



EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC

---

**MATHEMATIQUES 1**

**Durée : 4 heures**

---

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

---

Les calculatrices sont interdites

*L'objectif du problème est de définir et d'étudier la notion de **diagonalisabilité d'un couple de matrices**  $(A, B)$  dans plusieurs situations.*

*Les parties I et V traitent chacune un cas particulier, respectivement en dimension 3 et 4. La partie II aborde le cas où  $B$  est inversible et la partie IV étudie un critère de diagonalisabilité. La partie III se réduit à l'étude du cas d'un couple de matrices symétriques réelles.*

*La partie I est indépendante des quatre autres parties. Les parties III, IV et V sont, pour une grande part, indépendantes les unes des autres.*

*Il est demandé, lorsqu'un raisonnement utilise un résultat obtenu précédemment dans le problème, d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.*

**Notations et définitions**

Soient  $n$  et  $p$  deux entiers naturels non nuls,  $\mathbb{K}$  l'ensemble  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $H$  une partie de  $\mathbb{K}$ .

Notons  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  l'espace vectoriel des matrices à  $n$  lignes et  $p$  colonnes à coefficients dans  $\mathbb{K}$ ,

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ ,

$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$  l'espace vectoriel des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  qui sont symétriques,

$\mathcal{D}_n(H)$  l'ensemble des matrices diagonales de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  à coefficients diagonaux dans  $H$ ,

$\text{GL}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  qui sont inversibles,

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  qui sont orthogonales,

$I_n$  la matrice identité d'ordre  $n$ .

**Définitions 1 :** Soient  $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

- On note  $E_\lambda(A, B)$  l'ensemble des matrices-colonnes  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  telles que  $AX = \lambda BX$ .
- On dit que  $\lambda$  est **valeur propre** du couple  $(A, B)$  si  $E_\lambda(A, B)$  n'est pas réduit à  $\{0\}$ , c'est-à-dire si  $A - \lambda B$  n'est pas inversible.
- On note  $\chi_{(A,B)}$  la fonction définie sur  $\mathbb{K}$  par  $\chi_{(A,B)}(\lambda) = \det(A - \lambda B)$  et  $\text{Sp}(A, B)$  l'ensemble des valeurs propres du couple  $(A, B)$ , c'est-à-dire l'ensemble des éléments  $\lambda \in \mathbb{K}$  tels que  $\chi_{(A,B)}(\lambda) = 0$ .

Dans le cas particulier où  $B = I_n$ , on remarquera que ces définitions correspondent aux notions de valeur propre, d'espace propre et de polynôme caractéristique de  $A$ .

Ainsi,  $E_\lambda(A, I_n)$  et  $\chi_{(A, I_n)}$  sont notés plus simplement  $E_\lambda(A)$  et  $\chi_A$ .

## Partie I : DIAGONALISABILITÉ DANS UN CAS PARTICULIER

Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 12 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

On note aussi  $\mathcal{F} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$  pour  $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

### I.1.

- I.1.a.** Montrer que  $B$  n'est pas inversible.
- I.1.b.** Montrer que  $A$  est inversible.
- I.1.c.** Vérifier que  $C = A^{-1}B$ .

### I.2.

- I.2.a.** Montrer que  $\chi_{(A,B)}(\lambda) = -(2\lambda - 1)^2$ .
- I.2.b.** En déduire  $\text{Sp}(A, B)$ .
- I.2.c.** Déterminer une base de  $E_{1/2}(A, B)$  et en déduire que  $\dim E_{1/2}(A, B) = 2$ .

### I.3.

- I.3.a.** Calculer  $\chi_{(B,A)}(\lambda)$  et en déduire que  $\text{Sp}(B, A) = \{0, 2\}$ .
- I.3.b.** Établir les identités suivantes :

$$E_0(B, A) = \text{Vect}(\mathbf{u}_1) = E_0(C) \quad \text{et} \quad E_2(B, A) = E_{1/2}(A, B) = \text{Vect}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = E_2(C).$$

- I.3.c.** En déduire que  $\dim(E_0(B, A)) + \dim(E_2(B, A)) = 3$ .

### I.4.

- I.4.a.** Montrer que  $\mathcal{F}$  est une base de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  formée de vecteurs propres de  $C$ .
- I.4.b.** Déterminer explicitement une matrice  $R \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$  telle que  $C = RDR^{-1}$ .
- I.4.c.** Montrer que  $B = ARDR^{-1}$ .
- I.4.d.** Justifier qu'il existe  $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$  et  $Q \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$  telles que  $A = PI_3Q$  et  $B = PDQ$ .

**Définitions 2 :** Soit  $(A, B, A', B') \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^4$ .

- On dit que le couple  $(A, B)$  est **régulier** s'il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $\chi_{(A,B)}(\lambda) \neq 0$ .
- On dit que le couple  $(A, B)$  est **équivalent** au couple  $(A', B')$  et on note  $(A, B) \sim (A', B')$  si :

$$\exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{K}), \exists Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \quad | \quad A = PA'Q \quad \text{et} \quad B = PB'Q.$$

- On dit que le couple  $(A, B)$  est **diagonalisable** si :

$$\exists D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}), \exists D' \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}) \quad | \quad (A, B) \sim (D, D').$$

## Partie II : RÉGULARITÉ ET DIAGONALISABILITÉ

**II.1.** Soit  $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ .

**II.1.a.** On suppose dans cette question que  $B$  est inversible. Pour  $\lambda \in \mathbb{K}$ , exprimer  $\chi_{(A,B)}(\lambda)$  en fonction de  $\chi_{B^{-1}A}(\lambda)$  et en déduire que  $\chi_{(A,B)}$  est une fonction polynomiale dont on précisera le degré.

**II.1.b.** On suppose dans cette question que  $n \geq 2$ . Donner un exemple de couple  $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$  pour lequel  $\chi_{(A,B)}$  est la fonction nulle alors que ni  $A$  ni  $B$  n'est la matrice nulle.

**II.1.c.** Montrer que  $\chi_{(A,B)}$  est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à  $n$ .

**II.2.**

**II.2.a.** Montrer que :

$$(A, B) \sim (A', B') \iff \exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{K}), \exists Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \quad | \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, A - \lambda B = P(A' - \lambda B')Q.$$

**II.2.b.** Établir que si  $(A, B)$  est équivalent à  $(A', B')$ , alors il existe  $\alpha \in \mathbb{K}$ , non nul, tel que  $\chi_{(A,B)} = \alpha \cdot \chi_{(A',B')}$ , puis que  $\text{Sp}(A, B) = \text{Sp}(A', B')$ .

**II.3.** On suppose dans cette question que  $(A, B)$  est régulier.

**II.3.a.** Montrer que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, \chi_{(A,B)}(\lambda) = (-\lambda)^n \cdot \chi_{(B,A)}\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

**II.3.b.** Montrer que  $(B, A)$  est régulier.

**II.3.c.** On suppose dans cette question que  $r$  et  $s$  sont deux entiers tels que  $1 \leq r \leq s \leq n$  et  $a_r, a_{r+1}, \dots, a_s$  des éléments de  $\mathbb{K}$  tels que  $a_r \neq 0$  et  $a_s \neq 0$ . On suppose également que  $\chi_{(B,A)}$  s'écrit sous la forme :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \chi_{(B,A)}(\lambda) = \sum_{k=r}^s a_k \lambda^k.$$

Montrer que 0 est racine de  $\chi_{(B,A)}$  d'ordre de multiplicité  $r$  et que  $\chi_{(A,B)}$  est de degré  $n - r$ .

**II.3.d.** Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- $B$  est inversible ;
- $\chi_{(A,B)}$  est de degré  $n$  ;
- $0 \notin \text{Sp}(B, A)$ .

**II.4.** On suppose dans cette question que  $B$  est inversible. Montrer que si  $B^{-1}A$  est diagonalisable, alors  $(A, B)$  est diagonalisable.

**Définitions 3 :** Soit  $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ , c'est-à-dire que  $M$  est une matrice symétrique réelle. On confondra toute matrice  $A = (a)$  de  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$  avec le réel  $a$ .

- On dit que  $M$  est **positive** si :  $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXMX \geq 0$ .
- On dit que  $M$  est **définie-positive** si  $M$  est positive et inversible.

### Partie III : DIAGONALISABILITÉ DANS LE CAS SYMÉTRIQUE

#### III.1.

**III.1.a.** Montrer que pour  $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  et  $Y = (y_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , alors  ${}^tXMY = \sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{i,j}x_iy_j$ .

**III.1.b.** En déduire que pour  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  non nul,  ${}^tXX > 0$ .

**III.1.c.** Montrer que, pour  $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ , les propositions suivantes sont équivalentes :

- $M$  est définie-positive ;
- $\text{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+^*$  ;
- il existe  $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  et  $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}_+^*)$  telles que  $M = PD {}^tP$  ;
- il existe  $L \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  telle que  $M = {}^tLL$ .

Dans le cas où  $M$  est définie-positive, on pose :  $\forall (X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$ ,  $\langle X, Y \rangle_M = {}^tXMY$ .

**III.2.** Montrer que si  $M$  est définie-positive, l'application  $(X, Y) \mapsto \langle X, Y \rangle_M$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

**III.3.** On suppose dans cette question que  $(A, B) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2$  avec  $B$  définie-positive. On suppose alors que  $L$  est une matrice de  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  telle que  $B = {}^tLL$  et on définit, par III.2, un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ .

**III.3.a.** Trouver une matrice  $C \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  telle que, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,

$$AX = \lambda BX \iff CZ = \lambda Z \quad \text{où on a posé } Z = LX.$$

**III.3.b.** Montrer qu'il existe une base  $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  qui soit orthonormale pour le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{I_n}$  et telle que, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , il existe  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  vérifiant :  $C\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$ .

**III.3.c.** Montrer qu'il existe une base  $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  qui soit orthonormale pour le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$  et telle que, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $A\mathbf{e}'_i = \lambda_i B\mathbf{e}'_i$ .

**III.3.d.** En déduire que le couple  $(A, B)$  est diagonalisable.

**III.4.** On suppose dans toute la fin de la partie III que le couple  $(A, B)$  est régulier et que  $A$  et  $B$  sont toutes les deux symétriques réelles positives.

**III.4.a.** Montrer l'existence de  $\lambda_0 \in \mathbb{R}_-^*$  tel que  $A - \lambda_0 B$  soit une matrice symétrique réelle définie-positive.

**III.4.b.** En déduire que le couple  $(A, B)$  est diagonalisable.

**Définitions 4 :** Soit  $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$  un couple régulier.

- Pour  $\lambda \in \text{Sp}(A, B)$ , on note  $m_\lambda(A, B)$  l'ordre de multiplicité de  $\lambda$  en tant que racine de  $\chi_{(A, B)}$ .
- Si  $B$  est inversible, on note  $\text{Sp}_\infty(A, B) = \text{Sp}(A, B)$ ,  $m_\infty(A, B) = 0$  et  $E_\infty(A, B) = \{0\}$ .
- Si  $B$  n'est pas inversible, on note  $\text{Sp}_\infty(A, B) = \text{Sp}(A, B) \cup \{\infty\}$ ,  $m_\infty(A, B) = m_0(B, A)$  l'ordre de multiplicité de 0 en tant que racine de  $\chi_{(B, A)}$  et  $E_\infty(A, B) = E_0(B, A)$ .

On cherche un critère de diagonalisabilité de  $(A, B)$  faisant intervenir  $\dim(E_\lambda(A, B))$ .

- On dit que  $(A, B)$  vérifie la propriété  $\mathcal{H}$  si :

$$\forall \lambda \in \text{Sp}_\infty(A, B), \dim(E_\lambda(A, B)) = m_\lambda(A, B).$$

## Partie IV : UN CRITÈRE DE DIAGONALISABILITÉ

Dans toute cette partie, on suppose que  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Soit  $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$  un couple régulier. Il existe donc  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  tel que  $A - \lambda_0 B$  soit inversible.

Dans toute la suite de la partie IV, on suppose pour simplifier les notations que  $\lambda_0 = 0$  si bien que  $A$  est inversible.

On note  $d$  le degré de  $\chi_{(A, B)}$  et  $C = A^{-1}B$ .

Dans les questions suivantes, on pourra être amené à distinguer le cas où  $B$  est inversible du cas où  $B$  n'est pas inversible.

### IV.1.

**IV.1.a.** Montrer que  $E_0(C) = E_0(B, A) = E_\infty(A, B)$ .

**IV.1.b.** Montrer que si  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ , alors  $E_\lambda(C) = E_{1/\lambda}(A, B)$ .

**IV.1.c.** Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  des éléments distincts de  $\mathbb{C}$ . Justifier que si

$$\text{Sp}(C) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}, \text{ alors } \text{Sp}_\infty(A, B) = \left\{ \frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_k} \right\} \text{ où on a posé } \frac{1}{0} = \infty.$$

**IV.2.** Vérifier que  $m_\infty(A, B) = n - d$ , puis que : 
$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}_\infty(A, B)} m_\lambda(A, B) = n.$$

**IV.3.** On suppose dans toute la suite de la partie que  $(A, B)$  vérifie la propriété  $\mathcal{H}$ .

**IV.3.a.** Montrer que 
$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}_\infty(A, B)} \dim(E_\lambda(A, B)) = n.$$

**IV.3.b.** Montrer que  $C$  est diagonalisable.

**IV.3.c.** Établir que le couple  $(A, B)$  est diagonalisable.

Dans toute la suite du problème, on admettra que si  $(A, B)$  est régulier et que  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $(A, B)$  est diagonalisable si et seulement si  $(A, B)$  vérifie la propriété  $\mathcal{H}$ .

## Partie V : EXEMPLE DE NON-DIAGONALISABILITÉ

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et soit  $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

On considère l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  tel que :

$$f(\mathbf{e}_1) = 0 \quad \text{et si } n \geq 2, \quad \forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket, \quad f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_{i-1}.$$

On note  $A_n$  la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$  et  $B_n = {}^t A_n$ .

On note  $g$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est  $B_n$ .

Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\chi_{(A_n, B_n)}(\lambda)$  sera noté  $c_n(\lambda)$ . On définit de plus  $c_0(\lambda) = 1$ .

**V.1.** Donner la forme explicite des matrices  $A_n$  et  $B_n$ .

**V.2.** Vérifier que la matrice de  $f - \lambda g$  dans  $\mathcal{B}$  est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ -\lambda & 0 & 1 & & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ (0) & & & -\lambda & 0 & 1 \\ & & & & -\lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

**V.3.**

**V.3.a.** Calculer  $c_1(\lambda)$ ,  $c_2(\lambda)$ ,  $c_3(\lambda)$  et  $c_4(\lambda)$ .

**V.3.b.** Montrer que pour  $n \geq 2$ ,  $c_n(\lambda) = \lambda \cdot c_{n-2}(\lambda)$ .

**V.3.c.** En déduire, pour  $k \in \mathbb{N}$ , les expressions de  $c_{2k}(\lambda)$  et de  $c_{2k+1}(\lambda)$ .

**V.3.d.** Donner une condition sur  $n \in \mathbb{N}$  pour que  $(A_n, B_n)$  soit régulier.

**V.4.**

**V.4.a.** Déterminer  $\dim(E_0(A_4, B_4))$  et  $\dim(E_\infty(A_4, B_4))$ .

**V.4.b.** Calculer  $m_0(A_4, B_4)$  et  $m_\infty(A_4, B_4)$ .

**V.4.c.** Le couple  $(A_4, B_4)$  est-il diagonalisable ?

## Fin de l'énoncé