

---

 MATHEMATIQUES 1
 

---

## EXERCICE 1

**Q1** La fonction  $f_1 : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  en tant que polynôme, à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et la fonction  $f_2 : t \mapsto \sin t$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ . Donc, la fonction  $f = f_2 \circ f_1$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  et en particulier,  $f$  est différentiable en tout point de  $\mathbb{R}^2$ .

De même, la fonction  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  car ses composantes le sont et en particulier,  $g$  est différentiable en tout point de  $\mathbb{R}^2$ .

Soit  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} \text{Jac}_{(x_0, y_0)}(f) &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) = \left( 2x_0 \cos(x_0^2 - y_0^2) \quad -2y_0 \cos(x_0^2 - y_0^2) \right) \\ &= 2 \cos(x_0^2 - y_0^2) \begin{pmatrix} x_0 & -y_0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et en posant  $g = (g_1, g_2)$

$$\text{Jac}_{(x_0, y_0)}(g) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Q2** Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f \circ g(x, y) = \sin((x+y)^2 - (x-y)^2) = \sin(4xy)$ .

Posons  $h = f \circ g$ . Soit  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ .

$$dh_{(x_0, y_0)} = \frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y_0) dx + \frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0) dy = 4y_0 \cos(4x_0y_0) dx + 4x_0 \cos(4x_0y_0) dy$$

ou encore

$$\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2, dh_{(x_0, y_0)}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 4 \cos(4x_0y_0) (y_0\mathbf{u} + x_0\mathbf{v}).$$

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2, d(f \circ g)_{(x, y)}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 4 \cos(4xy) (y\mathbf{u} + x\mathbf{v}).$

Retrouvons ce résultat à partir des matrices jacobiennes de  $f$  et  $g$ . Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} \text{Jac}_{(x, y)}(f \circ g) &= \text{Jac}_{g(x, y)}(f) \times \text{Jac}_{(x, y)}(g) \\ &= 2 \cos((x+y)^2 - (x-y)^2) \begin{pmatrix} x+y & -(x-y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cos(4xy) \begin{pmatrix} x+y-x+y & x+y+x-y \end{pmatrix} = 4 \cos(4xy) \begin{pmatrix} y & x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et on retrouve  $\frac{\partial f \circ g}{\partial x}(x, y) = 4y \cos(4xy)$  et  $\frac{\partial f \circ g}{\partial y}(x, y) = 4x \cos(4xy)$ .

## EXERCICE 2

**Q3** Pour  $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ , posons  $u_{p,q} = \frac{1}{p^2 q^2}$ .

- Pour tout  $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ ,  $u_{p,q} \in \mathbb{R}^+$ .
- Pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , la série de terme général  $u_{p,q}$ ,  $q \geq 1$ , converge et

$$\sum_{q=1}^{+\infty} u_{p,q} = \frac{1}{p^2} \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^2} = \frac{\pi^2}{6p^2}.$$

- La série de terme général  $\sum_{q=1}^{+\infty} u_{p,q} = \frac{\pi^2}{6p^2}$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$ , converge et a pour somme  $\frac{\pi^4}{36}$ .

On sait alors que la suite  $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^*}$  est sommable et que  $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{p^2 q^2} = \frac{\pi^4}{36}$ .

**Q4** Pour  $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ , posons  $v_{p,q} = \frac{1}{p^2 + q^2}$ . Pour tout  $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ ,  $v_{p,q} \in \mathbb{R}^+$ .

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . La série de terme général  $\frac{1}{p^2 + q^2}$ ,  $q \geq 1$ , converge et

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2 + q^2} &\geq \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2 + 2pq + q^2} = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{(p+q)^2} = \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \\ &\geq \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=p+1}^{+\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{p+1} \text{ (série télescopique).} \end{aligned}$$

La série de terme général  $\frac{1}{p+1}$ ,  $p \geq 1$ , est divergente. Il en est de même de la série de terme général  $\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2 + q^2}$ ,  $p \geq 1$ .

On en déduit que la suite  $(v_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^*}$  n'est pas sommable.

### PROBLÈME : séries trigonométriques

#### Partie I - Exemples

**Q6** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = \frac{1}{2^n} \cos(nx) + \frac{1}{3^n} \sin(nx)$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} |\cos(nx)| + \frac{1}{3^n} |\sin(nx)| \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \leq 2 \times \frac{1}{2^n},$$

puis  $\|f_n\|_\infty \leq 2 \times \frac{1}{2^n}$ . Puisque la série géométrique de terme général  $2 \times \frac{1}{2^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , converge, la série de fonctions de terme général  $f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , converge normalement sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $p \geq 2$  fixé. Soit  $x \in \mathbb{R}$ .  $\left| \frac{e^{ix}}{p} \right| = \frac{1}{p} < 1$ . Donc, la série géométrique de terme général  $\left( \frac{e^{ix}}{p} \right)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{e^{ix}}{p} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{e^{ix}}{p}} = p \frac{p - e^{-ix}}{|p - e^{ix}|^2} = p \frac{p - \cos x + i \sin x}{(p - \cos x)^2 + \sin^2 x} = p \frac{p - \cos x + i \sin x}{p^2 + 1 - 2p \cos x}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \cos(nx) &= \operatorname{Re} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} e^{inx} \right) = \operatorname{Re} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{e^{ix}}{2} \right)^n \right) \\ &= 2 \frac{2 - \cos x}{5 - 4 \cos x}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \sin(nx) &= \operatorname{Im} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} e^{inx} \right) = \operatorname{Im} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{e^{ix}}{3} \right)^n \right) \\ &= 3 \frac{\sin x}{10 - 6 \cos x}\end{aligned}$$

Finalement,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{2^n} \cos(nx) + \frac{1}{3^n} \sin(nx) \right) = \frac{4 - 2 \cos x}{5 - 4 \cos x} + \frac{3 \sin x}{10 - 6 \cos x}.$$

**Q6** Pour  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \exp(\cos x) \cos(\sin x) = \operatorname{Re} \left( \exp(\cos x) e^{i \sin x} \right) = \operatorname{Re} \left( e^{(e^{ix})} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(e^{ix})^n}{n!} \right) = \operatorname{Re} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n!}.\end{aligned}$$

**Q7** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $a_n = \frac{1}{n+1}$ . La suite  $(a_n)$  est de limite nulle mais la série numérique de terme général  $a_n \cos(n \times 0) = \frac{1}{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , diverge. Donc, la série de fonctions de terme général  $x \mapsto a_n \cos(nx)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ne converge pas simplement sur  $\mathbb{R}$ .

**Q8** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}$ , posons  $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , en posant  $x_n = \frac{\pi}{2n}$ ,

$$\|f_n\|_\infty = \sup \left\{ \frac{|\sin(nx)|}{\sqrt{n}}, x \in \mathbb{R} \right\} \geq \frac{|\sin(x_n)|}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

qui est le terme général d'une série divergente. Donc, la série de fonctions de terme général  $x \mapsto \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , ne converge pas normalement sur  $\mathbb{R}$ .

## Partie II - Propriétés

**Q9** Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$ , posons  $f_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout réel  $x$ ,

$$|f_n(x)| \leq |a_n| |\cos(nx)| + |b_n| |\sin(nx)| \leq |a_n| + |b_n|.$$

Donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\|f_n\|_\infty \leq |a_n| + |b_n|$  qui est, par hypothèse, le terme général d'une série numérique convergente. Donc, la série de fonctions de terme général  $f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , converge normalement (et en particulier, uniformément et simplement) sur  $\mathbb{R}$ .

**Q10** Le résultat est clair si  $a = b = 0$ . Sinon, pour tout  $x$  réel,

$$|a \cos x + b \sin x| = \sqrt{a^2 + b^2} \left| \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right| = \sqrt{a^2 + b^2} |\cos(x - \alpha)|$$

où  $\alpha$  est un réel tel que  $\cos(\alpha) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  et  $\sin(\alpha) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  ( $\alpha$  existe car  $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$ ).

Mais alors, pour tout réel  $x$

$$|a \cos x + b \sin x| = \sqrt{a^2 + b^2} |\cos(x - \alpha)| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

avec égalité effectivement obtenue si  $x = \alpha$ . Donc, le maximum sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $x \mapsto |a \cos x + b \sin x|$  existe et est égal à  $\sqrt{a^2 + b^2}$ .

**Q11** Par hypothèse, la série de fonctions de terme général  $x \mapsto a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , converge normalement sur  $\mathbb{R}$ . D'après la question précédente, on en déduit que la série numérique de terme général  $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , converge. Puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|a_n| = \sqrt{a_n^2} \leq \sqrt{a_n^2 + b_n^2},$$

la série numérique de terme général  $|a_n|$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , converge ou encore la série numérique de terme général  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , converge absolument. De même, puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|b_n| \leq \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ , la série numérique de terme général  $b_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , converge absolument. En particulier, les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  convergent vers 0.

**Q12** Chaque fonction  $f_n : x \mapsto a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , est continue sur  $\mathbb{R}$  et la série de fonctions de terme général  $f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , converge normalement et en particulier uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers la fonction  $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ . Donc la fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

Pour  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x + 2\pi) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos(nx + 2n\pi) + b_n \sin(nx + 2n\pi)) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = f(x)$$

et donc  $f$  est  $2\pi$ -périodique. Finalement,  $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ .

**Q13** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos(2nx)) \, dx = \pi + \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(2nx)}{2n} \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

On note que pour  $n = 0$ ,  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) \, dx = 2\pi$ .

Soient  $k$  et  $n$  deux entiers naturels pas nécessairement distincts (erreur d'énoncé). La fonction  $x \mapsto \sin(kx) \cos(nx)$  est impaire et donc  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(nx) \, dx = 0$ .

**Q14** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Par hypothèse, la série de fonctions de terme général  $x \mapsto f_k(x) \cos(nx) = a_k \cos(kx) \cos(nx) + b_k \sin(kx) \cos(nx)$ , converge normalement sur  $\mathbb{R}$  et donc uniformément sur le segment  $[-\pi, \pi]$ . On peut intégrer terme à terme et on obtient

$$\begin{aligned} \alpha_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \right) \cos(nx) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(nx) \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(nx) \, dx \right) = \frac{1}{\pi} \times \pi a_n \\ &= a_n. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\alpha_0(f) &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \, dx \right) = \frac{1}{\pi} \times 2\pi a_0 \\ &= 2a_0.\end{aligned}$$

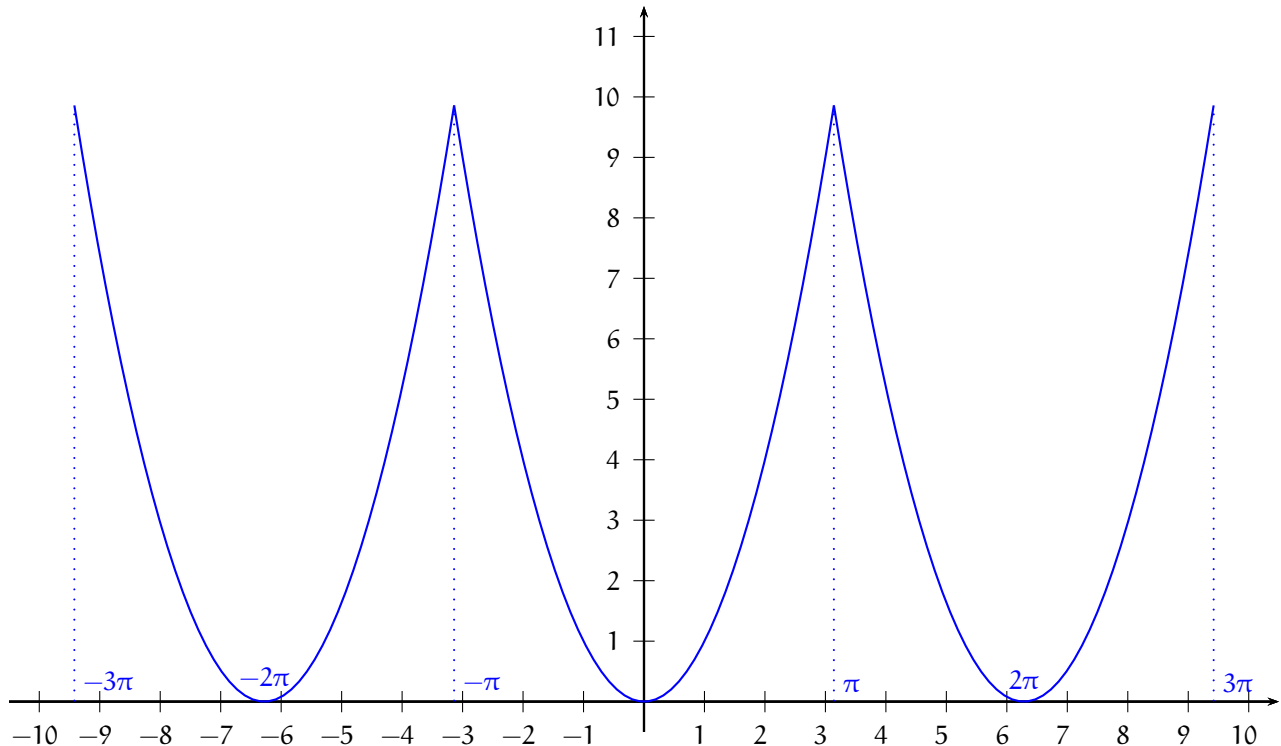
**Q15** Puisque la série de fonctions de terme général  $u_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , converge normalement sur  $\mathbb{R}$  vers la fonction  $g$ , la question précédente, appliquée à la fonction  $g$ , montre immédiatement que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_n(g) = \alpha_n(f)$  et  $\beta_n(g) = \beta_n(f)$ .

**Q16** Le résultat admis ne sert à rien : pour tout réel  $x$ ,

$$f(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n(f) \cos(nx) + \beta_n(f) \sin(nx)) = \frac{\alpha_0(g)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n(g) \cos(nx) + \beta_n(g) \sin(nx)) = g(x).$$

**Q17** Supposons  $f$  paire. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $x \mapsto f(x) \sin(nx)$  est impaire et donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\beta_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \, dx = 0$ . De même, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $x \mapsto f(x) \cos(nx)$  est impaire et donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) \, dx$ .

**Q18** Graphe de  $f$ .



$f$  est dans  $\mathcal{C}_{2\pi}$  et est paire. Donc, pour tout  $x$  réel,

$$f(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n(f) \cos(nx) + \beta_n(f) \sin(nx)) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n(f) \cos(nx).$$

$\alpha_0(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \, dx = \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3}$  puis, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , une double intégration par parties, licite, fournit

$$\begin{aligned}
\alpha_n(f) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos(nx) \, dx = \frac{2}{\pi} \left( \left[ x^2 \frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^\pi - \int_0^\pi 2x \frac{\sin(nx)}{n} \, dx \right) \\
&= \frac{4}{n\pi} \int_0^\pi x(-\sin(nx)) \, dx = \frac{4}{n\pi} \left( \left[ x \frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\cos(nx)}{n} \, dx \right) \\
&= \frac{4}{n\pi} \times \frac{\pi \cos(n\pi)}{n} - 0 = \frac{4(-1)^n}{n^2}.
\end{aligned}$$

Finalement, pour tout réel  $x$ ,

$$f(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n(f) \cos(nx) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

De plus, puisque la série numérique de terme général  $\frac{1}{n^2}$ ,  $n \geq 1$ , converge, la série de fonctions ci-dessus converge normalement sur  $\mathbb{R}$ .

**Q19** Pour  $x = 0$ , on obtient  $0 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$  et donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n^2} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(2p)^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

et donc  $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$  puis

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

On en déduit encore

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}.$$

**Q20** La fonction  $f : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$  est continue sur  $]0, 1[$  et prolongeable par continuité en  $0 \left( \frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 \right)$ . Donc, la fonction  $f$  est intégrable sur  $]0, 1[$  et en particulier sur  $]0, 1[$ .

Pour tout réel  $x$  de  $]0, 1[$ ,

$$f(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{n}.$$

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in ]0, 1[$ , posons  $f_n(x) = \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{n}$  de sorte que  $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ .

- Chaque fonction  $f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , est continue par morceaux sur  $]0, 1[$ .
- La série de fonctions de terme général  $f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , converge simplement sur  $]0, 1[$  vers la fonction  $f$  et de plus, la fonction  $f$  est continue par morceaux sur  $]0, 1[$ .
- Enfin,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 |f_n(x)| \, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{n} \, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

D'après un théorème d'intégration terme à terme et d'après la question précédente,,

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) \, dx &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) \, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{n} \, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \\ &= - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \end{aligned}$$

**Q21** La question 18 fournit un exemple de série trigonométrique qui converge normalement sur  $\mathbb{R}$  vers une fonction  $f$ , continue sur  $\mathbb{R}$  et  $2\pi$ -périodique mais non dérivable sur  $\mathbb{R}$  car non dérivable en les  $(2k+1)\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Donc, la somme d'une série trigonométrique qui converge normalement sur  $\mathbb{R}$  n'est pas nécessairement dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

Supposons de plus que les séries numériques de termes généraux respectifs  $\sum \mathbf{na}_n$  et  $\sum \mathbf{nb}_n$  soient absolument convergentes. En particulier, les séries numériques de termes généraux  $\mathbf{a}_n$  et  $\mathbf{b}_n$  sont absolument convergentes (car pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|\mathbf{a}_n| \leq |\mathbf{na}_n|$  et  $|\mathbf{b}_n| \leq |\mathbf{nb}_n|$ ).

- La série de fonctions de terme général  $f_n : x \mapsto \mathbf{a}_n \cos(nx) + \mathbf{b}_n \sin(nx)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , est convergente normalement et en particulier simplement sur  $\mathbb{R}$  vers la fonction  $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ .
- Chaque fonction  $f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
- La série des dérivées  $f'_n : x \mapsto \mathbf{nb}_n \cos(nx) - \mathbf{na}_n \sin(nx)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , est normalement et en particulier uniformément convergente sur  $\mathbb{R}$  (car les séries numériques de termes généraux respectifs  $\mathbf{nb}_n$  et  $-\mathbf{na}_n$  sont absolument convergentes).

D'après le théorème de dérivation terme à terme,  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ ,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\mathbf{nb}_n \cos(nx) - \mathbf{na}_n \sin(nx)).$$

**Q22** La série numérique de terme général  $\frac{n}{3^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , est absolument convergente. Donc, la fonction  $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{3^n}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ ,

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{3^n} \cos(nx).$$

Donc, pour tout réel  $x$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{3^n} \cos(nx) &= \left( \frac{3 \sin x}{10 - 6 \cos x} \right)' = \frac{3}{2} \left( \frac{\sin x}{5 - 3 \cos x} \right)' = \frac{3}{2} \times \frac{\cos x(5 - 3 \cos x) - \sin x(3 \sin x)}{(5 - 3 \cos x)^2} \\ &= \frac{3}{2} \times \frac{5 \cos x - 3}{(5 - 3 \cos x)^2}. \end{aligned}$$