SESSION 2015

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE MP

MATHEMATIQUES 1

EXERCICE I

I.1. Soit $\lambda > 0$. Notons G_X la fonction génératrice de X. Pour tout entier naturel k, $P(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

Pour tout réel x, la série de terme général $P(X = k)x^k = e^{-\lambda}\dfrac{(\lambda x)^k}{k!}$ converge et

$$\begin{aligned} G_X(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)x^k = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda x)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda}e^{\lambda x} = e^{\lambda(x-1)}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ G_X(x) = e^{\lambda(x-1)}.}$$

On sait alors G_X est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kP(X = k)x^{k-1} = G'_X(x) = \lambda e^{\lambda(x-1)}.$$

puis

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X = k) = G'_X(1) = \lambda.$$

Pour tout réel x, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} kP(X = k)x^k = xG'_X(x) = \lambda x e^{\lambda(x-1)}$ puis en redérivant

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2P(X = k)x^{k-1} = \lambda(\lambda x + 1)e^{\lambda(x-1)}$$

Pour $x = 1$, on obtient

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2P(X = k) = \lambda(\lambda + 1),$$

puis

$$V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = \lambda(\lambda + 1) - \lambda^2 = \lambda.$$

$$\boxed{E(X) = \lambda \text{ et } V(X) = \lambda.}$$

EXERCICE II

II.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est continue sur $[0, +\infty[$ et est négligeable en $+\infty$ devant $\dfrac{1}{x^2}$ d'après un théorème de croissances comparées (et car $n > 0$). On en déduit que la fonction f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$ et en particulier sur $]0, +\infty[$. De plus,

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx = \left[-\frac{e^{-nx}}{n} + \frac{e^{-2nx}}{n}\right]_0^{+\infty} = 0 - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) = 0.$$

On en déduit que

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx\right) = 0.}$$

II.2. Soit $x > 0$. Alors $e^{-x} \in]-1, 1[$ et $e^{-2x} \in]-1, 1[$. On en déduit que les séries géométriques de termes généraux respectifs $e^{-nx} = \left(e^{-x}\right)^n$ et $e^{-2nx} = \left(e^{-2x}\right)^n$ convergent.
Par suite, la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers une fonction que l'on note S. Pour tout réel $x > 0$,

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(e^{-x}\right)^n - 2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(e^{-2x}\right)^n = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} - \frac{2e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = \frac{e^{x} \times e^{-x}}{e^{x}\left(1-e^{-x}\right)} - \frac{2e^{2x} \times e^{-2x}}{e^{2x}\left(1-e^{-2x}\right)} \\ &= \frac{1}{e^x - 1} - \frac{2}{e^{2x}-1} = \frac{e^x+1}{(e^x-1)(e^x+1)} - \frac{2}{(e^x-1)(e^x+1)} = \frac{e^x-1}{(e^x-1)(e^x+1)} = \frac{1}{e^x+1}. \end{aligned}$$

La fonction S est continue sur $]0, +\infty[$, se prolonge par continuité en 0 et est négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées. Donc la fonction S est intégrable sur $]0, +\infty[$. De plus,

$$\int_0^{+\infty} S(x)\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\, dx = \left[-\ln\left(1+e^{-x}\right)\right]_0^{+\infty} = \ln 2.$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right) dx = \ln 2.}$$

II.3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\, dx$ existe et est élément de $[0, +\infty]$. Si par l'absurde $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\, dx < +\infty$, alors

- chaque fonction f_n est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$,
- la série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers une fonction S qui est continue sur $]0, +\infty[$,
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\, dx < +\infty$.

D'après un théorème d'intégration terme à terme, on doit avoir $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx\right)$, ce qui n'est pas d'après les deux questions précédentes. Donc,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\, dx = +\infty.}$$

Problème

Partie 1. Exemples et contre-exemples

III.1. Supposons par l'absurde qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers la fonction f sur $]0,1]$. Alors,

- la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $]0,1]$,
- chaque fonction P_n a une limite réelle en 0 à droite à savoir $\ell_n = P_n(0)$.

D'après le théorème d'interversion des limites, la fonction f doit avoir une limite réelle en 0 à droite ce qui n'est pas. Donc, il n'existe pas de suites de polynômes convergeant uniformément vers f sur $]0,1]$.

Ainsi, le théorème de Weierstrass donné sur un segment $[a,b]$ ne peut être généralisé à un intervalle quelconque.

III.2. On sait qu'un sous-espace de dimension finie d'un espace vectoriel normé est un fermé de cet espace. Puisque $\mathscr{P}_N$ est un sous-espace de dimension finie de $C^0([a,b],\mathbb{R})$, $\mathscr{P}_N$ est un fermé de $\left(C^0([a,b],\mathbb{R}), \|\ \|_\infty\right)$.

Soit $N \in \mathbb{N}$. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{P}_N$ convergeant uniformément sur $[a,b]$ vers une certaine fonction f. Alors, la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{P}_N$ convergeant vers f dans l'espace vectoriel normé $\left(C^0([a,b],\mathbb{R}), \|\ \|_\infty\right)$. Puisque $\mathscr{P}_n$ est un fermé de cet espace, on en déduit que $f \in \mathscr{P}_N$ ou encore on en déduit plus explicitement que f est un polynôme.

III.3.

III.3.a. • Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. P est continue sur le segment $[-2,-1]$. En particulier, p est bornée sur ce segment. On en déduit que $N_1(P)$ existe dans $\mathbb{R}$. Ainsi, N_1 est une application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$.

• Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. $N_1(P) = \sup_{x\in[-2,-1]} |P(x)| \geqslant 0$.

• Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

$$\begin{aligned} N_1(P) = 0 &\Rightarrow \sup_{x\in[-2,-1]} |P(x)| = 0 \Rightarrow \forall x \in [-2,-1],\ |P(x)| \leqslant 0 \\ &\Rightarrow \forall x \in [-2,-1],\ P(x) = 0 \\ &\Rightarrow P = 0 \text{ (polynôme ayant une infinité de racines)} \end{aligned}$$

• Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. Pour tout réel $x \in [-2,-1]$, $|\lambda P(x)| = |\lambda| \times |P(x)|$ et donc $N_1(\lambda P) = |\lambda| N_1(P)$.

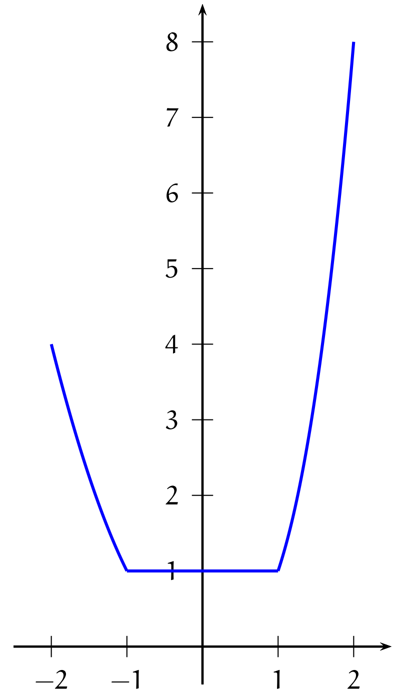
• Soient P et Q deux polynômes. Pour tout réel x de $[-2,-1]$,

$$|(P+Q)(x)| \leqslant |P(x)| + |Q(x)| \leqslant N_1(P) + N_1(Q).$$

Ainsi, $N_1(P)+N_1(Q)$ est un majorant de $\{|(P+Q)(x)|,\ x \in [-2,-1]\}$. Puisque $N_1(P+Q)$ est le plus petit de ces majorants, $N_1(P+Q) \leqslant N_1(P) + N_1(Q)$.

On a montré que N_1 est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

III.3.b. **Graphe de** f.



f est continue sur le segment $[-2, 2]$ et donc f est limite uniforme sur ce segment d'une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'après le théorème d'approximation de WEIERSTRASS. Pour tout réel x de $[-2, -1]$

$$\left|P_n(x) - x^2\right| = |P_n(x) - f(x)| \leqslant \sup_{x\in[-2,-1]}\{|P_n(x) - f(x)|\} \leqslant \sup_{x\in[-2,-2]}\{|P_n(x) - f(x)|\},$$

et donc $0 \leqslant N_1\left(P_N - X^2\right) \leqslant \sup_{x\in[-2,-2]}\{|P_n(x) - f(x)|\}$. Puisque la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[-2, 2]$, $\sup_{x\in[-2,-2]}\{|P_n(x) - f(x)|\}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et il en est de même de $N_1\left(P_N - X^2\right)$. Ceci montre que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers X^2 pour la norme N_1.

De même, pour tout réel x de $[1, 2]$

$$\left|P_n(x) - x^3\right| = |P_n(x) - f(x)| \leqslant \sup_{x\in[-2,-2]}\{|P_n(x) - f(x)|\},$$

et donc $0 \leqslant N_2\left(P_N - X^3\right) \leqslant \sup_{x\in[-2,-2]}\{|P_n(x) - f(x)|\}$ et $N_2\left(P_N - X^3\right)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ceci montre que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers X^3 pour la norme N_2.

Partie 2. Application : un théorème des moments

III.4.

III.4.a. Soit P un polynôme. P est une combinaison linéaire des X^k, $k \in \mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégrale, on obtient $\int_a^b P(x)f(x)\,dx = 0$.

III.4.b. D'après le théorème d'approximation de WEIERSTRASS, il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers f sur $[a, b]$. La fonction f est continue sur le segment $[a, b]$ et en particulier est bornée sur ce segment. On en déduit que la suite de fonctions $(P_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f \times f = f^2$ sur ce segment.

Puisque chaque fonction $P_n f$ est continue sur le segment $[a, b]$ et que la suite de fonctions $(P_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f^2 sur ce segment, on sait que

$$\begin{aligned}\int_a^b f^2(x)\,dx &= \int_a^b \lim_{n\to+\infty} P_n(x)f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b P_n(x)f(x)\,dx \\ &= \lim_{n\to+\infty} 0 = 0 \text{ (d'après a)).}\end{aligned}$$

Ainsi, $\int_a^b f^2(x)\,dx = 0$ et donc $f^2 = 0$ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle) puis $f = 0$.

III.5. D'après ce qui précède, $F^\perp = \{0\}$. En particulier, $F + F^\perp = F = \mathbb{R}[X] \underset{\neq}{\subset} E$.

III.6.

III.6.a. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f_n : x \mapsto x^n e^{-(1-i)x}$ est continue sur $[0, +\infty[$. De plus, quand x tend vers $+\infty$,

$$\left|x^n e^{-(1-i)x}\right| = x^n e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right) \text{ d'après un théorème de croissances comparées.}$$

Donc f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$ ou encore I_n existe.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et A un réel positif. Les deux fonctions $x \mapsto x^{n+1}$ et $x \mapsto \dfrac{e^{-(1-i)x}}{-(1-i)}$ sont de classe C^1 sur le segment $[0, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned}\int_0^A x^{n+1}e^{-(1-i)x}\ dx &= \left[x^{n+1}\frac{e^{-(1-i)x}}{-(1-i)}\right]_0^A - \int_0^A (n+1)x^n\frac{e^{-(1-i)x}}{-(1-i)}\ dx \\ &= A^{n+1}\frac{e^{-(1-i)A}}{-1+i} + \frac{n+1}{1-i}\int_0^A x^n e^{-(1-i)x}\ dx.\end{aligned}$$

Ensuite, $\left|A^{n+1}\dfrac{e^{-(1-i)A}}{-1+i}\right| = \dfrac{A^{n+1}e^{-A}}{\sqrt{2}}$. Cette expression tend vers 0 quand A tend vers $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées et donc $\lim\limits_{A\to+\infty} A^{n+1}\dfrac{e^{-(1-i)A}}{-1+i} = 0$. Quand A tend vers $+\infty$, on obtient donc $I_{n+1} = \dfrac{n+1}{1-i}I_n$.

D'autre part, $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(1-i)x}\ dx = \frac{1}{1-i}\lim_{A\to+\infty}\left(1 - e^{-(1-i)A}\right) = \frac{1}{1-i}$ (car $\left|e^{-(1-i)A}\right| = e^{-A}$). En résumé, $I_0 = \dfrac{1}{1-i}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = \dfrac{n+1}{1-i}I_n$. Par suite, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n = I_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{I_{k+1}}{I_k} = \frac{1}{1-i}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{1-i} = \frac{n!}{(1-i)^{n+1}}$$

ce qui reste vrai pour $n = 0$.

III.6.b. Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$I_{4k+3} = \frac{(4k+3)!}{(1-i)^{4k+4}} = \frac{(4k+3)!}{\left(\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)^{4k+4}} = \frac{(-1)^{k+1}(4k+4)!}{2^{2k+2}}.$$

En particulier, I_{4k+3} est un réel et donc sa partie imaginaire est nulle. Or,

$$\mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} x^{4k+3}e^{-(1-i)x}\ dx\right) = \int_0^{+\infty} x^{4k+3}e^{-x}\left(\mathrm{Im}e^{ix}\right)\ dx = \int_0^{+\infty} x^{4k}e^{-x}x^3\sin x\ dx$$

et on a donc montré que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{4k}e^{-x}x^3\sin x\ dx = 0$.

III.6.c. L'application $\varphi : u \mapsto u^{1/4}$ est une bijection de $]0, +\infty[$ sur lui-même, strictement croissante et de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. En posant $u = x^4$ et donc $x = u^{1/4}$ puis $dx = \dfrac{1}{4}u^{-3/4}\ du$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} x^{4k}e^{-x}x^3\sin x\ dx = \int_0^{+\infty} u^k e^{-u^{1/4}}u^{3/4}\sin\left(u^{1/4}\right)\ \frac{du}{4u^{3/4}} = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} u^k e^{-u^{1/4}}\sin\left(u^{1/4}\right)\ du.$$

Pour $u \in [0, +\infty[$, posons $f(u) = e^{-u^{1/4}}\sin\left(u^{1/4}\right)$. Alors, la fonction f est continue sur $[0, +\infty[$, non nulle sur cet intervalle et vérifie $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} u^k f(u)\ du = 0$.

III.6.d. On note que la fonction f est continue sur $[0,+\infty[$ et négligeable en $+\infty$ devant $\dfrac{1}{u^2}$. Donc, la fonction f est intégrable sur $[0,+\infty[$ ou encore $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(x)|\ dx < +\infty$.

D'autre part, par linéarité, pour tout polynôme P, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(x)f(x)\ dx = 0$.

Supposons par l'absurde qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers f sur $[0,+\infty[$. Pour tout entier naturel n, on a

$$\int_0^{+\infty} (f(x))^2\ dx = \int_0^{+\infty} (f(x)-P_n(x))\,f(x)\ dx + \int_0^{+\infty} P_n(x)f(x)\ dx = \int_0^{+\infty} (f(x)-P_n(x))\,f(x)\ dx,$$

puis

$$\begin{aligned}0 \leqslant \int_0^{+\infty} (f(x))^2\ dx &= \int_0^{+\infty} (f(x)-P_n(x))\,f(x)\ dx = \left|\int_0^{+\infty} (f(x)-P_n(x))\,f(x)\ dx\right| \leqslant \int_0^{+\infty} |f(x)-P_n(x)|\,|f(x)|\ dx\\ &\leqslant \|f-P_n\|_\infty \int_0^{+\infty} |f(x)|\ dx.\end{aligned}$$

Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} (f(x))^2\ dx = 0$ et donc $f = 0$ (fonction continue positive d'intégrale nulle). Ceci est absurde et donc il n'existe pas de suites de polynômes convergeant uniformément vers f sur $[0,+\infty[$.

Partie 3. Exemple via un théorème de Dini

III.7. Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leqslant u_n\leqslant\sqrt{x}$.

- C'est vrai pour $n=0$.
- Soit $n\geqslant 0$. Supposons que $0\leqslant u_n\leqslant\sqrt{x}$. Alors

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}\left(x-(u_n)^2\right) \geqslant 0 + \frac{1}{2}\left(x-\left(\sqrt{x}\right)^2\right) = 0.$$

D'autre part,

$$u_{n+1}-\sqrt{x} = u_n-\sqrt{x}+\frac{1}{2}\left(x-(u_n)^2\right) = \left(u_n-\sqrt{x}\right)\left(1-\frac{\sqrt{x}+u_n}{2}\right) \leqslant 0.$$

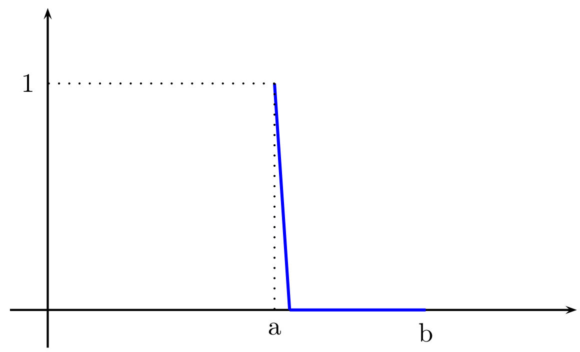
car $u_n-\sqrt{x}\leqslant 0$ et $1-\dfrac{\sqrt{x}+u_n}{2} \geqslant 1-\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x}}{2} = 1-\sqrt{x}\geqslant 0$.

Le résultat est démontré par récurrence.

On en déduit encore que pour tout entier naturel n, $u_{n+1}-u_n = \dfrac{1}{2}\left(x-(u_n)^2\right)\geqslant 0$ et donc que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $\sqrt{x}$. Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel ℓ. Puisque pour tout entier naturel n, $0\leqslant u_n\leqslant\sqrt{x}$, on a encore $0\leqslant\ell\leqslant\sqrt{x}$.
En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité $u_{n+1} = u_n+\dfrac{1}{2}\left(x-(u_n)^2\right)$, on obtient $\dfrac{1}{2}\left(x-\ell^2\right) = 0$ puis $\ell=\sqrt{x}$ (car $\ell\geqslant 0$). On a montré que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{x}$.

III.8. Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in[a,b]$, posons $f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x\in\left[a+\dfrac{b-a}{n},b\right] \\ \dfrac{n}{b-a}\left(x-\left(a+\dfrac{b-a}{n}\right)\right) \text{ si } x\in\left[a,a+\dfrac{b-a}{n}\right]\end{cases}$.



La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[a,b]$ vers la fonction $f\ :\ x\mapsto \left\{\begin{array}{l}1 \text{ si } x=a\\ 0 \text{ si } x\in]a,b]\end{array}\right.$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger uniformément sur $[a,b]$ vers la fonction f car chaque fonction f_n est continue sur $[a,b]$ mais la fonction f ne l'est pas.

III.9.

III.9.a. D'après la question III.7, la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction $f\ :\ x\mapsto\sqrt{x}$.

III.9.b. D'après la question III.7, pour chaque x de $[0,1]$, la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Puisque d'autre part, chaque fonction P_n est continue sur $[0,1]$ et que la fonction f est continue sur $[0,1]$, le théorème admis dans l'énoncé permet d'affirmer que la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction $f\ :\ x\mapsto\sqrt{x}$.

Partie 4. Démonstration du théorème d'approximation de Weierstrass

III.10.

III.10.a. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On sait que $E(S_n)=nx$ et $V(S_n)=nx(1-x)$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$P(|S_n-nx|>n\alpha)=P(|S_n-E(S_n)|>n\alpha)\leqslant\frac{V(S_n)}{(n\alpha)^2}=\frac{nx(1-x)}{n^2\alpha^2}=\frac{x(1-x)}{n\alpha^2}.$$

Maintenant, pour tout $x\in[0,1]$, $x(1-x)=-x^2+x=\dfrac{1}{4}-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2\leqslant\dfrac{1}{4}$ et donc

$$P(|S_n-nx|>n\alpha)\leqslant\frac{1}{4n\alpha^2}.$$

III.10.b. On sait que pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $P(S_n=k)=\dbinom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$. D'après un théorème de transfert, on a

$$\begin{aligned}E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)&=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)P\left(\frac{S_n}{n}=\frac{k}{n}\right)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)P(S_n=k)\\&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k}=B_n(f)(x).\end{aligned}$$

III.11.

III.11.a. Soit $\varepsilon>0$. La fonction f est continue sur le segment $[0,1]$ et donc est uniformément continue sur ce segment d'après le théorème de Heine. Donc, il existe $\alpha>0$ tel que pour tout couple $(a,b)\in[0,1]^2$, $|a-b|\leqslant\alpha$ entraîne $|f(a)-f(b)|\leqslant\varepsilon$.

Soit $x\in[0,1]$. Soit $k\in[\![0,n]\!]$ tel que $\left|\dfrac{k}{n}-x\right|\leqslant\alpha$. Alors, $\left|f\left(\dfrac{k}{n}\right)-f(x)\right|\leqslant\varepsilon$.

III.11.b. Soient $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P\left(S_n=k\right)\right| \leqslant \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}\left(\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|+|f(x)|\right)P\left(S_n=k\right) \leqslant 2\|f\|_\infty \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha} P\left(\frac{S_n}{n}=\frac{k}{n}\right)$$

$$= 2\|f\|_\infty P\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right) = 2\|f\|_\infty P\left(|S_n-nx|>n\alpha\right).$$

III.11.c. Soient $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
|B_n(f)(x)-f(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)P\left(S_n=k\right) - f(x)\sum_{k=0}^{n}P\left(S_n=k\right)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P\left(S_n=k\right)\right| \\
&= \left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\leqslant\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P\left(S_n=k\right) + \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P\left(S_n=k\right)\right| \\
&\leqslant \left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\leqslant\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P\left(S_n=k\right)\right| + \left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P\left(S_n=k\right)\right| \\
&\leqslant \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\leqslant\alpha}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|P\left(S_n=k\right) + 2\|f\|_\infty P\left(|S_n-nx|>n\alpha\right) \\
&\leqslant \varepsilon \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\leqslant\alpha} P\left(S_n=k\right) + \frac{2\|f\|_\infty}{4n\alpha^2} \text{ (d'après III.10.a)} \\
&\leqslant \varepsilon \sum_{k=0}^{n} P\left(S_n=k\right) + \frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2} \\
&= \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}.
\end{aligned}$$

En résumé, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$, $|B_n(f)(x)-f(x)| \leqslant \varepsilon + \dfrac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}$. Maintenant, $\dfrac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc il existe un entier naturel non nul n_0, indépendant de x, tel que $\dfrac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2} \leqslant \varepsilon$. Pour $n \geqslant n_0$ et $x \in [0,1]$, on a $|B_n(f)(x)-f(x)| \leqslant 2\varepsilon$.

On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^* /\ \forall n \in [0,1],\ |B_n(f)(x)-f(x)| \leqslant 2\varepsilon$ et donc la suite des polynômes de Bernstein converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

