SESSION 2012

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE PC

MATHEMATIQUES 1

Partie I : diagonalisabilité dans certains cas

I.1.

I.1.a Les premières et deuxièmes colonnes de la matrice B sont colinéaires ($C_2 = 2C_1$). Donc rg(B) < 3 puis B n'est pas inversible.

I.1.b En développant suivant la dernière colonne, on obtient $\det(A) = (-1)(3-2) = -1$. Par suite, $\det(A) \neq 0$ et donc A est inversible.

I.1.c $AC = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 12 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = B$. Puisque A est inversible, on a encore $A^{-1}AC = A^{-1}B$ ou enfin $C = A^{-1}B$.

I.2.

I.2.a D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
\chi_{(A,B)}(\lambda) &= \det(A - \lambda B) = \det(A) \times \det(I_3 - \lambda A^{-1}B) = \det(A) \times \det(I_3 - \lambda C) \\
&= -\begin{vmatrix} 1+4\lambda & 2\lambda & 2\lambda \\ -12\lambda & 1-6\lambda & -4\lambda \\ 0 & 0 & 1-2\lambda \end{vmatrix} \\
&= -(1-2\lambda)((1-4\lambda)(1-6\lambda) + 24\lambda^2) \text{ (déterminant par blocs)} \\
&= -(1-2\lambda)^2 = -(2\lambda-1)^2
\end{aligned}$$

I.2.b $\mathrm{Sp}(A, B) = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

I.2.c Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K})$.

$$X \in E_{1/2}(A, B) \Leftrightarrow AX = \frac{1}{2}BX \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x + y + z = 0 \\ 2x + y = \dfrac{1}{2}(4x + 2y) \\ -z = \dfrac{1}{2}(-2z) \end{array}\right. \Leftrightarrow 3x + y + z = 0.$$

$E_{1/2}(A, B)$ est un plan vectoriel ou encore $\dim\left(E_{1/2}(A, B)\right) = 2$. Une base de $E_{1/2}(A, B)$ est (u_2, u_3) où $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (u_2 et u_3 étant deux vecteurs non colinéaires du plan $E_{1/2}(A, B)$).

I.3.

I.3.a

$$\begin{aligned}\chi_{(B,A)}(\lambda) = \det(B-\lambda A) = \det(A)\times\det(A^{-1}B-\lambda I_3) = \det(A)\times\det(C-\lambda I_3) = -\chi_C(\lambda)\\
= -\begin{vmatrix} -4-\lambda & -2 & -2\\ 12 & 6-\lambda & 4\\ 0 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}\\
= -(2-\lambda)((-4-\lambda)(6-\lambda)+24) \text{ (déterminant par blocs)}\\
= -(2-\lambda)(\lambda^2-2\lambda) = \lambda(\lambda-2)^2.\end{aligned}$$

et en particulier, $\mathrm{Sp}(A,B) = \{0,2\}$.

I.3.b Soit $X = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K})$.

$$X \in E_0(B,A) \Leftrightarrow AX = \frac{1}{2}BX \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0=0\\ 4x+2y=0\\ -2z=0\end{array}\right. \Leftrightarrow 2x+y=z=0.$$

Donc, $E_0(B,A) = \{(x,-2x,0),\ x\in\mathbb{K}\} = \mathrm{Vect}(u_1)$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K})$.

$$X \in E_2(B,A) \Leftrightarrow AX = \frac{1}{2}BX \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0=2(3x+y+z)\\ 4x+2y=2(2x+y)\\ -2z=2(-z)\end{array}\right. \Leftrightarrow\Leftrightarrow 3x+y=z=0.$$

Donc $E_0(B,A) = E_{1/2}(A,B) = \mathrm{Vect}(u_2,u_3)$.

Enfin, pour $\lambda\in\{0,2\}$, $X\in E_\lambda(B,A) \Leftrightarrow BX = \lambda AX \Leftrightarrow A^{-1}BX = \lambda X \Leftrightarrow CX = \lambda X \Leftrightarrow X \in E_\lambda(C)$ et finalement

$$\boxed{E_0(B,A) = \mathrm{Vect}(u_1) = E_0(C) \text{ et } E_0(B,A) = E_{1/2}(A,B) = \mathrm{Vect}(u_2,u_3) = E_2(C).}$$

I.3.c $\dim(E_0(B,A)) + \dim(E_2(B,A)) = 1+2 = 3$.

I.4.

I.4.a D'après la question I.3.b, u_1 est un vecteur propre de C associé à la valeur propre 0 et u_2 et u_3 sont deux vecteurs propres de C associés à la valeur propre 2. De plus, le déterminant de la famille (u_1,u_2,u_3) dans la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1\\ 0 & -3 & -1\end{vmatrix} = 1\times 3 + 2\times(-1) = 1 \neq 0.$$

Donc, la famille (u_1,u_2,u_3) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de C.

I.4.b Par suite, la matrice $R = \left(\begin{array}{ccc|} 1 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1\\ 0 & -3 & -1\end{array}\right)$ est une matrice telle que $C = RDR^{-1}$.

I.4.c D'après la question I.1.c, $B = AC = ARDR^{-1}$.

I.4.d Soient $P = AR$ et $Q = R^{-1}$. Puisque A et R sont inversibles, il en est de même de P puis $B = ARDR^{-1} = PDQ$ et d'autre part $A = PR^{-1} = PQ = PI_3Q$. On a trouvé deux matrices inversibles P et Q telles que $A = PI_3Q$ et $B = PDQ$.

Partie II : RÉGULARITÉ ET DIAGONALISABILITÉ

II.1.

II.1.a Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\chi_{(A,B)}(\lambda) = \det(A - \lambda B) = \det(B(B^{-1}A - \lambda I)) = \det(B)\det(B^{-1}A - \lambda I) = \det(B)\chi_{B^{-1}A}(\lambda).$$

On sait que $\chi_{B^{-1}A}$ est un polynôme de degré n et donc, puisque $\det(B) \neq 0$, $\chi_{(A,B)}$ est un polynôme de degré n.

II.1.b On prend $A = B = E_{1,1}$ où $E_{1,1}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui qui est à la ligne 1, colonne 1, qui est égal à 1. Puisque $n \geqslant 2$, la matrice $E_{1,1}$ n'est pas inversible

II.1.c Si B est inversible, $\chi_{(A,B)}$ est un polynôme de degré n. Supposons B non inversible. Alors, $B - xI_n$ est inversible sauf pour un nombre fini de valeurs de x, les valeurs propres de B. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et pour tout $x \notin \mathrm{Sp}(B)$.

$$\chi_{(A,B-xI)}(\lambda) = \det(A - \lambda(B - xI_n)) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)\lambda^k,$$

où les fonctions $x \mapsto a_k(x)$ sont des fonctions polynomiales. A λ fixé, les deux fonctions $x \mapsto \chi_{(A,B-xI)}(\lambda)$ et $x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\lambda^k$ sont deux fonctions polynomiales qui coïncident en une infinité de valeurs de x. On sait alors que ces deux fonctions sont égales et en particulier, ces deux fonctions prennent la même valeurs en 0. Par suite, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\chi_{(A,B)}(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k(0)\lambda^k,$$

et donc $\chi_{(A,B)}$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n. On a montré dans tous les cas que $\chi_{(A,B)}$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n.

II.2.

II.2.a $\Rightarrow$ /. Si $(A, B) \sim (A', B')$, alors il existe $(P, Q) \in (GL_n(\mathbb{K}))^2$ tel que $A = PA'Q$ et $B = PB'Q$. Mais alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$A - \lambda B = PA'Q - \lambda PB'Q = P(A' - \lambda B')Q.$$

$\Leftarrow$ / Supposons qu'il existe $(P, Q) \in (GL_n(\mathbb{K}))^2$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $A - \lambda B = P(A' - \lambda B')Q$. $\lambda = 0$ fournit immédiatement $A = PA'Q$ puis $\lambda = 1$ fournit $A - B = P(A' - B')Q = PA'Q - PB'Q$ et donc $B = PB'Q$.

II.2.b Il existe $(P, Q) \in (GL_n(\mathbb{K}))^2$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $A - \lambda B = P(A' - \lambda B')Q$. Mais alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\chi_{(A,B)}(\lambda) = \det(A - \lambda B) = \det(P(A' - \lambda B')Q) = \det(P)\det(Q)\det(A' - \lambda B') = \det(PQ)\chi_{(A',B')}(\lambda),$$

et donc $\chi_{(A,B)} = \alpha\chi_{(A',B')}$ avec $\alpha = \det(PQ) \neq 0$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A, B) \Leftrightarrow \chi_{(A,B)}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \alpha\chi_{(A',B')}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \chi_{(A',B')}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \mathrm{Sp}(A', B').$$

Ceci montre que $\mathrm{Sp}(A, B) = \mathrm{Sp}(A', B')$.

II.3.

II.3.a Soit $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

$$\chi_{(A,B)}(\lambda) = \det(A - \lambda B) = \det\left((-\lambda)\left(B - \frac{1}{\lambda}A\right)\right) = (-\lambda)^n\det\left(B - \frac{1}{\lambda}A\right) = (-\lambda)^n\chi_{(B,A)}\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

II.3.b Si $\chi_{(A,B)}(\lambda) = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, alors $\chi_{(A,B)}$ admet une infinité de racines et donc $\chi_{(A,B)}$ est le polynôme nul puis (A, B) n'est pas régulier. Par contrapositon, puisque (A, B) est régulier, il existe $\lambda_0 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tel que $\chi_{(A,B)}(\lambda_0) \neq 0$.

Soit $\mu_0 = \dfrac{1}{\lambda_0}$.

$$\chi_{(B,A)}(\mu_0) = \chi_{(B,A)}\left(\frac{1}{\lambda_0}\right) = \left(-\frac{1}{\lambda_0}\right)^n \chi_{(A,B)}(\lambda_0) \neq 0.$$

Ceci montre que (B, A) est régulier.

II.3.c Soit $Q = \sum_{k=r}^{s} a_k X^{k-r}$. Q est un polynôme tel que $\chi_{(B,A)} = X^r Q$ et $Q(0) = a_k \neq 0$. Donc 0 est racine de $\chi_{(B,A)}$ d'ordre de multiplicité r.

D'après la question II.3.a, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\chi_{(A,B)}(\lambda) = (-\lambda)^n \sum_{k=r}^{s} a_k \frac{1}{\lambda^k} = \sum_{k=r}^{s} (-1)^n a_k \lambda^{n-k} = \sum_{l=n-s}^{n-r} (-1)^n a_{n-l} \lambda^l.$$

Ceci montre déjà que $\chi_{(A,B)}$ est un polynôme de degré au plus $n-r$. De plus, le coefficient de λ^{n-r} est $a_{n-(n-r)} = a_r \neq 0$ et donc $\chi_{(A,B)}$ est un polynôme de degré $n-r$.

II.3.d i) $\Rightarrow$ ii). Si B est inversible, $\chi_{(A,B)}$ est un polynôme de degré n d'après la question II.1.a.

ii) $\Rightarrow$ iii). Si $0 \in \mathrm{Sp}(B, A)$ ou encore si 0 est racine de $\chi_{(B,A)}$, on peut appliquer la question précédente et on obtient : $\chi_{(A,B)}$ est de degré $n - r < n$. En particulier, $\chi_{(A,B)}$ n'est pas de degré n.
Par contraposition, si $\chi_{(A,B)}$ est de degré n, alors $0 \notin \mathrm{Sp}(B, A)$.

iii) $\Rightarrow$ i). Si $0 \notin \mathrm{Sp}(B, A)$, alors $\det(B) = \chi_{(B,A)}(0) \neq 0$ et donc B est inversible.

On a montré l'équivalence des trois propriétés.

II.4. Supposons B inversible puis $B^{-1}A$ diagonalisable. Il existe $R \in GL_n(\mathbb{K})$ et $D \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ tel que $B^{-1}A = RDR^{-1}$ ou encore $A = BRDR^{-1}$.
On pose $P = BR$ et $Q = R^{-1}$. P et Q sont deux matrices inversibles. De plus, $B = PR^{-1} = PI_3Q$ et $A = PDQ$. Par suite, $(A, B) \sim (D, I_3)$ et donc (A, B) est diagonalisable.

Partie III : diagonalisabilité dans le cas symétrique

III.1.

III.1.a ${}^tXMY = {}^tX(MY) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} y_j \right) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j} x_i y_j$.

III.1.b En particulier, $\delta_{i,j}$ désignant le symbole de Kronecker,

$$^tXX = {}^tXI_nX = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \delta_{i,j} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

III.1.c i) $\Rightarrow$ ii) M est symétrique réelle et on sait que le polynôme caractéristique de M est scindé sur $\mathbb{R}$. Supposons que M soit définie positive. Soient λ une valeur propre de M et X un vecteur propre associé. X est en particulier non nul et d'après la question III.1.b, ${}^tXX > 0$ puis

$$\lambda = \frac{^tXMX}{^tXX} \geqslant 0 \text{ car } M \text{ est positive.}$$

De plus, M est inversible et donc $\lambda \neq 0$. Finalement, toute valeur propre de M est un réel strictement positif et donc $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}^{+*}$.

ii) $\Rightarrow$ iii) Supposons que $\mathrm{Sp}(M) \in \mathbb{R}^{+*}$. Notons $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la famille des valeurs propres de M. D'après le théorème spectral, la matrice M est orthogonalement semblable à la matrice $D = \mathrm{diag}(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}^{+*})$ et donc il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = PD{}^tP$.

iii) $\Rightarrow$ iv) Supposons qu'il existe $D \in \mathcal{D}_n^{+*}(\mathbb{R})$ et $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = PD{}^tP$. Posons $D = \mathrm{diag}(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ puis $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_i})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et enfin $L = \Delta{}^tP$. La matrice Δ est inversible en tant que matrice diagonale à coefficients diagonaux tous non nuls. Donc la matrice L est inversible. De plus

$$^tLL = {}^t(\Delta{}^tP)\Delta{}^tP = P\Delta^2{}^tP = PD{}^tP = M.$$

On a montré qu'il existe $L \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $M = {}^tLL$.

iv) $\Rightarrow$ i) Supposons qu'il existe $L \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $M = {}^tLL$. Tout d'abord, ${}^tM = {}^tL{}^t({}^tL) = {}^tLL = M$ et donc M est symétrique. Ensuite, puisque L est inversible, il en est de même de ${}^tL$ puis de $M = {}^tLL$. Vérifions que M est positive.

Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose $X' = LX$.

$$^tXMX = {}^tX{}^tLLX = {}^t(LX)(LX) = {}^tX'X' \geqslant 0 \text{ d'après la question III.1.b}$$

On a montré que M est symétrique définie positive. L'équivalence des quatre propriétés est ainsi démontrée.

III.2. • L'application $(X, Y) \mapsto \langle X, Y\rangle_M$ est bilinéaire par bilinéarité du produit matriciel.

• Soit $(X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$.

$$\langle Y, X\rangle_M = {}^tYMX = {}^t({}^tYMX) = {}^tX{}^tMY = {}^tXMY = \langle X, Y\rangle_M.$$

Donc, l'application $(X, Y) \mapsto \langle X, Y\rangle_M$ est

• Il existe une matrice inversible L telle que $M = {}^tLL$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ puis $X' = LX$. Puisque X est non nul et que L est inversible, X' est non nul et d'après la question III.1.b,

$$\langle X, X\rangle_M = {}^tXMX = {}^tX{}^tLLX = {}^t(LX)LX = {}^tX'X' > 0.$$

Donc la forme bilinéaire symétrique $(X, Y) \mapsto \langle X, Y\rangle_M$ est définie positive.

En résumé, l'application $(X, Y) \mapsto \langle X, Y\rangle_M$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive et donc l'application $(X, Y) \mapsto \langle X, Y\rangle_M$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

III.3.

III.3.a La matrice L est inversible et donc la matrice ${}^tL$ est inversible. Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$AX = \lambda BX \Leftrightarrow AL^{-1}LX = \lambda{}^tLLX \Leftrightarrow AL^{-1}Z = \lambda{}^tLZ \Leftrightarrow {}^tL^{-1}AL^{-1}Z = \lambda Z.$$

La matrice $C = {}^tL^{-1}AL^{-1}$ convient.

III.3.b La matrice C est symétrique réelle car ${}^tC = {}^tL^{-1}{}^tAL^{-1} = {}^tL^{-1}AL^{-1} = C$. D'après le théorème spectral, il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, orthonormée pour le produit scalaire usuel $\langle\ .\ ,\ .\ \rangle_{I_n}$, formée de vecteurs propres de C. Donc, il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, orthonormée pour le produit scalaire $\langle\ .\ ,\ .\ \rangle_{I_n}$ telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tel que $Ce_i = \lambda_i e_i$.

III.3.c Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, posons $e'_i = L^{-1}e_i$. Puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et que la matrice L^{-1} est inversible, on sait que la famille $(e'_1, \dots, e'_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$\langle e'_i, e'_j\rangle_B = {}^te'_iBe_j = {}^te_i{}^tL^{-1}{}^tLLe_j = {}^te_ie_j = \langle e_i, e_j\rangle_{I_n} = \delta_{i,j}$$

et donc la famille $(e'_1, \dots, e'_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ orthobormée pour le produit scalaire $\langle\ .\ ,\ .\ \rangle_B$.

Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$Ae'_i = AL^{-1}e_i = L^{-1}{}^tL^{-1}AL^{-1}e_i = L^{-1}Ce_i = \lambda_iL^{-1}e_i = \lambda_ie'_i,$$

et donc la base $(e'_1, \dots, e'_n)$ convient.

III.3.d Soit R la matrice de la base $(e'_1, \dots, e'_n)$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$. Les égalités précédentes s'écrivent $AR = BRD$ puis $A = BRDR^{-1}$ et on conclut comme à la question II.4 en prenant $P = BR$, $Q = R^{-1}$ de sorte que $PI_nQ = B$ et $PDQ = A$.

III.4.

III.4.a Soit $\varphi\ :\ \lambda$

III.4.b D'après la question III.3, le couple $(A, A - \lambda_0B)$ est diagonalisable. Donc, il existe $(P, Q) \in (GL_n(\mathbb{R}))^2$ et $(D, D') \in (\mathcal{D}_n(\mathbb{R}))^2$ tels que $A = PDQ$ et $A - \lambda_0B = PD'Q$. Mais alors

$$B = \frac{1}{\lambda_0}(A - PD'Q) = \frac{1}{\lambda_0}(PDQ - PD'Q) = P\left(\frac{1}{\lambda_0}(D - D')\right)Q = PD''Q,$$

où $D'' = \dfrac{1}{\lambda_0}(D - D') \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$. Ceci montre que le couple (A, B) est diagonalisable.

Partie IV : UN CRITÈRE DE DIAGONALISABILITÉ

IV.1.

IV.1.a Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in E_0(C) \Leftrightarrow CX = 0 \Leftrightarrow A^{-1}BX = 0 \Leftrightarrow BX = 0AX \Leftrightarrow X \in E_0(B,A) \Leftrightarrow X \in E_0(B).$$

Donc, $E_0(C) = E_0(B,A) = E_0(B)$. Ensuite, si B est inversible, $E_0(B) = \{0\} = E_\infty(A,B)$ et si B n'est pas inversible, directement $E_0(B,A) = E_\infty(A,B)$. On a montré que $E_0(C) = E_0(B,A) = E_\infty(A,B)$.

IV.1.b Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

$$X \in \ E_\lambda(C) \Leftrightarrow CX = \lambda X \Leftrightarrow A^{-1}BX = \lambda X \Leftrightarrow BX = \lambda AX \Leftrightarrow AX = \frac{1}{\lambda}BX \Leftrightarrow X \in E_{1/\lambda}(A,B).$$

Donc, $E_\lambda(C) = E_{1/\lambda}(A,B)$.

IV.1.c Posons $\mathrm{Sp}(C) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ où les λ_i sont deux à deux distincts.

$0 \notin \mathrm{Sp}(C) \Leftrightarrow C \in GL_n(\mathbb{C}) \Leftrightarrow A^{-1}B \in GL_n(\mathbb{C}) \Leftrightarrow B \in GL_n(\mathbb{C})$. (si $B \in GL_n(\mathbb{C})$ alors $A^{-1}B \in GL_n(\mathbb{C})$ et si $A^{-1}B \in GL_n(\mathbb{C})$ alors $B = AA^{-1}B \in GL_n(\mathbb{C})$).

Si B est inversible, alors $C \in GL_n(\mathbb{C})$ puis, d'après la question IV.1.a, $E_0(C) = E_\infty(A,B) = \{0\}$ et donc 0 n'est pas valeur propre de (A,B). La question précédente montre que si λ est un complexe non nul valeur propre de C alors $\frac{1}{\lambda}$ est valeur propre de (A,B) et aussi que si λ est valeur propre de (A,B), alors $\frac{1}{\lambda}$ est valeur propre de C. Donc $\mathrm{Sp}_\infty(A,B) = \mathrm{Sp}(A,B) = \left\{\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_k}\right\}$. On note que les $\frac{1}{\lambda_i}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, sont deux à deux distincts car la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est injective.

Si B n'est pas inversible, 0 est valeur propre de C et donc $E_\infty(A,B) = E_0(B,A) = E_0(C) \neq 0$ puis ∞ « est valeur propre de (B,A) » et réciproquement. Enfin, 0 n'est pas valeur propre de (A,B) car sinon il existe $X \neq 0$ tel que $AX = 0$ ce qui contredit l'inversibilité de A. Dans ce cas aussi, $\mathrm{Sp}_\infty(A,B) = \mathrm{Sp}(A,B) \cup \{\infty\} = \left\{\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_k}\right\}$.

IV.2. Si B est inversible, $\chi_{(A,B)}$ est de degré n d'après la question II.1.a puis $m_\infty(A,B) = 0 = n - n = n - d$. Ensuite, $\chi_{(A,B)} = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A,B)} (X - \lambda)^{m_\lambda(A,B)}$ et d'autre part, $\deg(\chi_{(A,B)}) = n$ d'après la question II.3.d. Donc,

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_\infty(A,B)} m_\lambda(A,B) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A,B)} m_\lambda(A,B) = n.$$

Supposons B non inversible. Puisque (A,B) est régulier, la question II.3.c permet d'affirmer que $d = n - r = n - \mathrm{Val}(\chi_{(B,A)}) = n - m_0(B,A) = n - m_\infty(A,B)$ et donc encore une fois $m_\infty(A,B) = n - d$. D'autre part, comme précédemment $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A,B)} m_\lambda(A,B) = d$ et donc

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_\infty(A,B)} m_\lambda(A,B) = m_\infty(A,B) + \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A,B)} m_\lambda(A,B) = n - d + d = n.$$

Dans tous les cas, $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_\infty(A,B)} m_\lambda(A,B) = n$.

IV.3.

IV.3.a Puisque (A,B) vérifie la propriété $\mathcal{H}$,

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_\infty}^{(} A,B)\dim(E_\lambda(A,B)) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_\infty(A,B)} m_\lambda(A,B) = n.$$

IV.3.b D'après la question IV.1,

$$n = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_\infty(A,B)} \dim(E_\lambda(A,B)) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A,B)} \dim(E_{1/\lambda}(C)) + \dim(E_0(C)) = \sum_{\lambda' \in \mathrm{Sp}(C)} \dim(E_{\lambda'}(C)) + \dim(E_0(C)).$$

Ainsi, la somme des dimensions des sous-espaces propres de C (si $0 \notin \mathrm{Sp}(C)$, $E_0(C) = \{0\}$ et $E_0(C)$ n'est pas un sous-espace propre) est égale à n et on sait alors que C est diagonalisable.

IV.3.c Par suite, il existe $R \in GL_n(\mathbb{C})$ et $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ tel que $C = RDR^{-1}$ ou encore $B = ARDR^{-1}$. Encore une fois, on pose $P = AR$ et $Q = R^{-1}$ et on obtient $B = PDQ$ puis $A = PR^{-1} = PI_nQ$ ce qui montre que (A, B) est diagonalisable.

Partie V : exemples de non-diagonalisabilité

V.1. $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 \end{pmatrix}$ et $B_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & & & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \ddots & & & & \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

V.2. La matrice de $f - \lambda g$ dans $\mathcal{B}$ est

$$A_n - \lambda B_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\lambda & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & 0 & -\lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

V.3.

V.3.a $c_1(\lambda) = \det(0) = 0$ puis $c_2(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{vmatrix} = \lambda$. En développant suivant la première colonne, on obtient ensuite

$$c_3(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 0 \end{vmatrix} = 0$$

puis

$$c_4(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{vmatrix} = \lambda^2.$$

V.3.b Soit $n \geqslant 3$. En développant suivant la première colonne, puis en développant le déterminant de format $n-1$ obtenu suivant sa première ligne, on obtient $c_n(\lambda) = \lambda c_{n-2}(\lambda)$. Cette dernière égalité reste vraie pour $n = 2$ par définition de $c_0(\lambda)$.

V.3.c Les suites $(c_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(c_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ sont géométriques de raison λ. Donc, pour $k \in \mathbb{N}$, $c_{2k}(\lambda) = \lambda^k c_0(\lambda) = \lambda^k$ et $c_{2k+1}(\lambda) = c_1(\lambda)\lambda^k = 0$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ c_{2k}(\lambda) = \lambda^k \text{ et } c_{2k+1}(\lambda) = 0.}$$

V.3.d Par suite, la couple (A_n, B_n) est régulier si et seulement si n est pair.

V.4.

V.4.a Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in E_0(A_4, B_4) \Leftrightarrow A_4X = 0 \Leftrightarrow y = z = t = 0.$$

Donc $E_0(A_4, B_4) = \text{Vect}(e_1)$ puis $\dim(E_0(A_4, B_4)) = 1$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in E_\infty(A_4, B_4) \Leftrightarrow X \in E_0(B_4, A_4) \Leftrightarrow B_4X = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 0.$$

Donc $E_\infty(A_4, B_4) = \text{Vect}(e_4)$ puis $\dim(E_\infty(A_4, B_4)) = 1$.

V.4.b Puisque $\chi_{(A_4,B_4)}(\lambda) = \lambda^2$, $m_0(A_4, B_4) = 2$. D'autre part,

$$\chi_{(B_4,A_4)}(\lambda) = \det(B_4 - \lambda A_4) = \det\left({}^t(B_4 - \lambda A_4)\right) = \det(A_4 - \lambda B_4) = \chi_{(A_4,B_4)}(\lambda) = \lambda^2,$$

et donc $m_\infty(A_4, B_4) = m_0(B_4, A_4) = 2$.

V.4.c Puisque $m_0(A_4, B_4) > \dim(E_0(A_4, B_4))$, le couple (A_4, B_4) n'est pas diagonalisable.

