CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP

MATHEMATIQUES 1

Mardi 2 mai : 14 h - 18 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous indépendants.

EXERCICE 1

On définit deux fonctions :

— la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x, y) = \sin(x^2 - y^2)$,

— la fonction g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par $g(x, y) = (x + y, x - y)$.

Q1. Justifier que les fonctions f et g sont différentiables en tout vecteur $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et écrire la matrice jacobienne de f puis de g en (x, y).

Q2. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, déterminer l'image d'un vecteur $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ par l'application linéaire $d(f \circ g)((x, y))$ en utilisant les deux méthodes suivantes :

1. en calculant $f \circ g$;
2. en utilisant le produit de deux matrices jacobiennes.

EXERCICE 2

On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et on pose $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

Q3. Démontrer que la famille $\displaystyle\left(\frac{1}{p^2\, q^2}\right)_{(p,q)\in A}$ est sommable et calculer sa somme.

Q4. Démontrer que la famille $\displaystyle\left(\frac{1}{p^2 + q^2}\right)_{(p,q)\in A}$ n'est pas sommable.

PROBLÈME
Séries trigonométriques

Il est utile en physique, notamment pour étudier des spectres d'énergie ou pour décomposer un signal périodique en harmoniques, de pouvoir écrire une fonction périodique en somme d'une série de fonctions trigonométriques.

Nous allons nous intéresser à l'aspect mathématique de cette décomposition pour les fonctions de période 2π.

Dans ce qui suit, on appelle "série trigonométrique" une série de fonctions du type :

$$\sum [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \text{ où } (a_n) \text{ et } (b_n) \text{ sont deux suites de réels.}$$

Dans la première partie, on étudie quelques exemples. Dans la deuxième partie, on s'intéresse plus particulièrement aux séries trigonométriques qui convergent normalement sur $\mathbb{R}$.

On notera $C_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Pour une fonction f élément de $C_{2\pi}$, on notera, pour tout entier naturel n :

$$\alpha_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \beta_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x\,.$$

Partie I - Exemples

Q5. Démontrer que la série trigonométrique $\sum \left[\frac{1}{2^n}\cos(nx) + \frac{1}{3^n}\sin(nx)\right]$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Pour tout entier $p \geq 2$, déterminer la somme de la série $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{e^{ix}}{p}\right)^n$ puis en déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{2^n}\cos(nx) + \frac{1}{3^n}\sin(nx)\right]$ (il n'est pas utile de réduire au même dénominateur).

Q6. Écrire la fonction $\varphi : x \mapsto \exp(\cos x)\ \cos(\sin x)$ comme la somme d'une série trigonométrique. On pourra écrire la fonction $x \mapsto \exp(e^{ix})$ comme la somme d'une série de fonctions.

Q7. Donner un exemple de suite (a_n) de limite nulle, telle que la série trigonométrique $\sum a_n\ \cos(nx)$ ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$.

Q8. On admet que la série trigonométrique $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin(nx)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?

Partie II - Propriétés

Une condition suffisante

Q9. Démontrer que si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, alors la série trigonométrique $\sum [a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)]$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Une condition nécessaire

Q10. Soient a et b deux réels quelconques.

Démontrer que le maximun sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto |a\cos x + b\sin x|$ est $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Q11. Démontrer que si la série trigonométrique $\sum [a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)]$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, alors les suites (a_n) et (b_n) convergent vers 0 et les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes.

Autres propriétés

Q12. On note f la somme d'une série trigonométrique $\sum [a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)]$ qui converge normalement sur $\mathbb{R}$. Justifier que $f \in C_{2\pi}$.

Q13. Calculer $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)\mathrm{d}x$ pour $n \neq 0$ et donner la valeur de $\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\cos(nx)\mathrm{d}x$ pour $k \neq n$.

Q14. On note f la somme d'une série trigonométrique $\sum [a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)]$ qui converge normalement sur $\mathbb{R}$: pour tout réel x, $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}[a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)]$. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul $\alpha_n(f) = a_n$ puis exprimer $\alpha_0(f)$ en fonction de a_0. On pourra utiliser sans démonstration que pour $k \neq n$: $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(nx)\mathrm{d}x = 0$.

On admettra, pour la suite du problème, que pour tout entier naturel n non nul $\beta_n(f) = b_n$ et $\beta_0(f) = 0$ (la démonstration n'est pas demandée).

Q15. Soit $f \in C_{2\pi}$. Pour tout réel x, on pose $u_0(x) = \dfrac{\alpha_0(f)}{2}$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $u_n(x) = \alpha_n(f)\cos(nx) + \beta_n(f)\sin(nx)$. On suppose ici que la série trigonométrique $\sum u_n(x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction notée g :

$$\text{pour tout réel } x,\ g(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} [\alpha_k(f)\cos(kx) + \beta_k(f)\sin(kx)].$$

Quelles relations a-t-on dans ce cas entre $\alpha_n(g)$ et $\alpha_n(f)$? $\beta_n(g)$ et $\beta_n(f)$?

Q16. Il est admis que si une fonction $h \in C_{2\pi}$ vérifie, pour tout entier naturel n : $\alpha_n(h) = \beta_n(h) = 0$, alors h est la fonction nulle. Démontrer que pour tout réel x, $g(x) = f(x)$.

En résumé, lorsque la série trigonométrique $\sum [\alpha_n(f)\cos(nx) + \beta_n(f)\sin(nx)]$ d'une fonction $f \in C_{2\pi}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, pour tout réel x, on a :

$$f(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [\alpha_n(f)\cos(nx) + \beta_n(f)\sin(nx)] .$$

Q17. Si $f \in C_{2\pi}$ est une fonction paire, que vaut $\beta_n(f)$? Exprimer, sans démonstration, $\alpha_n(f)$ en fonction de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x$.

Q18. Exemple. Soit $f \in C_{2\pi}$ définie ainsi : pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = x^2$ et f est 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. Construire la courbe de cette fonction paire f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$ puis déterminer, pour tout entier naturel, les coefficients $\alpha_n(f)$ et $\beta_n(f)$. Donner une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f .

Q19. En déduire les sommes : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Déduire alors de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Q20. Application. Justifier que la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, 1[$ puis démontrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}$.

Q21. La somme d'une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ est-elle nécessairement une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$?

Proposer une condition suffisante sur les séries $\sum n a_n$ et $\sum n b_n$ pour que la somme de la série trigonométrique $\sum [a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)]$, qui converge normalement sur $\mathbb{R}$, soit une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Q22. Déterminer la somme de la série trigonométrique $\sum \dfrac{n}{3^n}\cos(nx)$.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 17 1177 – D'après documents fournis