux sur le segment $[0,1]$ et la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge uniformément vers f sur le segment $[0,1]$. D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment,

- la série numérique de terme général $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$, $n \in \mathbb{N}$, converge ;
- la fonction f est continue par morceaux sur $[0,1]$;
- $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

Ceci fournit explicitement

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^{2n}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}.$$

Q2 Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \dfrac{1}{(2n+1)n!}$ de sorte que $I = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$. La suite u est positive, décroissante (en tant qu'inverse d'une suite strictement positive et croissante) et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. La série de terme général $(-1)^n u_n$, $n \in \mathbb{N}$, est donc une série alternée. On sait que la valeur absolue du reste à l'ordre n d'une telle série est majorée par la valeur absolue de son premier terme et donc, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$|I - s_n| = |R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!} \right| \leqslant \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(2(n+1)+1)(n+1)!} \right| = \frac{1}{(2n+3)(n+1)!}.$$

Q3 *Informatique.*

```
def factorielle(n):
    if n>=1 :
        return(n*factorielle(n-1))
    else :
        return(1)
```


Q4 *Informatique.*

```
N=0
while(1/((2*N+3)*factorielle(N+1))>10**(-6)) :
    N+=1
print(N)
```

I.2 - Utilisation d'une autre suite de fonctions

Q5 Soit $x \in [0, +\infty[$. Pour n entier naturel tel que $n > x^2$, on a $1 > \dfrac{x^2}{n}$ puis $1 - \dfrac{x^2}{n} > 0$. Par suite,

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{=} e^{n\ln\left(1-\frac{x^2}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} e^{n\ln\left(-\frac{x^2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \underset{n\to+\infty}{=} e^{-x^2+o(1)}$$

et donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction $f\ :\ x \mapsto e^{-x^2}$.

Q6 La fonction $u \mapsto \ln(1+u)$ est concave sur $]-1, +\infty[$ car cette fonction est deux fois dérivable sur $]-1, +\infty[$ et sa dérivée seconde, à savoir la fonction $u \mapsto -\dfrac{1}{(1+u)^2}$, est négative sur $]-1, +\infty[$. Le graphe de cette fonction est donc en dessous de sa tangente en son point d'abscisse 0 Ceci fournit l'inégalité de convexité classique

$$\forall u > -1,\ \ln(1+u) \leqslant u.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in [0, 1[$, $1 - \dfrac{x^2}{n} > 0$ ce qui reste vrai pour $x = 1$ si de plus $n \geqslant 2$. Pour de tels n et x, on peut écrire

$$|f_n(x)| = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{x^2}{n}\right)} \leqslant e^{n\left(-\frac{x^2}{n}\right)} = e^{-x^2},$$

Ce qui reste vrai quand $n = 1$ et $x = 1$ car $f_1(1) = 0 \leqslant e^{-1}$. On a montré que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0, 1]$, $|f_n(x)| \leqslant e^{-x^2}$.

Remarque. La majoration beaucoup plus simple : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0, 1]$, $|f_n(x)| \leqslant 1$ était suffisante pour ce qui suit.

Ainsi,

- chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est continue par morceaux sur $[0, 1]$;
- la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, converge simplement vers la fonction $f\ :\ x \mapsto e^{-x^2}$ sur $[0, 1]$ d'après Q5 et la fonction f est continue par morceaux sur l'intervalle $[0, 1]$.
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, 1]$, $|f_n(x)| \leqslant e^{-x^2} = \varphi(x)$ où φ est une fonction continue par morceaux et donc intégrable sur le segment $[0, 1]$.

D'après le théorème de convergence dominée,

- la suite $\left(\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\ dx\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge ;
- la fonction f est intégrable sur $[0, 1]$;
- $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\ dx$.

Ceci fournit explicitement

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n\ dx \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k x^{2k}}{n^k}\right)\ dx \text{ (d'après la formule du binôme de Newton)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n^k} \int_0^1 x^{2k}\ dx\right) \text{ (par linéarité de l'intégration)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n^k(2k+1)}.
\end{aligned}$$

Partie II - Notion de polynôme interpolateur

II.1 - Existence du polynôme interpolateur

Q7 Chaque l_i, $i \in [\![0,n]\!]$, est un polynôme de degré n et donc L_n est un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Soit $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$.

- si $i = j$, $l_i(x_j) = l_i(x_i) = \displaystyle\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{x_i - x_k}{x_i - x_k} = 1$.
- si $i \neq j$, $l_i(x_j) = \dfrac{x_j - x_j}{x_i - x_j} \displaystyle\prod_{\substack{k=0\\k\neq i,\ k\neq j}}^{n} \frac{x_j - x_k}{x_i - x_k} = 0$.

En résumé, pour tout $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$, $l_i(x_j) = \delta_{i,j}$ où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker.

On en déduit que pour $j \in [\![0,n]\!]$,

$$L_n(f)(x_j) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, l_i(x_j) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, \delta_{i,j} = f(x_j).$$

Ceci montre que $L_n(f)$ est un polynôme interpolateur de f aux points x_i. Soit P un polynôme interpolateur de f aux points x_i. Alors, P est un polynôme de degré au plus n et pour tout $i \in [\![0,n]\!]$,

$$P(x_i) = f(x_i) = L_n(f)(x_i).$$

Ainsi, les deux polynômes P et L_n coïncident en au moins $n+1$ réels deux à deux distincts et sont de degré inférieur ou égal à n. On en déduit que $P = L_n(f)$. Ceci montre l'unicité de $L_n(f)$.

II.2 - Calcul effectif du polynôme interpolateur de Lagrange

Q8 *Informatique.*

```python
def lagrange(x,y,a):
    Somme=0
    n=len(x)
    for i in range(n) :
         li=1
         for j in range(n) :
             if j!=i :
                 li*=(a-x[j])/(x[i]-x[j])
        Somme+=y[i]*li
     return(Somme)
```

Q9 *Informatique.*

$$\left\{\begin{array}{l} P(x_0) = f(x_0) \\ \quad\vdots \\ P(x_n) = f(x_n) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_n x_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_n x_1^n = f(x_1) \\ \quad\vdots \\ a_0 + a_1 x_n + \ldots + a_n x_n^n = f(x_n) \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}.$$

Donc, V est la matrice de Vandermonde : $\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{pmatrix}$.

En effectuant le pivot de Gauss,

- on effectue la transformation $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$: $O(n)$ opérations. On fait de même pour les lignes 3 à n ce qui achève la première étape de l'algorithme avec $O(n \times n) = O\left(n^2\right)$ opérations.

- on recommence à l'aide du pivot ligne 2, colonne 2, puis ligne 3, colonne 3, ... puis ligne n, colonne n avec $O\left(n \times n^2\right) = O\left(n^3\right)$ opérations.

La complexité du calcul est $O\left(n^3\right)$.

II.3 - Expression de l'erreur d'interpolation

Q10 Montrons par récurrence que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, si $\phi\ :\ [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction p fois dérivable sur $[a, b]$ qui s'annule $p+1$ fois sur $[a, b]$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $\phi^{(p)}(c) = 0$.

- Soit ϕ une fonction dérivable sur $[a, b]$ s'annulant en deux points distincts x_0 et x_1 de $[a, b]$ tels que $x_0 < x_1$. Alors, ϕ est continue sur $[x_0, x_1]$, dérivable sur $]x_0, x_1[$ et prend la même valeur en x_0 et x_1. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]x_0, x_1[\subset]a, b[$ tel que $\phi'(c) = 0$. Le résultat est donc vrai quand $p = 1$.

- Soit $p \geqslant 1$. Supposons le résultat pour p. Soit ϕ une fonction $p+1$ fois dérivable sur $[a, b]$ s'annulant en $p+2$ points deux à deux distincts $x_0, x_1, \ldots, x_{p+1}$ de $[a, b]$ tels que $x_0 < x_1 < \ldots < x_{p+1}$.
En particulier, pour chaque $k \in [\![0, p]\!]$, ϕ est continue sur $[x_k, x_{k+1}]$, dérivable sur $]x_k, x_{k+1}[$ et prend la même valeur en x_k et x_{k+1}. D'après le théorème de Rolle, pour chaque $k \in [\![0, p]\!]$, ϕ' s'annule en un certain réel c_k de $]x_k, x_{k+1}[$.
Mais alors, ϕ' est une fonction p fois dérivable sur $[a, b]$ s'annulant en $p+1$ points deux à deux distincts de $[a, b]$.
Par hypothèse de récurrence, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\phi^{(p+1)}(c) = (\phi')^{(p)}(c) = 0$.

Le résultat est démontré par récurrence.

Q11 Soit $x \in \sigma$. x est donc l'un des x_i et pour tout réel c de $[a, b]$, $f(x) - L_n(f)(x) = 0 = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\pi_\sigma(x)$ et en particulier, il existe $c_x \in]a, b[$ tel que $f(x) - L_n(f)(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}\pi_\sigma(x)$. Donc, la propriété $\mathscr{P}_x$ est vraie quand $x \in \sigma$.

Q12 Soit $x \in [a, b] \setminus \sigma$. $F(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - L_n(f)(x) - \lambda\pi_\sigma(x) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{f(x) - L_n(f)(x)}{\pi_\sigma(x)}$ ($\pi_\sigma(x) \neq 0$ car $x \notin \sigma$).

Q13 Soient $x \in [a, b] \setminus \sigma$ puis λ fixé comme dans Q12. La fonction F s'annule en chacun des x_i car $f - L_n(f)$ d'une part et π_σ d'autre part, s'annulent en chacun des x_i et la fonction F s'annule en x par définition de λ. De plus x est distinct de chaque x_i, $0 \leqslant i \leqslant n$. Finalement, la fonction F s'annule en $n+2$ points deux à deux distincts de l'intervalle $[a, b]$.

De plus, f est $n+1$ fois dérivable sur $[a, b]$ et il en est de même de F. D'après Q10, il existe $c_x \in]a, b[$ tel que $F^{(n+1)}(c_x) = 0$.
Maintenant, puisque $L_n(f)$ est un polynôme de degré au plus n et que π_σ est un polynôme de degré $n+1$, pour tout réel $t \in [a, b]$,

$$F^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - 0 - \lambda(n+1)!\mathrm{dom}\left(\pi_\sigma\right) = f^{(n+1)}(t) - \lambda(n+1)!.$$

L'égalité, $F^{(n+1)}(c_x) = 0$ s'écrit explicitement $\dfrac{f(x) - L_n(f)(x)}{\pi_\sigma(x)} = \lambda = \dfrac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}$ et donc $f(x) - L_n(f)(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}\pi_\sigma(x)$.
Encore une fois $\mathscr{P}_x$ est vraie.

Q14 Puisque f est de classe C^{n+1} sur le segment $[a, b]$, la fonction $f^{(n+1)}$ est définie et continue sur le segment $[a, b]$. On en déduit que la fonction $f^{(n+1)}$ est bornée sur le segment $[0, 1]$.

D'après la question Q11, la propriété $\mathscr{P}_x$ est vraie quand $x \in \sigma$ et d'après Q13, la propriété $\mathscr{P}_x$ est vraie quand $x \in [a, b] \setminus \sigma$.
Finalement, la propriété $\mathscr{P}_x$ est vraie pour tout x de $[a, b]$. Pour tout x de $[a, b]$, on a alors

$$|f(x) - L_n(f)(x)| = \frac{\left|f^{(n+1)}(c_x)\right|}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}|x - x_k| \leqslant \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty,$$

et donc

$$\|f - L_n(f)\|_\infty \leqslant \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty.$$

Q15 On applique ce qui précède à $f = \sin$, $a = 0$ et $b = 2\pi$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty = 1$ et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f - L_n(f)\|_\infty \leqslant \frac{(2\pi)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

La suite $\left(\dfrac{(2\pi)^{n+1}}{(n+1)!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 d'après un théorème de croissances comparées et donc la suite $\left(\|f - L_n(f)\|_\infty\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. On en déduit que la suite de polynômes $(L_n(f))$ converge uniformément vers la fonction $x \mapsto \sin x$ sur $[0, 2\pi]$.

Q16 Pour tout réel x de $]-1,1[$, $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^{2k}$. On sait alors que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\dfrac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}=(-1)^k$ puis

$$\left\|f^{(2k)}\right\|_{\infty}\geqslant\left|f^{(2k)}(0)\right|=\left|(-1)^k(2k)!\right|=(2k)!.$$

Partie III - Famille de polynômes orthogonaux

Q17 Pour $k\in[\![0,n]\!]$, posons $E_k=X^k$.

- $\|E_0\|^2=\displaystyle\int_{-1}^{1}1^2\,dt=2$ puis $P_0=\dfrac{1}{\|E_0\|}E_0=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
- $\langle E_1,P_0\rangle=\displaystyle\int_{-1}^{1}\dfrac{t}{\sqrt{2}}\,dt=0$ (fonction impaire) puis $E_1-\langle E_1,P_0\rangle P_0=X$.

Ensuite, $\|E_1\|^2=\displaystyle\int_{-1}^{1}t^2\,dt=\dfrac{2}{3}$ et donc $P_1=\sqrt{\dfrac{3}{2}}X$.

Finalement, $P_0=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $P_1=\sqrt{\dfrac{3}{2}}X$.

Q18 Par définition de l'orthonormalisée, pour tout $k\in[\![0,n]\!]$. $\text{Vect}\,(P_0,\dots,P_k)=\text{Vect}\,(E_0,\dots,E_k)=\mathbb{R}_k[X]$.
Par suite, $P_n\in(\text{Vect}\,(P_0,\dots,P_{n-1}))^{\perp}=(\mathbb{R}_{n-1}[X])^{\perp}$.

$P_n\in\text{Vect}\,(P_0,\dots,P_n)=\text{Vect}\,(E_0,\dots,E_n)=\mathbb{R}_n[X]$ et donc P_n est de degré au plus n. Si P_n est de degré inférieur ou égal à $n-1$, alors $P_n\in\mathbb{R}_{n-1}[X]\cap(\mathbb{R}_{n-1}[X])^{\perp}=\{0\}$ et donc $P_n=0$ ce qui est faux puisque P_n est de norme 1. Donc, P_n est de degré n.

Q19 Soit $n\geqslant 1$.

$$\int_{-1}^{1}P_n(t)\,dt=\sqrt{2}\int_{-1}^{1}P_n(t)P_0(t)\,dt=\sqrt{2}\langle P_n,P_0\rangle=0$$

(car $n\neq 0$). Si P_n ne s'annule pas sur $[-1,1]$, puisque la fonction P_n est continue sur $[-1,1]$, la fonction P_n est de signe constant sur $[-1,1]$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Mais alors, P_n est une fonction continue sur $[-1,1]$, de signe constant sur $[-1,1]$, d'intégrale nulle sur $[-1,1]$. On en déduit que $P_n=0$ ce qui est faux. Donc, P_n s'annule au moins une fois sur $[-1,1]$.

Q20 Par construction $Q\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$. D'après Q18, $P_n\in(\mathbb{R}_{n-1}[X])^{\perp}$ et donc

$$\int_{-1}^{1}H(t)\,dt=\int_{-1}^{1}P_n(t)Q(t)\,dt=\langle P_n,Q\rangle=0.$$

Par construction, toute racine de $H=QP_n$ est d'ordre pair et donc, quand H s'annule en un certain x_0, H ne change pas de signe au voisinage de x_0. On en déduit que H est de signe constant sur $[-1,1]$. Puisque de plus, H est continue sur $[-1,1]$, d'intégrale nulle sur $[-1,1]$, on en déduit que H s'annule sur $[-1,1]$ puis que $H=0$ (polynôme ayant une infinité de racines) ce qui est faux.

Donc, $p=n$ ou encore P_n a n racines simples, toutes dans $[-1,1]$.

Partie IV - Méthodes de quadrature

Q21 Soit $k\in[\![0,n-1]\!]$. La fonction $h\,:\,t\mapsto x_k+(t+1)\dfrac{x_{k+1}-x_k}{2}$ est une fonction affine strictement croissante réalisant une bijection de $[-1,1]$ sur $[h(-1),h(1)]=[x_k,x_{k+1}]$. En posant $x=x_k+(t+1)\dfrac{x_{k+1}-x_k}{2}$ et donc $dx=\dfrac{x_{k+1}-x_k}{2}\,dt$, on obtient

$$\frac{x_{k+1}-x_k}{2}\int_{-1}^{1}g(t)\,dt=\int_{-1}^{1}f\left(x_k+(t+1)\frac{x_{k+1}-x_k}{2}\right)\,\frac{x_{k+1}-x_k}{2}dt=\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(x)\,dx.$$

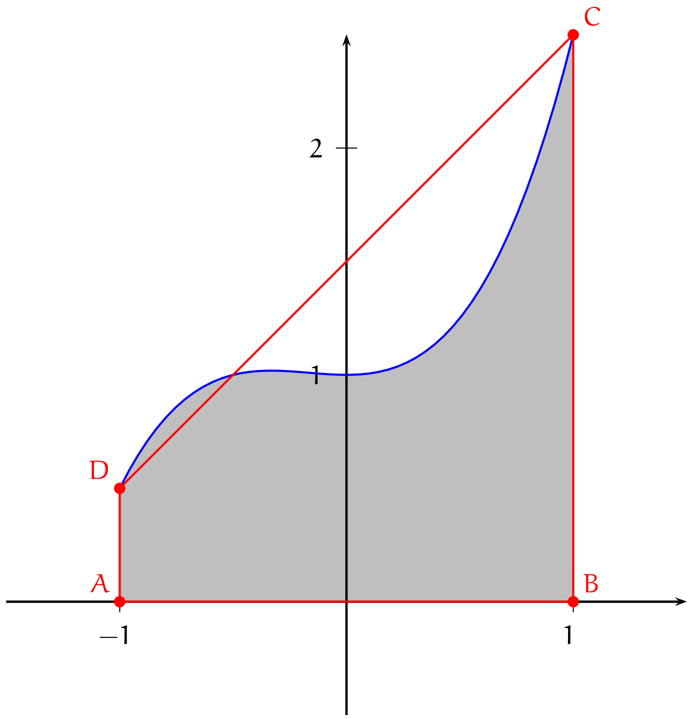
Q22 Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, P est un polynôme de degré au plus n coïncidant avec P en $t_0, \ldots, t_n$. Par unicité d'un tel polynôme, on a donc $P = L_n(P)$ puis

$$J(P) = \int_{-1}^{1} L_n(P)(t)\, dt = \int_{-1}^{1} P(t)\, dt.$$

Q23 $l_0 = \dfrac{X - t_1}{t_0 - t_1} = -\dfrac{1}{2}(X-1)$ et $l_1 = \dfrac{X - t_0}{t_1 - t_0} = \dfrac{1}{2}(X+1)$ puis, par parité, $\alpha_0 = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}(t-1)\, dt = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} 1\, dt = 1$ et $\alpha_1 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}(t+1)\, dt = 1$. On obtient alors

$$J(g) = g(-1) + g(1) = 2\frac{g(-1) + g(1)}{2}.$$

Le résultat s'interprète graphiquement : ci-dessous, le graphe d'une fonction g continue et positive sur $[-1, 1]$, de sorte que $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(t)\, dt$ est l'aire, exprimée en unités d'aire du domaine $\mathscr{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ -1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant g(x)\right\}$. $J(g) = 2\dfrac{g(-1) + g(1)}{2}$ est quant à elle l'aire, exprimée en unités d'aire, du trapèze $ABCD$. La méthode J est donc la méthode des trapèzes.



Q24 Puisque P est de degré au plus $2n+1$ et que P_{n+1} est de degré $n+1$ d'après Q18, Q est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$. Mais alors, d'après Q18, $P_{n+1} \in (\mathbb{R}_n[X])^{\perp}$,

$$\int_{-1}^{1} Q(t) P_{n+1}(t)\, dt = \langle Q, P_{n+1}\rangle = 0.$$

D'autre part, $J\left(QP_{n+1}\right) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \alpha_i Q\left(t_i\right) P_{n+1}\left(t_i\right) = 0$. Finalement,

$$J\left(QP_{n+1}\right) = 0 = \int_{-1}^{1} Q(t) P_{n+1}(t)\, dt.$$

Ensuite,

$$
\begin{aligned}
J(P) &= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \left(QP_{n+1} + R\right)(t_i) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i R\left(t_i\right) \\
&= \int_{-1}^{1} R(t)\ dt \text{ (d'après Q22, puisque } R \in \mathbb{R}_n[X]) \\
&= \int_{-1}^{1} \left(Q(t)P_{n+1}(t) + R(t)\right) dt \\
&= \int_{-1}^{1} P(t)\ dt.
\end{aligned}
$$

Q25 Soit $i \in [\![0, n]\!]$. On applique l'égalité de la question précédente au polynôme $P = l_i^2$. P est un polynôme de degré $2n$ et en particulier P est un élément de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$. On obtient

$$
\begin{aligned}
\alpha_i &= \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \delta_{i,j} = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j P\left(t_j\right) = J(P) \\
&= \int_{-1}^{1} P(t)\ dt > 0 \text{ (intégrale d'une fonction continue, positive et non nulle)}.
\end{aligned}
$$

Ainsi, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $\alpha_i > 0$. D'autre part, en appliquant l'égalité de la question précédente, au polynôme $P = 1$, qui est bien un élément de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$, on obtient

$$
\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i P\left(t_i\right) = J(P) = \int_{-1}^{1} P(t)\ dt = \int_{-1}^{1} dt = 2.
$$

Donc, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 2$.

