SESSION 2012

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE MP

MATHEMATIQUES 2

EXERCICE

1. Puisque l'entier 3 est premier à l'entier 11, le petit théorème de Fermat permet d'affirmer que $3^{10} \equiv 1$ modulo 11. Ensuite,

- $3^1 \equiv 3$ modulo 11 et donc $3^1 \not\equiv 1$ modulo 11.
- $3^2 \equiv 9$ modulo 11 et donc $3^2 \not\equiv 1$ modulo 11.
- $3^3 \equiv -2 \times 3$ modulo 11 ou encore $3^3 \equiv 5$ modulo 11 et donc $3^3 \not\equiv 1$ modulo 11.
- $3^4 \equiv 5 \times 3$ modulo 11 ou encore $3^4 \equiv 4$ modulo 11 et donc $3^4 \not\equiv 1$ modulo 11.
- $3^5 \equiv 4 \times 3$ modulo 11 ou encore $3^5 \equiv 1$ modulo 11.

Le plus petit entier naturel non nul p tel que $3^p \equiv 1$ modulo 11 est $p_0 = 5$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
3^{n+2012} - 9 \times 5^{2n} &= 3^n \times \left(3^5\right)^{402} \times 3^2 - 9 \times (25)^n \\
&\equiv 3^n \times 1^{402} \times 9 - 9 \times 3^n \text{ modulo } 11 \\
&\equiv 0 \text{ modulo } 11.
\end{aligned}$$

Donc, pour tout entier naturel n, $3^{n+2012} - 9 \times 5^{2n}$ est divisible par 11.

Problème

Partie I. Etude du cas $n = 2$

1. Soient $(M, N) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\varphi_A(\lambda M + \mu N) = A(\lambda M + \mu N) - (\lambda M + \mu N)A = \lambda(AM - MA) + \mu(AN - NA) = \lambda\varphi_A(M) + \mu\varphi_A(N).$$

Donc φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$\varphi_A(A) = A^2 - A^2 = 0$. Donc $A \in \operatorname{Ker}(\varphi_A)$.

2. Calculons les images des éléments de la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}$.

- $\varphi_A(E_{1,1}) = AE_{1,1} - E_{1,1}A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} = -bE_{1,2} + cE_{2,1}$.
- $\varphi_A(E_{2,2}) = AE_{2,2} - E_{2,2}A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{pmatrix} = bE_{1,2} - cE_{2,1}$.
- $\varphi_A(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{pmatrix} = -cE_{1,1} + cE_{2,2} + (a-d)E_{1,2}$.
- $\varphi_A(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d-a & -b \end{pmatrix} = bE_{1,1} - bE_{2,2} + (d-a)E_{2,1}$.

On en déduit que

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{(E_{1,1},E_{2,2},E_{1,2},E_{2,1})}(\varphi_A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c & b \\ 0 & 0 & c & -b \\ -b & b & a-d & 0 \\ c & -c & 0 & d-a \end{pmatrix}}$$

3.

$$\begin{aligned}
\chi_{\varphi_A} &= \begin{vmatrix} -X & 0 & -c & b \\ 0 & -X & c & -b \\ -b & b & a-d-X & 0 \\ c & -c & 0 & d-a-X \end{vmatrix} \\
&= -X \begin{vmatrix} -X & c & -b \\ b & a-d-X & 0 \\ -c & 0 & d-a-X \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} 0 & -c & b \\ -X & c & -b \\ -c & 0 & d-a-X \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} 0 & -c & b \\ -X & c & -b \\ b & a-d-X & 0 \end{vmatrix} \\
&= -X\left[-X(a-d-X)(d-a-X) - bc(d-a-X) - bc(a-d-X)\right] - b\left(-Xc(d-a-X)\right) - c\left(-Xb(a-d-X)\right) \\
&= -X\left[-X(a-d-X)(d-a-X) + 2bcX\right] - 2bcX^2 = X^2((X-a+d)(X+a-d) - 4bc) \\
&= X^2(X^2 - (d-a)^2 - 4bc).
\end{aligned}$$

4. On sait que φ_A est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$ et l'odre de multiplicité de chacune de ses valeurs propres est égale à la dimension du sous-espace propre correspondant.

1er cas. Si $(d-a)^2 + 4bc < 0$, χ_{φ_A} n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ et donc φ_A n'est pas diagonalisable.

2ème cas. Si $(d-a)^2 + 4bc = 0$, $\chi_{\varphi_A} = X^4$. Si φ_A est diagonalisable, il existe une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de φ_A associés à la valeur propre 0. Mais alors l'endomorphisme φ_A s'annule sur une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et donc $\varphi_A = 0$ ce qui n'est pas. Donc φ_A n'est pas diagonalisable.

3ème cas. Si $(d-a)^2 + 4bc > 0$, χ_{φ_A} est scindé sur $\mathbb{R}$. Plus précisément, φ_A admet une valeur propre double à savoir 0 et deux valeurs propres simples à savoir $\sqrt{(d-a)^2+4bc}$ et $-\sqrt{(d-a)^2+4bc}$. La dimension du sous-espace propre associé à une valeur propre simple est toujours égale à 1 et donc φ_A est diagonalisable si et seulement si $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A)) = 2$.
On sait déjà que l'on a $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A)) \leqslant 2$. Mais d'autre part, I_2 et A sont deux éléments de $\mathrm{Ker}(\varphi_A)$ et de plus, la famille (I_2, A) est libre car A n'est pas une matrice scalaire. On en déduit que $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A)) \geqslant 2$ et finalement que $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A)) = 2$. Mais alors φ_A est diagonalisable.

En résumé, φ_A est diagonalisable si et seulement si $(d-a)^2 + 4bc > 0$.

5. $\chi_A = X^2 - (a+d)X + ad - bc$. Le discriminant de χ_A est $\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-bc) = a^2 + d^2 - 2ad + 4bc = (d-a)^2 + 4bc$.

1er cas. Si $(d-a)^2 + 4bc < 0$, χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ et donc A n'est pas diagonalisable.

2ème cas. Si $(d-a)^2 + 4bc = 0$, A admet une valeur propre réelle double. Si A était diagonalisable A serait semblable à une matrice du type $\mathrm{diag}(\lambda, \lambda) = \lambda I_2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et donc égale à une matrice du type λI_2, $\lambda \in \mathbb{R}$ ce qui n'est pas. Donc A n'est pas diagonalisable.

3ème cas. Si $(d-a)^2 + 4bc > 0$, A deux valeurs propres réelles simples à et on sait que A est diagonalisable.

En résumé, A est diagonalisable $\Leftrightarrow (d-a)^2 + 4bc > 0 \Leftrightarrow \varphi_A$ est diagonalisable.

Partie II. Etude du cas général

6. **(a)** On sait que $\forall (i,j,k,l) \in [\![1,n]\!]^4$, $E_{i,j}E_{k,l}\delta_{j,k}E_{i,l}$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

$$DE_{i,j} - E_{i,j}D = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k E_{k,k}E_{i,j} - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k E_{i,j}E_{k,k} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{k,i}\lambda_k E_{k,j} - \sum_{k=1}^{n} \delta_{k,j}\lambda_k E_{i,k} = (\lambda_i - \lambda_j)E_{i,j}.$$

(b) Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

$$\begin{aligned}
\varphi_A(B_{i,j}) &= AB_{i,j} - B_{i,j}A = PDP^{-1}PE_{i,j}P^{-1} - PE_{i,j}P^{-1}PDP^{-1} = P(DE_{i,j} - E_{i,j}D)P^{-1} \\
&= (\lambda_i - \lambda_j)PE_{i,j}P^{-1} = (\lambda_i - \lambda_j)B_{i,j}.
\end{aligned}$$

Puisque $B_{i,j} \neq 0$ (car $E_{i,j}$ n'est pas nulle et P et P^{-1} sont inversibles), $B_{i,j}$ est un vecteur propre de φ_A associé à la valeur propre $\lambda_i - \lambda_j$.

(c) On sait que $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. D'autre part, l'application $\psi \ : \ M \mapsto PMP^{-1}$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (de réciproque l'application $M \mapsto P^{-1}MP$). L'image d'une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par un automorphisme est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donc $(B_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi, il existe une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de φ_A et donc φ_A est diagonalisable.

7. (a)

i. Par hypothèse, φ_A en tant qu'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable et en particulier son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$.
Maintenant, le polynôme caractéristique de φ_A en tant qu'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est le même que le polynôme caractéristique de $\varphi_A$en tant qu'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donc le polynôme caractéristique de φ_A en tant qu'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, est scindé sur $\mathbb{R}$ ou encore les valeurs propres de φ_A en tant qu'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont réelles (puisque les valeurs propres de φ_A sont les racines de son polynôme caractéristique).

ii. On sait que A et ${}^tA$ ont même polynôme caractéristique. Donc si un nombre complexe z est valeur propre de A, alors z est valeur propre de ${}^tA$.

iii. On note x_1, ..., x_n (resp. y_1, ...,y_n) les composantes de X (resp. Y).
$X{}^tY$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Le coefficient ligne k, colonne l de $X{}^tY$ est $x_k y_l$. Puisque $X \neq 0$ et $Y \neq 0$, il existe $(k_0, l_0) \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_{k_0} \neq 0$ et $y_{l_0} \neq 0$. Mais alors le coefficient ligne k_0, colonne l_0 de $X{}^tY$, à savoir $x_{k_0}y_{l_0}$, n'est pas nul et par suite la matrice $X{}^tY$ n'est pas nulle.

Ensuite,

$$\varphi_A(X{}^tY) = AX{}^tY - X{}^tYA = (AX){}^tY - X{}^t({}^tAY) = zX{}^tY - \overline{z}X{}^tY = (z - \overline{z})X{}^tY.$$

Puisque $X{}^tY$ n'est pas nulle, on en déduit que $z - \overline{z}$ est valeur propre de φ_A.

(b) A admet au moins une valeur propre complexe z. Puisque A est à coefficients réels, il en est de même de χ_A. Mais alors, $\overline{z}$ est aussi une racine de χ_A ou encore une valeur propre de A. D'après la question iii., $z - \overline{z}$ est une valeur propre de φ_A.

$z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$ est un imaginaire pur et aussi un réel d'après la question i. En résumé, $z - \overline{z} \in \mathbb{R} \cap i\mathbb{R} = \{0\}$. On en déduit que $z = \overline{z}$ ou encore que z est un réel.

On a montré que A admet au moins une valeur propre réelle. Plus précisément, on a montré que toute valeur propre de A est réelle.

(c) Par définition, $AP_{i,j} - P_{i,j}A = \varphi_A(P_{i,j}) = \lambda_{i,j}P_{i,j}$. Par suite,

$$AP_{i,j}X = P_{i,j}AX + \lambda_{i,j}P_{i,j}X = (\lambda + \lambda_{i,j})P_{i,j}X.$$

Donc, $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $AP_{i,j}X = \mu_{i,j}P_{i,j}X$ où $\mu_{i,j} = \lambda + \lambda_{i,j}$.

(d) Soit $f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & MX \end{array}$. f est une application linéaire. Vérifions que f est surjective.
Soit Y un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Puisque X n'est pas nul, il existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_{i_0} \neq 0$. Soit M la matrice carrée dont toutes les colonnes sont nulles sauf la i_0-ème qui est $\dfrac{1}{x_{i_0}}Y$. Alors $f(M) = MX = Y$.
Ceci montre que tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ a un antécédent par f et donc f est surjective ou encore $\mathrm{Im}(f) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Puisque $(P_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la famille $(f(P_{i,j}))_{1\leqslant i,j\leqslant n} = (P_{i,j}X)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On en extrait une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Les $P_{i,j}X$ qui constituent cette base sont non nuls et vérifient $AP_{i,j}X = (\lambda + \lambda_{i,j})P_{i,j}X$. Ce sont donc des vecteurs propres de A.

Ainsi, il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A et donc A est diagonalisable.

Partie III. Etude de vecteurs propres de φ_A associés à la valeur propre 0

8. On note μ_A le polynôme minimal de A.

• Soit $(\alpha_i)_{0\leqslant i\leqslant m-1} \in \mathbb{R}^m$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k A^k = 0$. Alors le polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k X^k$ est un polynôme de degré au plus $m - 1$ annulateur de A. Puisque le polynôme minimal de A est de degré m, on en déduit que $P = 0$ c'est-à-dire $\alpha_0 = \ldots = \alpha_{m-1} = 0$. Ceci montre que la famille $\left(I_n, A, \ldots, A^{m-1}\right)$ est une famille libre de $\mathbb{R}[A]$.

• Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. La division euclidienne de P par μ_A fournit deux polynômes Q et R tels que $P = Q \times \mu_A + R$ et $\deg(R) \leqslant \deg(\mu_A) - 1 = m - 1$. En posant $R = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k X^k$, on obtient

$$P(A) = Q(A) \times \mu_A(A) + R(A) = R(A) = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k A^k,$$

et donc $P(A) \in \text{Vect}\left(I_n, A, \dots, A^{m-1}\right)$. Ceci montre que la famille $\left(I_n, A, \dots, A^{m-1}\right)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}[A]$ et finalement

$$\boxed{\text{la famille } \left(I_n, A, \dots, A^{m-1}\right) \text{ est une base de } \mathbb{R}[A].}$$

9. On sait que tout polynôme en A commute avec A et donc pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\varphi_A(P(A)) = 0$. Par suite, $\mathbb{R}[A] \subset \text{Ker}\,(\varphi_A)$. D'après la question précédente, on en déduit que

$$\dim(\text{Ker}\,(\varphi_A)) \geqslant \dim(\mathbb{R}[A]) = m.$$

10. *Un cas d'égalité*

(a) Puisque $\text{card}\,(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n} = n = \dim(\mathbb{R}^n) < +\infty$, il suffit de montrer que la famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre.

Supposons par l'absurde cette famille liée. Il existe alors $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0$ ou encore $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-i}(y) = 0$. Soit $i_0 \in [\![1, n]\!]$ le dernier indice i pour lequel on a $\alpha_i = 0$. Par définition de i_0, on a $\sum_{i=1}^{i_0} \alpha_i u^{n-i}(y) = 0$.

On calcule l'image des deux membres de cette égalité par u^{i_0-1}, on obtient $\sum_{i=1}^{i_0} \alpha_i u^{n-i+i_0-1}(y) = 0$ et donc

$$\alpha_{i_0} u^{n-1}(y) = 0,$$

(car pour $i \leqslant i_0 - 1$, $n - i + i_0 - 1 \geqslant n - (i_0 - 1) + i_0 - 1 = n$ et donc $u^{n-i+i_0-1} = 0$). Mais cette dernière égalité est impossible car $\alpha_{i_0} \neq 0$ et $u^{n-1}(y) \neq 0$.

Donc la la famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre et finalement la famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

(b) Soit $B \in \text{Ker}\,(\varphi_A)$. B commute avec A et donc v commute avec u puis plus généralement v commute avec tout polynôme en u.

Supposons $v(y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Alors, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{aligned} v(e_k) &= v(u^{n-k}(y)) = u^{n-k}(v(y)) = u^{n-k}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-k+n-i}(y) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-i}\right)(u^{n-k}(y)) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-i}\right)(e_k). \end{aligned}$$

Ainsi, les deux endomorphismes v et $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-i}$ coïncident sur une base de $\mathbb{R}^n$. On en déduit que ces endomorphismes sont égaux ou encore $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-i}$.

(c) Soit $B \in \text{Ker}\,(\varphi_A)$. Avec les notations précédentes, on peut décomposer le vecteur $v(y)$ dans la base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sous la forme $v(y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. La question précédente montre alors que $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-i}$ ou encore $B = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{n-i} A^i$.

Ainsi, tout élément de $\text{Ker}\,(\varphi_A)$ est une combinaison linéaire de I_n, A, $\dots$,A^{n-1} ou encore

$$\text{Ker}\,(\varphi_A) \subset \text{Vect}\left(I_n, A, \dots, A^{n-1}\right).$$

En particulier, $\dim(\text{Ker}(\varphi_A)) \leqslant n$. D'autre part, puisque A est nilpotente d'indice n, le polynôme minimal de A est un diviseur unitaire du polynôme X^n et donc de la forme X^k, $1 \leqslant k \leqslant n$ mais n'est pas de la forme X^k, $1 \leqslant k < n$. Donc

$$\mu_A = X^n.$$

D'après la question 9., $\dim(\text{Ker}(\varphi_A)) \geqslant n$ et finalement $\dim(\text{Ker}(\varphi_A)) = n$.

En résumé, $\text{Ker}(\varphi_A) \subset \text{Vect}\left(I_n, A, \dots, A^{n-1}\right)$ et $\dim(\text{Ker}(\varphi_A)) = n = \dim\left(\text{Vect}\left(I_n, A, \dots, A^{n-1}\right)\right) < +\infty$. On en déduit que

$$\boxed{\text{Ker}(\varphi_A) = \text{Vect}\left(I_n, A, \dots, A^{n-1}\right) = \mathbb{R}_{n-1}[A].}$$

11. *Cas où u est diagonalisable*

(a) • Si $B \in \text{Ker}(\varphi_A)$, alors B commute avec A puis u et v commutent. On sait alors que v laisse stable les sous-espaces propres de u. Redémontrons-le.
Soit $k \in [\![1, p]\!]$. Soit $x \in E_u(\lambda_k)$. Alors $u(x) = \lambda_k x$ puis $u(v(x)) = v(u(x)) = \lambda_k v(x)$ et donc $v(x) \in E_u(\lambda_k)$.

• Supposons que v laisse stable chaque $E_u(\lambda_k)$, $1 \leqslant k \leqslant p$.
Soit $k \in [\![1, p]\!]$. La restriction v_k de v à $E_u(\lambda_k)$ induit un endomorphisme de $E_u(\lambda_k)$. D'autre part, la restriction u_k de u à $E_u(\lambda_k)$ est $\lambda_k \text{Id}_{E_u(\lambda_k)}$. On en déduit que

$$(v \circ u)_{E_u(\lambda_k)} = v_k \circ u_k = u_k \circ v_k = (u \circ v)_{E_u(\lambda_k)}.$$

Maintenant, puisque u est diagonalisable, les $E_u(\lambda_k)$, $1 \leqslant k \leqslant p$, sont supplémentaires. Par suite, les endomorphismes $v \circ u$ et $u \circ v$ coïncident sur des sous-espaces supplémentaires et donc $v \circ u = u \circ v$ ou encore $B \in \text{Ker}(\varphi_A)$.

(b) Soit $\mathscr{B}$ une base adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{1 \leqslant k \leqslant p} E_u(\lambda_k)$.

Si $B \in \text{Ker}(\varphi_A)$, v laisse stable chacun des $E_u(\lambda_k)$, $1 \leqslant k \leqslant p$. La matrice de v dans $\mathscr{B}$ est donc diagonale par blocs de la forme $B' = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & M_p \end{pmatrix}$ où $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $M_k \in \mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{R})$.

Réciproquement supposons que la matrice de v dans $\mathscr{B}$ soit de la forme précédente. La matrice de u dans $\mathscr{B}$ s'écrit $A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{m_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_p I_{m_p} \end{pmatrix}$ et un calcul par blocs montre immédiatement $A'B' = B'A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 M_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_p M_p \end{pmatrix}$.
Par suite, $v \circ u = u \circ v$ puis $B \in \text{Ker}(\varphi_A)$.

En résumé, $B \in \text{Ker}(\varphi_A)$ si et seulement si la matrice de v dans $\mathscr{B}$ est diagonale par blocs de la forme $\begin{pmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & M_p \end{pmatrix}$ où $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $M_k \in \mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{R})$.

(c) Notons P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à la base $\mathscr{B}$. D'après la question précédente, $\text{Ker}(\varphi_A)$ est l'ensemble des matrices de la forme $P \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & M_p \end{pmatrix} P^{-1}$ où $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $M_k \in \mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{R})$.

Comme l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\text{Ker}(\varphi_A)$ est isomorphe à l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & M_p \end{pmatrix}$ où $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $M_k \in \mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{R})$, sous espace lui-même isomorphe à $\prod_{k=1}^{p} \mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{R})$.
On en déduit que

$$\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A)) = \dim\left(\prod_{k=1}^{p}\mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{R})\right) = \sum_{k=1}^{p}\dim(\mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{R})) = \sum_{k=1}^{p} m_k^2.$$

$$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A)) = \sum_{k=1}^{p} m_k^2.}$$

(d)

- Si $p = 7$, u admet 7 valeurs propres simples. Dans ce cas, $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A)) = 7 \times 1^2 = 7$.
- Si $p = 6$, u admet 5 valeurs propres simples et une valeur propre double. $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A)) = 5 \times 1^2 + 2^2 = 9$.
- Si $p = 5$,
  - ou bien u admet 4 valeurs propres simples et une valeur propre triple. Dans ce cas, $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A)) = 4 \times 1^2 + 3^2 = 13$.
  - ou bien u admet 3 valeurs propres simples et deux valeurs propres doubles et $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A)) = 3 \times 1^2 + 2 \times 2^2 = 11$.
- Si $p = 4$,
  - ou bien u admet 3 valeurs propres simples et une valeur propre d'ordre 4 et $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A)) = 3 \times 1^2 + 4^2 = 19$.
  - ou bien u admet 2 valeurs propres simples, une double et une triple et $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A)) = 2 \times 1^2 + 2^2 + 3^2 = 15$.
  - ou bien u admet 1 valeur propre simple et 3 doubles et $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A)) = 1^2 + 3 \times 2^2 = 13$.
- Si $p = 3$,
  - ou bien u admet 2 valeurs propres simples et une valeur propre d'ordre 5 et $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A)) = 2 \times 1^2 + 5^2 = 27$.
  - ou bien u admet 1 valeur propre simple et 2 triples et $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A)) = 1^2 + 2 \times 3^2 = 19$.
  - ou bien u admet 1 valeur propre simple, une double et une d'ordre 4 et $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A)) = 1^2 + 2^2 + 4^2 = 21$.
  - ou bien u admet 2 valeurs propres doubles et une valeur propre d'ordre 3 et $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A)) = 2 \times 2^2 + 3^2 = 17$.
- Si $p = 2$,
  - ou bien u admet 1 valeur propre simple et une valeur propre d'ordre 6 et $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A)) = 1^2 + 6^2 = 37$.
  - ou bien u admet 1 valeur propre double et une valeur propre d'ordre 5 et $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A)) = 2^2 + 5^2 = 29$.
  - ou bien u admet 1 valeur propre triple et une valeur propre d'ordre 4 et $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A)) = 3^2 + 4^2 = 25$.
- Si $p = 1$, u admet 1 valeur propre d'ordre 7. Dans ce cas, $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A)) = \times 7^2 = 49$.

$$\boxed{\text{Si } n = 7,\ \dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A)) \in \{7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 22, 25, 29, 37, 49\}.}$$

Partie IV. Etude de vecteurs propres de φ_A associés à une valeur propre non nulle

12. Le résultat est clair si $k = 0$ ou $k = 1$. Soit $k \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}\varphi_A\left(B^k\right) &= AB^k - B^kA = \sum_{i=0}^{k-1}(B^iAB^{k-i} - B^{i+1}AB^{k-i-1}) \text{ (somme télescopique)}\\ &= \sum_{i=0}^{k-1} B^i(AB - BA)B^{k-i-1} = \sum_{i=0}^{k-1} B^i(\alpha B)B^{k-i-1} = \alpha\sum_{i=0}^{k-1} B^k\\ &= \alpha k B^k.\end{aligned}$$

13. Posons $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$. Alors $XP' = \sum_{k=0}^{m} k a_k X^k$ puis

$$\begin{aligned}\varphi_A(P(B)) &= AP(B) - P(B)A = \sum_{k=0}^{m} a_k(AB^k - B^kA) = \alpha\sum_{k=0}^{m} a_k k B^k\\ &= \alpha BP'(B).\end{aligned}$$

14. Puisque $\alpha \neq 0$, $B\pi_B'(B) = \dfrac{1}{\alpha}\varphi_A(\pi_B(B)) = \dfrac{1}{\alpha}\varphi_A(0) = 0$. Donc le polynôme $X\pi_B'$ est annulateur de B. Ce polynôme est par suite un multiple de π_B et il existe un polynôme Q tel que $X\pi_B' = Q\pi_B$. D'autre part, les polynômes $X\pi_B'$ et π_B ont même degré non nul et donc Q est une constante K non nulle. Enfin, π_B est unitaire et le coefficient dominant de $X\pi_B'$ est d. Donc $K = d$ et finalement

$$\boxed{X\pi_B' = d\pi_B.}$$

15. Soit λ une éventuelle racine complexe non nulle de π_B. On note α on ordre de multiplicité. On sait que si $\alpha = 1$, λ n'est pas racine de π_B' et si $\alpha \geqslant 2$, λ est racine de π_B' d'ordre $\alpha - 1$. Dans tous les cas, λ n'est pas racine de π_B' d'ordre α.

D'autre part, λ est racine de $d\pi_B = X\pi_B'$ d'ordre α puis, λ étant non nul, λ est racine de π_B' d'ordre α. Ceci est une contradiction et donc π_B n'admet aucun nombre complexe non nul pour racine. Comme π_B a au moins une racine dans $\mathbb{C}$, on en déduit que π_B est un polynôme unitaire de degré d admettant 0 pour unique racine et donc $\pi_B = X^d$.

L'égalité $\pi_B(B) = 0$ fournit

$$\boxed{B^d = 0.}$$

