SESSION 2016

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE MP

MATHEMATIQUES 2

EXERCICE I

I.1. Fonction gcd.

```
def gcd(a, b) :
    """ Données : a et b deux entiers naturels
        Résultat : le PGCD de a et b de la pire des manières"""
    diviseur=1
    m =min(a, b)
    for k in range(2, m + 1) :
        if a %k==0 and b %k==0 :
            diviseur =k
    return diviseur
```

I.2. Fonction euclide_rec.

```
def euclide_rec(a, b) :
    """ Données : a et b deux entiers naturels
        Résultat : le PGCD de a et b par l'algorithme d'Euclide"""
    if b==0 :
        return a
    else :
        return euclide_rec(b,a%b)
```

I.3.

I.3.a) • Etape 1. $u = 8$, $v = 5$ puis $r = 3$, $u = 5$ et $v = 3$.
• Etape 2. $u = 5$ et $v = 3$ puis $r = 2$, $u = 3$ et $v = 2$.
• Etape 3. $u = 3$ et $v = 2$ puis $r = 1$, $u = 2$ et $v = 1$.
• Etape 4. $u = 2$ et $v = 1$ puis $r = 0$, $u = 1$ et $v = 0$. Affichage : 1.

I.3.b) Soit $n \geqslant 2$. $F_{n+2} = 1 \times F_{n+1} + F_n$ avec $0 \leqslant F_n < F_{n+1}$. Donc, le reste de la division euclidienne de F_{n+2} par F_{n+1} est F_n.

L'algorithme se déroule alors ainsi,

• Etape 1. $u = F_{n+2}$, $v = F_{n+1}$ puis $r = F_n$, $u = F_{n+1}$ et $v = F_n$.
• Etape 2. $u = F_{n+1}$ et $v = F_n$ puis $r = F_{n-1}$, $u = F_n$ et $v = F_{n-1}$.

$$\vdots$$

• Etape n. $u = F_3$ et $v = F_2$ puis $r = F_1$, $u = F_2$ et $v = F_1$.
• Etape n+1. $u = F_2$ et $v = F_1$ puis $r = 0$, $u = F_1$ et $v = 0$. Affichage : 1.

Donc, $u_n = n + 1$.

I.3.c) $v_n = 2F_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\dfrac{\phi^n}{\sqrt{5}}$ avec $\phi > 1$ et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ d'après un théorème de croissances comparées.

I.4. Fonction fibo.

```
def fibo(n) :
    a, b = 0, 1
    for i in range(1, n) :
        a,b=b,a+b
    return(a)
```

I.5. Fonction gcd_trois.

```
def gcd_trois(a, b, c) :
    return euclide(euclide(a, b), c)
```

EXERCICE II

II.1. Soit $P = X^3 + X^2 + X = X(X - j)\left(X - j^2\right)$. P est un polynôme annulateur de A. On sait que les valeurs propres de A (dans $\mathbb{C}$) sont à choisir parmi les racines d'un polynôme annulateur. Donc,

$$\boxed{\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \left\{0, j, j^2\right\}.}$$

II.2. Il existe un polynôme non nul, à racines simples dans $\mathbb{C}$ et annulateur de A à savoir P. Donc, A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

II.3. Si A inversible, 0 n'est pas valeur propre de A et donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \left\{j, j^2\right\}$. De plus, A est à coefficients réels et donc j et j^2 ont même ordre de multiplicité. Notons p cet ordre. On a $n = p + p = 2p$ ce qui montre que p n'est pas nul et n est pair. On sait alors que $\det(A)$ est le produit des valeurs propres de A, chaque valeur propre comptée un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité. Donc,

$$\det(A) = j^p\left(j^2\right)^p = \left(j^3\right)^p = 1.$$

PROBLÈME : III

Première partie : questions préliminaires

III.1. III.1.a) Supposons que P et Q ne soient pas premiers entre eux. Alors, $D = \mathrm{PGCD}(P, Q)$ est de gré supérieur ou égal à 1. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, D a au moins une racine z_0 dans $\mathbb{C}$. Puisque D divise P et Q, z_0 est aussi racine de P et de Q. Par suite, P et Q ont une racine commune dans $\mathbb{C}$.

Par contraposition, si P et Q n'ont aucune racine complexe commune, alors P et Q sont premiers entre eux.

III.1.b) Il existe deux polynômes A et B tels que $R = AP = BQ$. Le polynôme Q divise le polynôme $BQ = AP$ et le polynôme Q est premier avec le polynôme P. D'après le théorème de Gauss, le polynôme Q divise le polynôme A. Donc, il existe un polynôme C tel que $A = CQ$ puis $R = AP = CPQ$. Ceci montre que le polynôme PQ divise le polynôme R.

III.2. Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, si $P = P_1 \dots P_n$ où les P_i sont des polynômes non nuls, alors $Q = \dfrac{P'}{P} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{P_i'}{P_i}$ $\quad(\mathscr{P}_n)$.

- $(\mathscr{P})_1$ est vraie.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons $(\mathscr{P}_n)$. Soient $P_1, \dots, P_n, P_{n+1}$ $n+1$ polynômes non nuls puis $P = P_1 \dots P_n P_{n+1}$.

$$\begin{aligned}
\frac{P'}{P} &= \frac{(P_1 \dots P_n)' P_{n+1} + P_1 \dots P_n P_{n+1}'}{P} \\
&= \frac{(P_1 \dots P_n)'}{P_1 \dots P_n} + \frac{P_{n+1}'}{P_{n+1}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i'}{P_i} + \frac{P_{n+1}'}{P_{n+1}} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{P_i'}{P_i}.
\end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

Deuxième partie : interpolation de Hermite

III.3. Définition du polynôme interpolateur de Hermite

III.3.a) Supposons $P(a) = P'(a) = 0$.
• Si P est de degré inférieur ou égal à 1, alors P' est constant puis $P' = P'(a) = 0$. On en déduit que P est contant puis $P = P(a) = 0$. Dans ce cas, $(X - a)^2$ divise P car $0 = 0 \times (X - a)^2$.
• Sinon, $\deg(P) = n \geqslant 2$. La formule de Taylor fournit

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k = \sum_{k=2}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k = (X-a)^2 Q$$

avec $Q = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^{k-2} \in \mathbb{R}[X]$. De nouveau, $(X - a)^2$ divise P.

On a montré que si $P(a) = P'(a) = 0$, alors $(X - a)^2$ divise P.

III.3.b) • φ est une application de $\mathbb{R}_{2p-1}[X]$ sur $\mathbb{R}^{2p}$.

• Soient $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda P, \mu Q) &= \left((\lambda P + \mu Q)(x_1), \dots, (\lambda P + \mu Q)(x_p), (\lambda P + \mu Q)'(x_1), \dots, (\lambda P + \mu Q)'(x_p)\right) \\
&= \lambda\left(P(x_1), \dots, P(x_p), P'(x_1), \dots, P'(x_p)\right) + \mu\left(Q(x_1), \dots, Q(x_p), Q'(x_1), \dots, Q'(x_p)\right) \\
&= \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q).
\end{aligned}$$

Donc, $\varphi \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}_{2p-1}[X], \mathbb{R}^{2p}\right)$.

• Soit $P \in \mathbb{R}_{2p-1}[X]$.

$$\begin{aligned}
P \in \mathrm{Ker}(\varphi) &\Rightarrow P(x_1) = \dots = P(x_p) = P_1'(x_1) = \dots = P_p'(x_p) = 0 \\
&\Rightarrow (X - x_1)^2, \dots, (X - x_p)^2 \text{ divisent } P \text{ (d'après II.3.a)} \\
&\Rightarrow (X - x_1)^2 \times \dots \times (X - x_p)^2 \text{ divise } P
\end{aligned}$$

car les x_i sont deux à distincts et donc les $(X - x_i)^2$ sont deux à deux premiers entre eux d'après III.1.a puis d'après II.1.b et par récurrence.

Donc, si P est dans $\mathrm{Ker}(\varphi)$, alors il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = Q(X - x_1)^2 \dots (X - x_p)^2$. Enfin puisque $\deg(P) \leqslant 2p - 1$, on a $Q = 0$ puis $P = 0$. Ceci montre que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$ et donc que φ est injective.
• Puisque $\dim(\mathbb{R}_{2p-1}[X]) = \dim\left(\mathbb{R}^{2p}\right) = 2p < +\infty$, on en déduit que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{2p-1}[X]$ sur $\mathbb{R}^{2p}$.

III.3.c) Soit $(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{R}^{2p}$. Puisque φ est un isomorphisme, il existe un polynôme P de degré inférieur à $2p - 1$ et un seul tel que $\varphi(P) = (a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p)$ ou encore tel que $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $P(x_i) = a_i$ et $P'(x_i) = b_i$.

III.4. Étude d'un exemple

P_H est de degré au plus 3. On peut poser $P_H = aX^3 + bX^2 + cX + d$.

$$\left\{\begin{array}{l} P_H(-1) = 1 \\ P_H'(-1) = -1 \\ P_H(1) = 0 \\ P_H'(1) = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -a + b - c + d = 1 \quad \text{(I)} \\ 3a - 2b + c = -1 \quad \text{(II)} \\ a + b + c + d = 0 \quad \text{(III)} \\ 3a + 2b + c = 2 \quad \text{(IV)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4b = 3 \quad \text{(IV)} - \text{(II)} \\ 6a + 2c = 1 \quad \text{(IV)} + \text{(II)} \\ 2b + 2d = 1 \quad \text{(III)} + \text{(I)} \\ 2a + 2c = -1 \quad \text{(III)} - \text{(I)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = \dfrac{3}{4} \\ d = -\dfrac{1}{4} \\ a = \dfrac{1}{2} \\ c = -1 \end{array}\right.$$

Donc,

$$\boxed{P_H = \frac{X^3}{2} + \frac{3X^2}{4} - X - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(2X^3 + 3X^2 - 4X - 1\right).}$$

III.5. Une formule explicite

III.5.a) Soit $i \in [\![1, p]\!]$. Soit $k \in [\![1, p]\!]$.

- Si $k \neq i$, x_k est l'un des x_j, $j \neq i$ et donc $Q_i(x_k) = 0$.
- Si $k = i$, $Q_i(x_k) = Q_i(x_i) = \prod_{j \neq i} \left(\dfrac{x_i - x_j}{x_i - x_j}\right)^2 = 1$.

$$\boxed{\forall (i, k) \in [\![1, p]\!]^2,\ Q_i(x_k) = \delta_{i,k}.}$$

- Si $k \neq i$, x_k est racine double de Q_i et donc $Q_i'(x_k) = 0$.
- Si $k = i$, $Q_i'(x_k) = Q_i'(x_i)$. D'après III.2,

$$\frac{Q_i'}{Q_i} = \sum_{j \neq i} \frac{2(X - x_j) / (x_i - x_j)^2}{(X - x_j)^2 / (x_i - x_j)^2} = \sum_{j \neq i} \frac{2}{X - x_j}.$$

En prenant la valeur en x_i et puisque $Q_i(x_i) = 1$, on obtient $Q_i'(x_i) = \sum_{j \neq i} \dfrac{2}{x_i - x_j}$.

$$\boxed{\forall (i, k) \in [\![1, p]\!]^2,\ Q_i'(x_k) = 0 \text{ si } k \neq i \text{ et } Q_i'(x_i) = \sum_{j \neq i} \frac{2}{x_i - x_j}.}$$

III.5.b) Soit $P = \sum_{i=1}^{p} \left[(1 - Q_i'(x_i)(X - x_i)) a_i + (X - x_i) b_i\right] Q_i$. Soit $k \in [\![1, p]\!]$.

$$\begin{aligned} P(x_k) &= \sum_{i=1}^{p} \left[(1 - Q_i'(x_i)(x_k - x_i)) a_i + (x_k - x_i) b_i\right] Q_i(x_k) \\ &= \left[(1 - Q_k'(x_k)(x_k - x_k)) a_k + (x_k - x_k) b_k\right] Q_k(x_k) = a_k. \end{aligned}$$

Ensuite, $P' = \sum_{i=1}^{p} \left[-Q_i'(x_i) a_i + b_i\right] Q_i + \sum_{i=1}^{p} \left[(1 - Q_i'(x_i)(X - x_i)) a_i + (X - x_i) b_i\right] Q_i'$ puis

$$\begin{aligned} P'(x_k) &= \sum_{i=1}^{p} \left[-Q_i'(x_i) a_i + b_i\right] Q_i(x_k) + \sum_{i=1}^{p} \left[(1 - Q_i'(x_i)(x_k - x_i)) a_i + (x_k - x_i) b_i\right] Q_i'(x_k) \\ &= \left[-Q_k'(x_k) a_k + b_k\right] Q_k(x_k) + \left[(1 - Q_k'(x_k)(x_k - x_k)) a_k + (x_k - x_k) b_i\right] Q_k'(x_k) \\ &= -Q_k'(x_k) a_k + b_k + Q_k'(x_k) a_k = b_k. \end{aligned}$$

Donc, $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $P(x_k) = a_k$ et $P'(x_k) = b_k$. Par unicité d'un tel polynôme,

$$\boxed{P_H = \sum_{i=1}^{p} \left[(1 - Q_i'(x_i)(X - x_i)) a_i + (X - x_i) b_i\right] Q_i.}$$

III.5.c) $Q_1 = \left(\dfrac{X - 1}{-1 - 1}\right)^2 = \dfrac{1}{4}(X - 1)^2$ puis

$$(1 - Q_1'(x_1)(X - x_1)) a_1 + (X - x_1) b_1 = 1 + (X + 1) - (X + 1) = 1.$$

$Q_2 = \left(\dfrac{X + 1}{1 + 1}\right)^2 = \dfrac{1}{4}(X + 1)^2$ puis

$$(1 - Q_2'(x_2)(X - x_2)) a_2 + (X - x_2) b_2 = 1 + (X - 1) + (X - 1)\,2 = 2(X - 1).$$

$$\begin{aligned} P_H &= 1 \times \frac{1}{4}(X - 1)^2 + 2(X - 1) \times \frac{1}{4}(X + 1)^2 = \frac{1}{4}\left((X - 1)^2 + 2(X - 1)(X + 1)^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(X^2 - 2X + 1 + 2(X - 1)(X^2 + 2X + 1)\right) = \frac{1}{4}\left(2X^3 + 3X^2 - 4X - 1\right). \end{aligned}$$

On retrouve ainsi le polynôme P_H de la question III.4.

Troisième partie : polynômes de Hermite

III.6. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(H_n) = n$ et $\text{dom}(H_n) = 1$.

- Le résultat est vrai quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $\deg(H_n) = n$ et $\text{dom}(H_n) = 1$. Alors

$$\deg(H_{n+1}) = \deg(XH_n - H_n') = \deg(XH_n) = 1 + \deg(H_n) = n + 1$$

et

$$\text{dom}(H_{n+1}) = \text{dom}(XH_n - H_n') = \text{dom}(XH_n) = \text{dom}(H_n) = 1.$$

Le résultat est démontré par récurrence.

III.7. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $H_{n+1}' = (n+1)H_n$.

- $H_1 = XH_0 - H_0' = X$ puis $H_1' = 1 = (0+1)H_0$. L'égalité est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $H_{n+1}' = (n+1)H_n$. Alors

$$\begin{aligned}
H_{n+2}' &= \left(XH_{n+1} - H_{n+1}'\right)' = (XH_{n+1} - (n+1)H_n)' = H_{n+1} + XH_{n+1}' - (n+1)H_n' \\
&= H_{n+1} + (n+1)(XH_n - H_n') = H_{n+1} + (n+1)H_{n+1} \\
&= (n+2)H_{n+1}.
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ H_{n+1}' = (n+1)H_n.}$$

III.8. Un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$

III.8.a) Soit $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$. La fonction $x \mapsto P(x)Q(x)f(x)$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$, négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$ et en $-\infty$ d'après un théorème de croissances comparées. La fonction $x \mapsto P(x)Q(x)f(x)$ est donc intégrable sur $]-\infty, +\infty[$. On en déduit l'existence de $\langle P, Q \rangle$.

III.8.b) • $\langle\ ,\ \rangle$ est une application de $(\mathbb{R}[X])^2$ dans $\mathbb{R}$.

- Pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, $\langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle$. Donc, $\langle\ ,\ \rangle$ est symétrique.
- $\langle\ ,\ \rangle$ est bilinéaire par bilinéarité du produit de deux polynômes et linéarité de l'intégrale.
- Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\langle P, P \rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P^2(x)e^{-x^2/2}\, dx \geqslant 0$.
- Soitt $P \in \mathbb{R}[X]$.

$$\begin{aligned}
\langle P, P \rangle = 0 &\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} P^2(x)e^{-x^2/2}\, dx = 0 \\
&\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ P^2(x)e^{-x^2/2} = 0 \text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle)} \\
&\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = 0 \Rightarrow P = 0.
\end{aligned}$$

On a montré que

$$\boxed{\langle\ ,\ \rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X].}$$

III.9. Une famille orthogonale

III.9.a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\langle P, H_n \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)H_n(x)e^{-x^2}2\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\left(xH_{n-1}(x) - H_{n-1}'(x)\right)e^{-x^2}2\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\left(-H_{n-1}e^{-x^2/2}\right)'(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Les deux fonctions $x \mapsto P(x)$ et $x \mapsto -H_{n-1}e^{-x^2/2}$ sont de classe C^1 sur le segment $[a, b]$. On peut effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned}\int_a^b P(x)\left(-H_{n-1}e^{-x^2/2}\right)'(x)\,dx &= \left[-P(x)H_{n-1}(x)e^{-x^2/2}\right]_a^b + \int_a^b P'(x)\left(-H_{n-1}(x)e^{-x^2/2}\right)\,dx \\ &= -P(b)H_{n-1}(b)e^{-b^2/2} + P(a)H_{n-1}(a)e^{-a^2/2} + \int_a^b P'(x)\left(-H_{n-1}(x)e^{-x^2/2}\right)\,dx\end{aligned}$$

Quand a tend vers $-\infty$ et b tend vers $+\infty$, $-P(b)H_{n-1}(b)e^{-b^2/2} + P(a)H_{n-1}(a)e^{-a^2/2}$ tend vers 0 d'après un théorème de croissances comparées et on obtient

$$\begin{aligned}\langle P, H_n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)H_n(x)e^{-x^2}2\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} P'(x)H_{n-1}(x)e^{-x^2}2\,dx \\ &= \langle P', H_{n-1}\rangle.\end{aligned}$$

Par récurrence, on en déduit que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\langle P, H_n\rangle = \langle P^{(k)}, H_{n-k}\rangle$ et en particulier que $\langle P, H_n\rangle = \langle P^{(n)}, H_0\rangle$ ce qui reste vrai quand $n = 0$.

$$\boxed{\forall P\mathbb{R}[X],\ \forall n \in \mathbb{N},\ \langle P, H_n\rangle = \langle P^{(n)}, H_0\rangle.}$$

III.9.b) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\deg(H_k) = k$ et on sait alors que la famille $(H_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit $(k, l) \in [\![0, n]\!]^2$ tel que $k < l$. Alors, $H_k^{(l)} = 0$ car $l > k = \deg(H_k)$. D'après la question III.9.a,

$$\langle H_k, H_l\rangle = \langle H_k^{(l)}, H_0\rangle = \langle 0, H_0\rangle = 0.$$

On a montré que

$$\boxed{\text{la famille } (H_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \text{ est une base orthogonale de } (\mathbb{R}_n[X], \langle\ ,\ \rangle).}$$

III.9.c) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\deg(H_n) = n$ et $\mathrm{dom}(H_n) = 1$. Donc, $H_n^{(n)} = n!$ puis

$$\|H_n\|^2 = \langle H_n, H_n\rangle = \langle H_n^{(n)}, H_0\rangle = n!\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = n!.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \|H_n\| = \sqrt{n!}.}$$

III.9.d) $H_0 = 1$. $H_1 = XH_0 - H_0' = X$. $H_2 = XH_1 - H_1' = X^2 - 1$. $H_3 = XH_2 - H_2' = X\left(X^2 - 1\right) - 2X = X^3 - 3X$.

$$\boxed{H_0 = 1,\ H_1 = X,\ H_2 = X^2 - 1 \text{ et } H_3 = X^3 - 3X.}$$

$$\begin{aligned}P &= X^3 + X^2 + X + 1 = \left(X^3 - 3X\right) + X^2 + 4X + 1 = \left(X^3 - 3X\right) + \left(X^2 - 1\right) + 4X + 2 \\ &= H_3 + H_2 + 4H_1 + 2H_0.\end{aligned}$$

Puisque (H_0, H_1, H_2, H_3) est une famille orthogonale, $H_3 + H_2 + 6H_1 \in (H_0)^\perp = (\mathbb{R}_0[X])^\perp$. Par suite,

$$P = \underbrace{2H_0}_{\in\mathbb{R}_0[X]} + \underbrace{H_3 + H_2 + 4H_1}_{\in(H_0)^\perp}.$$

On sait alors que le projeté orthogonal de P sur $(H_0)^\perp$ est $H_3 + H_2 + 4H_1$ puis que

$$\begin{aligned}d^2 &= \|H_3 + H_2 + 6H_1\|^2 \\ &= \|H_3\|^2 + \|H_2\|^2 + 16\|H_1\|^2 \text{ (d'après le théorème de PYTHAGORE)} \\ &= 6 + 2 + 16 = 24\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{d = 2\sqrt{6}.}$$

III.19. Étude des racines du polynôme H_n

III.10.a) Puisque $\deg(S) = p < n = \deg(H_n)$, $\langle S, H_n \rangle = 0$ d'après la question III.9.a.

III.10.b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le polynôme SH_n est unitaire de degré $n + p \geqslant 1$.
Dans tous les cas, les facteurs irréductibles du polynôme SH_n dans $\mathbb{R}[X]$ sont soit du type $(X - a_i)^{2\alpha_i}$, $a_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$, soit du type $\left(X^2 + b_i X + c_i\right)^{\beta_i}$, $(b_i, c_i) \in \mathbb{R}^2$, $\beta_i \in \mathbb{N}^*$. Chacun de ces polynômes est positif sur $\mathbb{R}$ et donc le polynôme SH_n est positif sur $\mathbb{R}$ ce qui reste vrai quand $n = 0$.

III.10.c) On en déduit encore que $\forall x \in \mathbb{R}$, $S(x)H_n(x)f(x) \geqslant 0$. Par suite,

$$\langle S, H_n \rangle = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} S(x)H_n(x)f(x)\ dx = 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ S(x)H_n(x)f(x) = 0$$

(fonction continue positive d'intégrale nulle). Ainsi, sous l'hypothèse $p < n$, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $S(x)H_n(x) = 0$ puis $SH_n = 0$ ce qui n'est pas. Donc $p = n$.

Ceci signifie que H_n a n racines réelles d'ordre impair deux à deux distinctes. Puisque $\deg(H_n) = n$, ces racines sont nécessairement d'ordre 1 et on a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_n \text{ a } n \text{ racines réelles deux à deux distinctes.}}$$

