



EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC

---

**MATHEMATIQUES 2**

**Durée : 4 heures**

---

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

---

**Les calculatrices sont interdites**

**Les trois parties sont, dans une large mesure, indépendantes.**

*On s'intéresse ici aux propriétés de la fonction polylogarithme, définie comme série entière et à son prolongement grâce à une représentation intégrale. On établit aussi quelques formules générales et on complète l'étude par celle d'un cas particulier.*

**Partie I : le polylogarithme**

Dans toute cette partie,  $\alpha$  est un réel fixé.

**I - 1.1.**

Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $L_\alpha$  définie par :

$$L_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}.$$

**I - 1.2.**

Justifier que l'application  $L_\alpha$  est de classe  $C^\infty$  sur  $] -1, 1[$ .

**I - 1.3.**

Montrer que :

$$\forall x \in ] -1, 1[, L_\alpha(-x) + L_\alpha(x) = 2^{1-\alpha} L_\alpha(x^2).$$

**I - 2.1.**

Pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , établir une relation entre  $L'_{\alpha+1}(x)$  et  $L_\alpha(x)$ .

Exprimer  $L_{\alpha+1}(x)$  sous forme de l'intégrale entre 0 et  $x$  d'une certaine fonction.

**I - 2.2.**

Pour  $x \in ]-1, 1[$ , préciser les valeurs de  $L_\alpha(x)$  lorsque  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = -1$  et  $\alpha = 1$ .

**I - 3.**

Dans cette question, on suppose que  $\alpha \leq 1$ .

Montrer que  $L_\alpha(x)$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers 1 par valeurs strictement inférieures. Pour cela, on pourra chercher à minorer  $L_\alpha(x)$  pour  $x \in ]0, 1[$ .

## Partie II : prolongement pour $\alpha > 1$

Dans toute cette partie,  $\alpha$  est un réel strictement supérieur à 1.

**II - 1.1.**

Montrer que la fonction  $L_\alpha$  définie en I -1.1 est continue sur  $[-1, 1]$ .

**II - 1.2.**

Déterminer  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} L'_2(x)$  et préciser si la fonction  $L_2$  est dérivable en 1.

**II - 2.1.**

Montrer que l'application  $\varphi : u \mapsto \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - 1}$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

**II - 2.2.**

Pour tout réel  $x \leq 1$ , justifier l'existence de  $K_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - x} du$ .

**II - 2.3.**

Montrer que l'application  $K_\alpha$  ainsi définie est continue sur l'intervalle  $] - \infty, 1]$ .

**II - 2.4.**

Dans cette question, on suppose que  $\alpha > 2$ .

Montrer que la fonction  $K_\alpha$  est de classe  $C^1$  sur l'intervalle  $] - \infty, 1]$ .

**II - 2.5.**

On revient au cas général où  $\alpha > 1$ .

Montrer que la fonction  $K_\alpha$  est de classe  $C^1$  sur tout segment  $[a, b]$  avec  $a < b < 1$ , puis sur l'intervalle  $] - \infty, 1[$ .

**II - 3.1.**

Prouver l'existence de  $G_\alpha = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$  et justifier que  $G_\alpha > 0$ .

**II - 3.2.**

Montrer que pour tout  $x \in [-1, 1]$  et pour tout  $u > 0$ , on a :

$$\frac{1}{e^u - x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k e^{-(k+1)u}.$$

**II - 3.3.**

En déduire que pour tout  $x \in [-1, 1]$ , en utilisant  $L_\alpha(x)$  défini dans I - 1.1 et  $K_\alpha(x)$  défini dans II - 2.2, on a la relation :

$$xK_\alpha(x) = G_\alpha L_\alpha(x).$$

On précisera avec soin le théorème d'intégration terme à terme utilisé.

**II - 4.1.**

Pour tout  $x \in ]-\infty, 1]$ , on prolonge la définition de  $L_\alpha(x)$  en posant :

$$L_\alpha(x) = \frac{x}{G_\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - x} du.$$

Montrer que l'application  $L_\alpha$  ainsi définie est continue sur  $] - \infty, 1]$  et de classe  $C^1$  sur  $] - \infty, 1[$ .

**II - 4.2.**

Montrer que pour tout réel  $x \leq 1$ , on a :

$$L_\alpha(x) = \frac{x}{G_\alpha} \int_0^1 \frac{(-\ln(t))^{\alpha-1}}{1 - xt} dt.$$

**II - 4.3.**

Justifier que l'on peut prolonger la fonction  $L_\alpha$  sur  $\mathbb{C} \setminus ]1, +\infty[$  par la définition :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus ]1, +\infty[, L_\alpha(z) = \frac{z}{G_\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - z} du.$$

Montrer alors que pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , tel que  $z^2 \notin ]1, +\infty[$ , on a encore la relation :

$$L_\alpha(z) + L_\alpha(-z) = 2^{1-\alpha} L_\alpha(z^2).$$

**Partie III : le cas  $\alpha = 2$** 

On s'intéresse ici, pour tout  $x \in [-1, 1]$ , à :  $L_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ .

**III - 1.1.**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $2\pi$ -périodique et impaire, telle que :

$$\forall x \in ]0, \pi], f(x) = \frac{\pi - x}{2}.$$

Calculer les coefficients de Fourier «  $b_n(f)$  » pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**III - 1.2.**

Grâce à l'égalité de Parseval que l'on précisera, appliquée à  $f$ , en déduire la valeur de  $L_2(1)$ . Calculer aussi  $L_2(-1)$ .

**III - 2.1.**

Montrer que la fonction  $\Phi$  définie par :

$$\forall x \in ]0, 1[, \Phi(x) = L_2(x) + L_2(1-x) + \ln(x) \ln(1-x)$$

est de classe  $C^1$  sur  $]0, 1[$ .

**III - 2.2.**

Montrer que la fonction  $\Phi$  est constante sur  $]0, 1[$  et vaut  $L_2(1)$ .

**III - 2.3.**

En déduire la valeur de  $L_2\left(\frac{1}{2}\right)$ .

**III - 2.4.**

Prouver aussi que :

$$\forall x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right], L_2(x) + L_2\left(\frac{x}{x-1}\right) = -\frac{1}{2} (\ln(1-x))^2.$$

**III - 3.**

Grâce à II - 3, calculer  $K_2(1) = \int_0^{+\infty} \frac{u}{e^u - 1} du$ .

**III - 4.**

Désormais, on s'intéresse au prolongement de  $L_2$  considéré en II - 4, vérifiant en particulier la relation vue en II-4.2 dont on partira pour traiter les questions suivantes, c'est-à-dire :

$$\forall x < 0, L_2(x) = -\frac{x}{G_2} \int_0^1 \frac{\ln(s)}{1-xs} ds.$$

**III - 4.1.**

Montrer alors que pour tout  $x < 0$ , on a aussi les égalités :

$$L_2(x) = -\int_x^0 \frac{\ln\left(\frac{t}{x}\right)}{1-t} dt = \int_x^0 \frac{\ln(1-t)}{t} dt.$$

On pourra effectuer un changement de variable et une intégration par parties.

**III - 4.2.**

Pour tout  $x < 0$ , calculer  $g(x) = \int_x^0 \frac{\ln(1-t)}{t-1} dt$ .

**III - 4.3.**

Justifier l'existence de l'intégrale  $A = \int_{-\infty}^0 \frac{\ln(1-t)}{t(t-1)} dt$ .

**III - 4.4.**

Préciser  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (L_2(x) - g(x))$ . En déduire un équivalent simple de  $L_2(x)$  quand  $x$  tend vers  $-\infty$ , cet équivalent dépendant de  $\ln(-x)$ .

**Fin de l'énoncé**