SESSION 2017

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE MP

MATHEMATIQUES 2

PROBLÈME

Partie I - Un exemple de chaîne de Markov

Q1 L'énoncé fournit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_{X_n=1}(X_{n+1}=2) = \frac{1}{2} \text{ et } P_{X_n=2}(X_{n+1}=1) = \frac{1}{4}.$$

D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}P(X_1=1) &= P((X_0=1)\cap(X_1=1)) + P((X_0=2)\cap(X_1=1)) \\ &= P(X_0=1)\times P_{X_0=1}(X_1=1) + P(X_0=2)\times P_{X_0=2}(X_1=1) \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4} = \frac{3}{8}\end{aligned}$$

puis $P(X_1=2) = \frac{5}{8}$.

Q2 Plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}P(X_{n+1}=1) &= P(X_n=1)\times P_{X_n=1}(X_{n+1}=1) + P(X_n=2)\times P_{X_n=2}(X_{n+1}=1) \\ &= \frac{1}{2}P(X_n=1) + \frac{1}{4}P(X_n=2)\end{aligned}$$

et de même, $P(X_{n+1}=2) = \left(1-\frac{1}{2}\right)P(X_n=1) + \left(1-\frac{1}{4}\right)P(X_n=2) = \frac{1}{2}P(X_n=1) + \frac{3}{4}P(X_n=2)$. Par suite,

$$\mu_{n+1} = \begin{pmatrix} P(X_{n+1}=1) & P(X_{n+1}=2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(X_n=1) & P(X_n=2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix} = \mu_n A.$$

Q3 $\mu_5 = \mu_0 A^5 = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{171}{512} & \frac{341}{512} \\ \frac{341}{1024} & \frac{683}{1024}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{683}{2048} & \frac{1365}{2048}\end{pmatrix}$ puis

$$P(X_5=1) = 0,33 \text{ arrondi au centième et } P(X_5=2) = 0,67 \text{ arrondi au centième.}$$

Q4 $P(T=0)=P(X_0=1)=\frac{1}{2}$ puis $P(T=1)=P((X_0=2)\cap(X_1=1))=P(X_0=2)\times P_{X_0=2}(X_1=1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$.

Soit $k\geqslant 2$. D'après la formule des probabilités composées et puisque l'état de la particule au temps $n+1$ dépend uniquement de son état au temps n,

$$\begin{aligned}
P(T=k) &= P\left(\left(\bigcap_{i=0}^{k-1}(X_i=2)\right)\cap X_k=1\right)\\
&= P_{\bigcap_{i=0}^{k-1}(X_i=2)}(X_k=1)\times P_{\bigcap_{i=0}^{k-2}(X_i=2)}(X_{k-1}=2)\times\ldots\times P_{X_0=2}(X_1=2)\times P(X_0=2)\\
&= P_{X_{k-1}=2}(X_k=1)\times P_{X_{k-2}=2}(X_{k-1}=2)\times\ldots\times P_{X_0=2}(X_1=2)\times P(X_0=2)\\
&= \frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\left(\frac{3}{4}\right)^{k}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $P(T=k)=\frac{1}{6}\left(\frac{3}{4}\right)^{k}$.

Q5 $\chi_A=X^2-\mathrm{Tr}(A)X+\det(A)=X^2-\frac{5}{4}X+\frac{1}{4}=\left(X-\frac{1}{4}\right)(X-1)$. χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples et donc A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

$\mathrm{Ker}(A-I)$ est la droite d'équation $-x+y=0$ et donc $\mathrm{Ker}(A-I)=\mathrm{Vect}(e_1)$ où $e_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

$\mathrm{Ker}\left(A-\frac{1}{4}I\right)$ est la droite d'équation $x+2y=0$ et donc $\mathrm{Ker}\left(A-\frac{1}{4}I\right)=\mathrm{Vect}(e_2)$ où $e_2=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$. Par suite

$$A=QDQ^{-1}\text{ où }Q=\begin{pmatrix}1&2\\1&-1\end{pmatrix},\ Q^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2\\1&-1\end{pmatrix}\text{ et }D=\mathrm{diag}\left(1,\frac{1}{4}\right).$$

Q6 L'application $f\ :\ M\mapsto MQM^{-1}$ est un endomorphisme de l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie sur $\mathbb{R}$. On sait alors que l'application f est continue sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. De même, l'application $g\ :\ M\mapsto\mu_0M$ est linéaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R})$ et donc l'application $M\mapsto\mu_0M$ est continue sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Q7 Pour tout entier naturel n, $D^n=\left(\mathrm{diag}\left(1,\frac{1}{4}\right)\right)^n=\mathrm{diag}\left(1,\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$. La suite (D^n) converge vers la matrice $\Delta=\mathrm{diag}(1,0)$. Par continuité de f sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et donc en Δ, la suite $(A^n)=(f(D^n))$ converge vers $f(\Delta)=Q\Delta Q^{-1}$. De même, par continuité de g, la suite $(\mu_n)=(g(A^n))$ converge vers $\mu_0Q\Delta Q^{-1}$ avec

$$\begin{aligned}
\mu_0Q\Delta Q^{-1} &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1/2&1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&-1\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1/2&1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1/2&1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1/3&2/3\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Partie II - Spectre d'une matrice stochastique

Q8 Soit $U=(1)_{1\leqslant i\leqslant p}\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

$$AU=\left(\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}\right)_{1\leqslant i\leqslant p}=(1)_{1\leqslant i\leqslant p}=U.$$

Puisque $U\neq 0$, on en déduit que 1 est valeur propre de A et que U est un vecteur propre associé.

Q9 Soit $x=(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Pour tout $i\in[\![1,p]\!]$,

$$|(Ax)_i|=\left|\sum_{j=1}^{p}a_{i,j}x_j\right|\leqslant\sum_{j=1}^{p}a_{i,j}|x_j|\leqslant\left(\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}\right)\|x\|_\infty=\|x\|_\infty$$

puis $\|Ax\|_\infty\leqslant\|x\|_\infty$.

Q10 Soit λ une valeur propre de A dans $\mathbb{C}$ puis x un vecteur propre associé. D'après la question précédente,

$$|\lambda|\|x\|_\infty = \|\lambda x\|_\infty = \|Ax\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty.$$

Puisque $x \neq 0$, on a encore $\|x\|_\infty > 0$. Après simplification par $\|x\|_\infty$, on obtient $|\lambda| \leqslant 1$.

Localisation des valeurs propres

Q11 Soit x' un vecteur propre de A associé à λ. Le vecteur $x = \dfrac{1}{\|x'\|_\infty}x'$ est encore un vecteur propre de A associé à λ et vérifie de plus $\|x\|_\infty = 1$.

Q12 Puisque $Ax = \lambda x$, on a en particulier $(Ax)_i = \lambda x_i$ puis $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = \lambda x_i$ puis

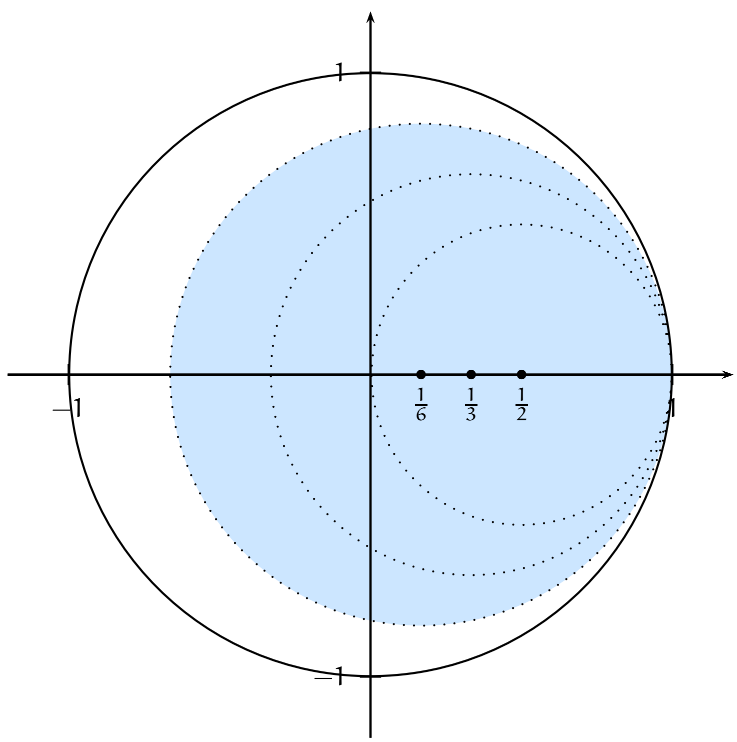
$$(\lambda - a_{i,i})\,x_i = \sum_{j\neq i} a_{i,j}x_j.$$

On en déduit que

$$|\lambda - a_{i,i}| = |(\lambda - a_{i,i})\,x_i| = \left|\sum_{j\neq i} a_{i,j}x_j\right| \leqslant \sum_{j\neq i} a_{i,j}\,|x_j| \leqslant \sum_{j\neq i} a_{i,j} = 1 - a_{i,i}.$$

Etude d'un exemple

Q13 Soit λ une valeur propre de A. Puisque la matrice A est effectivement stochastique, ou bien $\left|\lambda - \dfrac{1}{2}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$ ou $\left|\lambda - \dfrac{1}{6}\right| \leqslant \dfrac{5}{6}$ ou $\left|\lambda - \dfrac{1}{3}\right| \leqslant \dfrac{2}{3}$. λ est donc dans $D_f\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right) \cup D_f\left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{5}{6}\right) \cup D_f\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right) = D_f\left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{5}{6}\right)$.



Cas des matrices stochastiques strictement positives

Q14 D'après le résultat admis par l'énoncé,

$$1 - a_{i,i} - |\lambda| = |1 - a_{i,i}| - |\lambda| \leqslant ||\lambda| - |1 - a_{i,i}|| \leqslant |\lambda - (1 - a_{i,i})| \leqslant 1 - a_{i,i} - a_{i,p}$$

et donc

$$|\lambda| \geqslant a_{i,p} > 0.$$

Par suite, $\lambda \neq 0$. Ainsi, B' n'admet pas 0 pour valeur propre et donc B' est inversible.

Q15 Puisque 1 est valeur propre de A, la matrice B n'est pas inversible ou encore $\mathrm{rg}(B) < p$. Mais d'après la question précédente, il existe une matrice carrée extraite de B, de format $p - 1$ et inversible. Donc, $\mathrm{rg}(B) \geqslant p - 1$. Finalement, $\mathrm{rg}(B) = p - 1$. Le théorème du rang fournit alors

$$\dim\left(\mathrm{Ker}\left(A - I_p\right)\right) = \dim\left(\mathrm{Ker}(B)\right) = p - \mathrm{rg}(B) = 1.$$

Partie III - Itérées d'une matrice stochastique

Un contre-exemple

Q16 $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Q17 B est une matrice stochastique qui n'est pas strictement positive. D'autre part, $B^2 = I_2$ et donc, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $B^{2p} = I_2$ et $B^{2p+1} = B$. La suite $\left(B^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet deux suites extraites convergentes, de limites différentes et donc la suite $\left(B^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente. La proposition 2 est donc fausse si on enlève l'hypothèse « strictement positive ».

Résultat préliminaire

Q18 Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^k = 0$. Le polynôme X^k est annulateur de N et donc le polynôme minimal de N, qui est un diviseur unitaire de X^k, est de la forme $\mu_N = X^l$. D'près le théorème de Cayley-Hamilton, on sait que $l \leqslant p$ et donc $N^p = N^{p-l} \times N^l = N^{p-l} \times \mu_N(N) = 0$.

Q19 Le résultat est clair quand $k = 0$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé.

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}.$$

(au numérateur, le nombre de facteurs est constant quand n varie).

Puisque $|\lambda| < 1$, $\lambda^n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^{-k}\right)$ d'après un théorème de croissances comparées. Par suite,

$$\binom{n}{k}\lambda^{n-k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}\lambda^{n-k} = \frac{\lambda^{-k}}{k!}\lambda^n n^k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(1\right).$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \binom{n}{k}\lambda^{n-k} = 0$.

Q20 Soit $n \geqslant p$. Puisque les matrices λI_p et N commutent, la formule du binôme de Newton fournit

$$\left(\lambda I_p + N\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\lambda^{n-k}N^k = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k}\lambda^{n-k}N^k.$$

Le nombre de terme de la dernière somme est constant quand n varie et chaque terme tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\lambda I_p + N\right)^n = 0.$$

Convergence d'une suite de matrices

Q21 Il existe une matrice inversible P telle que

$$A = P\text{diag}\left(1, \lambda_1 I_{p_1} + N_1, \ldots, \lambda_r I_{p_r} + N_r\right) P^{-1}.$$

Un calcul par blocs fournit pour tout entier naturel n,

$$A^n = P\text{diag}\left(1, \left(\lambda_1 I_{p_1} + N_1\right)^n, \ldots, \left(\lambda_r I_{p_r} + N_r\right)^n\right) P^{-1}.$$

D'après la question précédente, la suite $\left(\text{diag}\left(1, \left(\lambda_1 I_{p_1} + N_1\right)^n, \ldots, \left(\lambda_r I_{p_r} + N_r\right)^n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice $\Delta = \text{diag}(1, 0, \ldots, 0)$. Par continuité de l'application $M \mapsto PMP^{-1}$, la suite $\left(A^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $P\Delta P^{-1}$.

Partie IV - Probabilité invariante par une matrice stochastique

Q22 • Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, l'application $f_i : X = (x_1 \ \ldots \ x_p) \mapsto x_i$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et en particulier continue sur $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$. Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, l'ensemble $F_i = \{X \in \mathcal{M}_{1,p} / \ x_i \geqslant 0\} = f_i^{-1}([0, +\infty[)$ est un fermé de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque d'un fermé de $\mathbb{R}$ par une application continue.

• L'hyperplan affine $H = \{X \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R}) / \ x_1 + \ldots + x_p = 1\}$ est un hyperplan affine de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et en particulier un fermé de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$.

Mais alors, l'ensemble des vecteurs stochastiques de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ qui est $\left(\bigcap_{i=1}^{p} F_i\right) \cap H$, est un fermé de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ en tant qu'intersection de fermés de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$.

Convergence de la suite

Q23 Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mu_n = \mu_0 A^n$. D'après la question 21, la suite (A^n) converge dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Par continuité de l'application $M \mapsto \mu_0 M$, la suite (μ_n) converge dans $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ vers un certain élément μ_∞ de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$.

Q24 Par hypothèse, $\forall j \in [\![1, p]\!]$, $m_j \geqslant 0$ et $\sum_{j=1}^{p} m_j = 1$. La vecteur μA est

$$\mu A = \left(\sum_{i=1}^{p} m_i a_{i,j}\right)_{1\leqslant j\leqslant p}.$$

Déjà, $\forall j \in [\![1, p]\!]$, $\sum_{i=1}^{p} m_i a_{i,j} \geqslant 0$ puis

$$\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{p} m_i a_{i,j}\right) = \sum_{i=1}^{p} m_i \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\right) = \sum_{i=1}^{p} m_i = 1.$$

Donc, μA est un vecteur stochastique.

Q25 Mais alors, puisque μ_0 est un vecteur stochastique et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu_{n+1} = \mu_n A$, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, μ_n est un vecteur stochastique.

La suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de vecteurs stochastiques convergeant vers le vecteur μ_∞. Puisque l'ensemble des vecteurs stochastiques est un fermé de $\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{R})$, μ_∞ est un vecteur stochastique.

Unicité de la probabilité invariante

Q26 Soit $\mu \in \mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ un vecteur ligne stochastique.

$$\mu A = \mu \Leftrightarrow {}^tA\,{}^t\mu = {}^t\mu \Leftrightarrow {}^t\mu \in \text{Ker}\left({}^tA - I_p\right).$$

De plus, ${}^t\mu$ n'est pas nul et donc, la dernière condition équivaut au fait que ${}^t\mu$ est un vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre 1.

Q27 D'après la question 15, $\text{dimKer}\left(A - I_p\right) = 1$. On sait que $\text{rg}\left({}^tA - I_p\right) = \text{rg}\left({}^t\left(A - I_p\right)\right) = \text{rg}\left(A - I_p\right) = p - 1$. D'après le théorème du rang, $\dim\left(\text{Ker}\left({}^tA - I_p\right)\right) = 1$.

Q28 Soient $\mu_\infty = (m_1 \dots m_p)$ et $\mu'_\infty = (m'_1 \dots m'_p)$ deux probabilités invariantes par A. Alors, ${}^t\mu_\infty$ et ${}^t\mu'_\infty$ sont des vecteurs propres de ${}^tA$ associé à la valeur propre 1. Puisque $\dim\left(\mathrm{Ker}\left({}^tA - I_p\right)\right) = 1$ et que $\mu_\infty \neq 0$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mu'_\infty = \lambda\mu_\infty$. Enfin,

$$1 = \sum_{j=1}^{p} m'_j = \lambda \sum_{j=1}^{p} m_j = \lambda$$

et donc $\mu'_\infty = \mu_\infty$. Ceci montre l'unicité de la probabilité invariante.

Partie V - Informatique : calcul effectif de la probabilité invariante d'une matrice stochastique strictement positive

Q29 Les valeurs renvoyées lorsque l'on exécute `len(A), A[1], A[2][1]` sont respectivement 4 (nombre de lignes), [4,5,6], 8 (attention, les indices commencent à zéro).

Q30 Une fonction `difference`.

```python
def difference(x,y):
    diff=[]
    n=len(x)
    for i in range(n):
        diff.append(x[i]-y[i])
    return diff
```

Q31 Une fonction `norme`.

```python
def norme(x):
    m=abs(x[0])
    p=len(x)
    for i in range(1,p):
        if abs(x[i])>m:
            m=abs(x[i])
    return m
```

Q32 Une fonction `itere`.

```python
def itere(x,A):
    p=len(A)
    sol=[]
    for j in range(p):
        res=0
        for i in range(p):
            res=res+x[i]*A[i][j]
        sol.append(res)
    return sol
```

Q23

Q33 Une fonction `probaInvariante.`

```python
def probaInvariante(A,eps):
    p=len(A)
    u=[1.0/p for i in range(p)]
    v=itere(u,A)
    while norme(difference(u,v))>eps:
        u=list(v)
        v=itere(v,A)
    return v
```

