SESSION 2016

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE MP

MATHEMATIQUES 1

EXERCICE I

I.1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose à priori $R_a > 0$. Sous cette hypothèse, on peut poser

$$\forall x \in]-R_a, R_a[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

f est deux fois dérivable sur $]-R_a, R_a[$ et pour $x \in]-R_a, R_a[$,

$$\begin{aligned}
x^2 f''(x) + \left(x^2 - x\right) f'(x) + 2f(x) &= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \left(x^2 - x\right) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} [n(n-1) - n + 2]\, a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(n^2 - 2n + 2\right) a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)a_{n-1} x^n \\
&= 2a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(n^2 - 2n + 2\right) a_n - (n-1)a_{n-1}\right] x^n.
\end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-R_a, R_a[,\ x^2 f''(x) + \left(x^2 - x\right) f'(x) + 2f(x) = 0 &\Leftrightarrow \forall x \in]-R_a, R_a[,\ 2a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(n^2 - 2n + 2\right) a_n - (n-1)a_{n-1}\right] x^n = 0 \\
&\Leftrightarrow a_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(n^2 - 2n + 2\right) a_n - (n-1)a_{n-1} = 0 \\
&\text{(par unicité des coefficients d'une série entière)} \\
&\Leftrightarrow a_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{n-1}{n^2 - 2n + 2} a_{n-1} \\
&\text{(car } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ n^2 - 2n + 2 = (n-1)^2 + 1 \neq 0) \\
&\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, nécessairement f est nulle sur $]-R_a, R_a[$. On a montré que l'équation (E) n'admet pas de solution non nulle sur un intervalle du type $]-r, r[$, $r > 0$, qui soit développable en série entière sur $]-r, r[$.

EXERCICE II

II.1. Soit $i \in \mathbb{N}$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\dfrac{i+j}{2^{i+j}} \geqslant 0$ et de plus, $\dfrac{i+j}{2^{i+j}} \underset{j\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{j^2}\right)$ d'après un théorème de croissances comparées.

Donc, la série de terme général $\dfrac{i+j}{2^{i+j}}$, $j \in \mathbb{N}$, converge. De plus, en posant $S_i = \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{i+j}{2^{i+j}}$,

$$\begin{aligned}2S_i &= \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{i+j}{2^{i+j-1}} = \frac{i}{2^{i-1}} + \sum_{j=1}^{+\infty}\frac{i+j}{2^{i+j-1}} = \frac{i}{2^{i-1}} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{i+k+1}{2^{i+k}} = \frac{i}{2^{i-1}} + S_i + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{i+k}}\\ &= S_i + \frac{i}{2^{i-1}} + \frac{1}{2^i}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = S_i + \frac{i+1}{2^{i-1}},\end{aligned}$$

et donc $S_i = \dfrac{i+1}{2^{i-1}}$. De nouveau, la série de terme général $S_i = \dfrac{i+1}{2^{i-1}}$ converge et en posant $S = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} S_i$,

$$\begin{aligned}2S &= \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{i+1}{2^{i-2}} = 4 + \sum_{i=1}^{+\infty}\frac{i+1}{2^{i-2}} = 4 + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k+1+1}{2^{k-1}}\\ &= 4 + S + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{k-1}} = 4 + S + 2\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = S + 8,\end{aligned}$$

et donc $S = 8$.

En résumé,

- $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $\dfrac{i+j}{2^{i+j}} \geqslant 0$;
- $\forall i \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{i+j}{2^{i+j}} < +\infty$;
- $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{i+j}{2^{i+j}}\right) < +\infty$.

On en déduit que la suite $\left(\dfrac{i+j}{2^{i+j}}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. De plus

$$\boxed{\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}\frac{i+j}{2^{i+j}} = 8.}$$

II.2.

II.2.a. Pour $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, posons $p_{i,j} = \dfrac{i+j}{2^{i+j+3}} = \dfrac{1}{8}\dfrac{i+j}{2^{i+j}}$. D'après la question précédente, la famille $(p_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et de plus, $\displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} p_{i,j} = 1$. Donc, les relations de l'énoncé définissent bien une loi de couple.

II.2.b. Soit $i \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}P(X=i) &= \sum_{j=0}^{+\infty} P\left[(X=i)\cap(Y=j)\right] = \frac{1}{8}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{i+j}{2^{i+j}}\\ &= \frac{1}{8}\frac{i+1}{2^{i-1}} \text{ (d'après la question précédente)}\\ &= \frac{i+1}{2^{i+2}}.\end{aligned}$$

Par symétrie des rôles, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $P(Y=j) = \dfrac{j+1}{2^{j+2}}$.

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N},\ P(X=i) = \frac{i+1}{2^{i+2}} \text{ et } \forall i \in \mathbb{N},\ P(Y=j) = \frac{j+1}{2^{j+2}}.}$$

II.2.c. $P[(X=0)\cap(Y=0)] = \dfrac{0+0}{2^3} = 0$ et $P(X=0)\times P(Y=0) = \dfrac{1}{2^2}\times\dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{16}$. Ainsi, $P[(X=0)\cap(Y=0)] \neq P(X=0)\times P(Y=0)$ et donc

$$\boxed{\text{les variables } X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

PROBLÈME : fonction Digamma

Partie préliminaire

III.1. **III.1.a)** • Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est continue est positive sur $]0, +\infty[$.

Etude au voisinage de 0. $e^{-t}t^{x-1} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{x-1}}$ avec $x - 1 > -1$. Donc, la fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur un voisinage de 0 à droite.

Etude au voisinage de $+\infty$. $t^2e^{-t}t^{x-1} \underset{t\to+}{=} o(1)$ d'après un théorème de croissances comparées et donc $e^{-t}t^{x-1} \underset{t\to+}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Donc, la fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.

Finalement,

$$\boxed{\text{pour tout } x > 0, \text{ la fonction } t \mapsto e^{-t}t^{x-1} \text{ est intégrable sur }]0, +\infty[.}$$

III.1.b) Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est continue positive et non nulle sur $]0, +\infty[$. Donc, $\Gamma(x) > 0$.

$$\boxed{\text{La fonction } \Gamma \text{ est définie et strictement positive sur }]0, +\infty[.}$$

III.1.c) Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Posons $f : \begin{array}{ccc} [a, b]\times]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto & e^{-t}t^{x-1} \end{array}$ de sorte que pour tout $x \in [a, b]$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x, t)\, dt$.

• Pour chaque x de $[a, b]$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$.

• Φ admet sur $[a, b]\times]0, +\infty[$ une dérivée par rapport à sa première variable x définie par

$$\forall (x, t) \in [a, b]\times]0, +\infty[,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = e^{-t}t^{x-1} \ln t.$$

De plus,

- pour tout $x \in [a, b]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$;
- pour tout $t \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $[a, b]$;
- pour tout $(x, t) \in [a, b]\times]0, +\infty[$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| = e^{-t}t^{x-1}|\ln t| \leqslant \begin{cases} e^{-t}t^{a-1}|\ln t| \text{ si } 0 < t < 1 \\ e^{-t}t^{b-1}|\ln t| \text{ si } t > 1 \end{cases} = \varphi(t)$.

La fonction φ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

En 0, $t^{-\frac{a}{2}+1}\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} |t^{\frac{a}{2}} \ln t| \underset{t\to 0}{\to} 0$ d'après un théorème de croissances comparées et donc $\varphi(t) \underset{t\to 0}{=} o\left(t^{\frac{a}{2}-1}\right)$ avec $\dfrac{a}{2} - 1 > -1$. On en déduit que la fonction φ est intégrable sur un voisinage de 0 à droite.

En $+\infty$, $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ d'après un théorème de croissances comparées et donc φ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.

Finalement, la fonction φ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de Leibniz), la fonction Γ est dérivable sur $[a, b]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tous réels a et b tels que $0 < a < b$,

$$\boxed{\text{La fonction } \Gamma \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[\text{ et } \forall x > 0,\ \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1} \ln t\, dt.}$$

III.2.

III.2.a) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est continue par morceaux et décroissante sur $[1, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. On sait alors que la série de terme général u_n, $n \geqslant 2$, converge (comparaison série-intégrale).

III.2.b) Soit $n \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k = \int_1^n \frac{1}{t}\,dt - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = -H_n - 1$ et donc

$$H_n = -1 - \sum_{k=2}^{n} u_k.$$

D'autre part, $H_1 = 1$. Puisque la série de terme général u_n, $n \geqslant 2$, converge, la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

Expression de la fonction Digamma à l'aide d'une série

III.3. **III.3.a)** La fonction $f : x \mapsto \ln(1-x)$ est deux fois dérivable sur $]-\infty, 1[$, de dérivée seconde $f'' : x \mapsto -\dfrac{1}{(1-x)^2}$. f'' est négative sur $]-\infty, 1[$ et donc f est concave sur $]-\infty[$. On en déduit que son graphe est au-dessous de sa tangente en 0 sur $]-\infty, 1[$ ce qui fournit

$$\boxed{\forall x < 1,\ \ln(1-x) \leqslant -x.}$$

Soit $n \geqslant 1$, $x \in]0, +\infty[$ et $t \in]0, +\infty[$.

• Si $t \in]0, n[$, alors $\dfrac{t}{n} \in]0, 1[\subset]-\infty, 1[$ et donc

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)} \leqslant e^{n\left(-\frac{t}{n}\right)} = e^{-t},$$

puis $0 \leqslant f_n(t) \leqslant e^{-t}t^{x-1}$ car $t^{x-1} \geqslant 0$.

• Si $t \in [n, +\infty[$, alors $f_n(t) = 0$ et donc $0 \leqslant f_n(t) \leqslant e^{-t}t^{x-1}$.

On a montré que

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \forall t > 0,\ \forall x > 0,\ 0 \leqslant f_n(t) \leqslant e^{-t}t^{x-1}.}$$

III.3.b) Soit $x > 0$.

• Soit $t > 0$. Pour $n > t$, $f_n(t) = \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n t^{x-1} = e^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)}$ puis

$$f_n(t) \underset{n\to+\infty}{=} e^{n\ln\left(-\frac{t}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} t^{x-1} = e^{-t+o(1)}t^{x-1}.$$

Ceci montre que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = e^{-t}t^{x-1}$. Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction $f : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ et f est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

• Pour tout $n \geqslant 1$ et tout $t \in]0, +\infty[$, $0 \leqslant f_n(t) \leqslant f(t)$. De plus, d'après la question III.1.a, la fonction f est intégrable sur $]0, +\infty[$.

D'après le théorème de convergence dominée, la suite $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ ou encore

$$\boxed{\forall x > 0,\ \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{n}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt.}$$

III.4.

III.4.a) Soit $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. La fonction $u \mapsto (1-u)^n u^{x-1}$ est continue et positive sur $]0, 1]$, équivalente en 0 à u^{x-1} avec $x - 1 > -1$. Donc, la fonction $u \mapsto (1-u)^n u^{x-1}$ est intégrable sur $]0, 1]$. On en déduit l'existence de $I_n(x)$.

Soient $x > 0$ et $n \geqslant 1$. Les fonctions $u \mapsto (1-u)^n$ et $u \mapsto \dfrac{u^x}{x}$ sont de classe C^1 sur $]0, 1]$. Au vu de la convergence des différentes intégrales, on peut effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned}
I_n(x) &= \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\,du = \left[(1-u)^n \frac{u^x}{x}\right]_0^1 - \int_0^1 \left(-n(1-u)^{n-1}\right)\frac{u^x}{x}\,du \\
&= 0 - 0 + \frac{n}{x}\int_0^1 (1-u)^{n-1}u^x\,du \text{ (car } n \geqslant 1 \text{ et } x > 0) \\
&= \frac{n}{x} I_{n-1}(x+1).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n(x) = \frac{n}{x} I_{n-1}(x+1).}$$

III.4.b) Soient $x > 0$ et $n \geqslant 1$.

$$I_n(x) = \frac{n}{x} \times \frac{n-1}{x+1} \times \ldots \times \frac{1}{x+n-1} \times I_0(x+n) = \frac{n!}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(x+k)} \int_0^1 u^{x+n-1}\ du = \frac{n!}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x+k)},$$

ce qui reste vrai quand $n = 0$. Donc,

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ I_n(x) = \frac{n!}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x+k)}.}$$

III.4.c) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$. En posant $u = \dfrac{t}{n}$ et donc $t = nu$ puis $dt = n\ du$, on obtient

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\ dt = \int_0^1 (1-u)^n (nu)^{x-1}\ n\ du = n^x I_n(x) = \frac{n!n^x}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x+k)}.$$

D'après la question III.3.b,

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x+k)}.}$$

III.5. Soient $x > 0$ et $n \geqslant 1$.

$$\begin{aligned}\frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x+k)}{n!n^x} &= \frac{x\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(x+k)}{n^x\displaystyle\prod_{k=1}^{n}k} = xe^{-x\ln n}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right) = xe^{x\left(H_n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)\\ &= xe^{xH_n}\prod_{k=1}^{n}\left(\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right),\end{aligned}$$

et donc, quand n tend vers $+\infty$,

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ \frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right].}$$

III.6.

III.6.a. Soit $x > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\ln\left(1+\frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k}\right] = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right]\right)$$

Quand n tend vers $+\infty$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[\ln\left(1+\frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k}\right]$ tend vers $\ln\left(\dfrac{1}{\Gamma(x)xe^{\gamma x}}\right) = -\ln(\Gamma(x)) - \ln x - \gamma x$. Ceci montre que la la série de fonction de terme général $g_n\ :\ x \mapsto \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right) - \dfrac{x}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $g\ :\ x \mapsto -\ln(\Gamma(x)) - \ln x - \gamma x$.

III.6.b. Puisque Γ est de classe C^1 et strictement positive sur $]0,+\infty[$, la fonction g est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall x > 0,\ g'(x) = -\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \frac{1}{x} - \gamma \quad \text{(I)}.$$

D'autre part, chaque fonction g_n est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$,

$$g_n'(x) = \frac{1/n}{1 + (x/n)} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n + x} - \frac{1}{n} = -\frac{x}{n(n + x)}.$$

Soit $A > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, A]$, $|g_n(x)| = \dfrac{x}{n(n + x)} \leqslant \dfrac{A}{n^2}$ où $\dfrac{A}{n^2}$ est le terme général d'une série numérique convergente. La série de fonctions de terme général g_n' converge normalement et donc uniformément sur $]0, A]$. D'après le théorème de dérivation terme à terme, la dérivée de g s'obtient sur $]0, A]$ par dérivation terme à terme. Ceci étant vrai pour tout réel $A > 0$,

$$\forall x > 0,\ g'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k + x} - \frac{1}{k}\right) \quad \text{(II)}.$$

III.6.c. Les égalités (I) et (II) fournissent pour $x > 0$: $-\Psi(x) - \dfrac{1}{x} - \gamma = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k + x} - \frac{1}{k}\right)$ et donc

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[,\ \Psi(x) = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k + x}\right).}$$

III.7.

III.7.a. $\Psi(1) = \dfrac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t \, dt$ d'après la question III.1.c et car $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} \, dt = 1$. D'autre part,

$$\begin{aligned}
\Psi(1) &= -1 - \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k + 1}\right) = -1 - \gamma + \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k + 1}\right) \\
&= -1 - \gamma + \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n + 1}\right) \text{ (somme télescopique)} \\
&= -\gamma.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Psi(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t \, dt = -\gamma.}$$

III.7.b. Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}
\Psi(x + 1) - \Psi(x) &= -\left(\frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x}\right) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{k + x + 1} + \frac{1}{k + x}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{k + x} - \frac{1}{k + 1 + x}\right) \\
&= \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k + x} - \frac{1}{k + 1 + x}\right)\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x + n}\right) \\
&= \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[,\ \Psi(x + 1) - \Psi(x) = \frac{1}{x}.}$$

On en déduit encore que pour $n \geqslant 2$, $\Psi(n) = \Psi(1) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} (\Psi(k + 1) - \Psi(k)) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$.

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \Psi(n) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.}$$

III.7.c. Soit $x > 0$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour $y > 0$,

$$|j_k(y)| = \left|\frac{x}{(k+y+1)(k+y+x)}\right| = \frac{x}{(k+y+1)(k+y+x)} \leqslant \frac{x}{(k+1)(k+x)}.$$

Puisque $\dfrac{x}{(k+1)(k+x)} \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{k^2}$, la série numérique de terme général $\dfrac{x}{(k+1)(k+x)}$ est convergente. On en déduit que la série de fontions de terme général j_k, $k \in \mathbb{N}^*$, est normalement convergente sur $]0,+\infty[$ et en particulier uniformément convergente sur $]0,+\infty[$.

Soient $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question III.6.c,

$$\begin{aligned}\Psi(x+n) - \Psi(1+n) = \Psi(x) &= \left(-\frac{1}{x+n} - \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x+n}\right)\right) - \left(-\frac{1}{n} - \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+n}\right)\right)\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{k+n} - \frac{1}{k+x+n}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{k+n} - \frac{1}{k+n+1} + \frac{1}{k+n+1} - \frac{1}{k+n+x}\right)\\
&= \frac{1}{n} + \sum_{k=0}^{+\infty} j_k(n) \text{ (série télescopique).}\end{aligned}$$

La série de fonctions de terme général j_k converge uniformément sur $]0,+\infty[$ et chaque fonction j_k a une limite réelle quand y tend vers $+\infty$ à savoir $\ell_k = 0$. D'après le théorème d'interversion des limites, la fonction $\sum_{k=0}^{+\infty} j_k$ a une limite réelle en $+\infty$ et

$$\lim_{y\to+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} j_k(y) = \sum_{k=0}^{+\infty}\ell_k = 0.$$

On en déduit encore que

$$\lim_{n\to+\infty}(\Psi(x+n) - \Psi(1+n)) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n} + \sum_{k=0}^{+\infty} j_k(n)\right) = 0.$$

$$\boxed{\forall x > 0,\ \lim_{n\to+\infty}(\Psi(x+n) - \Psi(1+n)) = 0.}$$

III.8. La fonction Ψ vérifie les trois conditions de l'énoncé. Soit f une fonction Ψ vérifiant les trois conditions de l'énoncé puis $g = f - \Psi$. La fonction g vérifie

- $g(1) = 0$ (A),
- $\forall x \in]0,+\infty[$, $g(x+1) = g(x)$ (B),
- $\forall x \in]0,+\infty[$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(g(x+n) - g(1+n)) = 0$ (C).

La condition (B) signifie que g est 1-périodique. Soit $x \in]0,1]$. Par 1-périodicité, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g(x) - g(1) = g(x+n) - g(1+n)$. Quand n tend vers $+\infty$, la condition (C) fournit $g(x) = g(1)$. Donc, g est nulle sur $]0,1]$ puis sur $]0,+\infty[$ par 1-périodicité.

Ceci montre que la fonction Ψ est l'unique fonction définie sur $]0,+\infty[$ vérifiant les trois conditions de l'énoncé.

Autour de la fonction Digamma

III.9.

III.9.a. $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$. $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $P(X = k) = \dfrac{1}{n}$ (X suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$). On sait alors que $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$.

III.9.b. $Y(\Omega) = [\![1,n]\!]$. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
P(Y=k) &= \sum_{j=1}^{n} P\left((X=j)\cap(Y=k)\right) = \sum_{j=1}^{n} P(X=j)\times P_{X=j}(Y=k) = \frac{1}{n}\left(\frac{k+1}{n+k}+\sum_{j\neq k}\frac{1}{n+j}\right)\\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{k+1}{n+k}-\frac{1}{n+k}+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n+j}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{k}{n+k}+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n+j}\right)\\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{k}{n+k}+\sum_{j=1}^{2n}\frac{1}{j}-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\right)\\
&= \frac{1}{n}\left(\Psi(2n+1)-\Psi(n+1)+\frac{k}{n+k}\right) \text{ (d'après la question III.7.b).}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k\in [\![1,n]\!],\ P(Y=k)=\frac{1}{n}\left(\Psi(2n+1)-\Psi(n+1)+\frac{k}{n+k}\right).}$$

III.9.c.

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{k=1}^{n} kP(Y=k) = \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{n}\left(\Psi(2n+1)-\Psi(n+1)+\frac{k}{n+k}\right)\right)\\
&= \frac{\Psi(2n+1)-\Psi(n+1)}{n}\times\frac{n(n+1)}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n(n+k)}\\
&= \frac{(n+1)(\Psi(2n+1)-\Psi(n+1))}{2}+1-n+n(\Psi(2n+1)-\Psi(n+1))\\
&= \frac{(3n+1)(\Psi(2n+1)-\Psi(n+1))}{2}+1-n.
\end{aligned}$$

$$\boxed{E(Y)=\frac{(3n+1)(\Psi(2n+1)-\Psi(n+1))}{2}+1-n.}$$

