SESSION 2011

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE PSI

MATHEMATIQUES 1

Partie I. Une étude de séries

I.1. Etude de la fonction L **I.1.1.** On sait que la série entière considérée a pour rayon de convergence 1 et que pour tout $x \in]-1,1[$, $L(x) = \ln(1+x)$.

La suite $\left(\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}\right)_{k\geqslant 1}$ est alternée en signe et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. Donc la série de terme général $\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$, $k \geqslant 1$, converge d'après le critère spécial aux séries alternées et finalement, L est définie sur $]-1,1]$.

I.1.2. Soient $x \in [0,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$.

La suite $\left(\dfrac{(-1)^{k-1}x^k}{k}\right)_{k\geqslant 1}$ est alternée en signe. De plus, sa valeur absolue, à savoir $\left(\dfrac{x^k}{k}\right)_{k\geqslant 1}$ est une suite décroissante en tant que produit de deux suites positives et décroissantes et tend vers 0. D'après une majoration classique du reste à l'ordre n d'une série alternée,

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}\right| \leqslant \left|\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}\right| = \frac{x^n}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi, $\forall x \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ et on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sup\{|R_n(x)|,\ |x \in [0,1]\} \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Puisque $\dfrac{1}{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, il en est de même de $\sup\{|R_n(x)|,\ |x \in [0,1]\}$. On a montré que la suite de fonctions $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$ ou encore que la série de fonctions de terme général $x \mapsto \dfrac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$, $k \geqslant 1$, converge uniformément vers la fonction L sur $[0,1]$. Puisque chaque fonction $x \mapsto \dfrac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$ est continue sur $[0,1]$, on sait alors que L est continue sur $[0,1]$.

En particulier la fonction L est continue en 1 et on en déduit que

$$L(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} L(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \ln(1+x) = \ln 2.$$

I.2. Etude de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k}\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)$

I.2.1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{3p} a_k &= \sum_{k=1}^{p}\left(\frac{1}{3k-2}+\frac{1}{3k-1}-\frac{2}{3k}\right)=\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{1}{3k-2}+\frac{1}{3k-1}+\frac{1}{3k}-\frac{3}{3k}\right)\\
&=\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{1}{3k-2}+\frac{1}{3k-1}+\frac{1}{3k}\right)-\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{3p}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}=\sum_{k=p+1}^{3p}\frac{1}{k}\\
&=\sum_{h=1}^{2p}\frac{1}{p+h}\ \text{(en posant } h=k-p \text{ ou encore } k=p+h)\\
&=\frac{1}{p}\sum_{h=1}^{2p}\frac{1}{1+\frac{h}{p}}.
\end{aligned}$$

I.2.2. Pour $x \in [0,2]$, posons $f(x)=\frac{1}{1+x}$. Soit alors $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $h \in [\![0,2p]\!]$, posons $x_h=\frac{h}{p}$. $(x_h)_{0\leqslant h\leqslant 2p}$ est une subdivision de $[0,2]$ à pas constant à savoir $\frac{1}{p}$ et

$$\frac{1}{p}\sum_{h=1}^{2p}\frac{1}{1+\frac{h}{p}}=\frac{1}{p}\sum_{h=1}^{2p}f(x_h)=\sum_{h=1}^{2p}(x_{h+1}-x_h)f(x_h).$$

Puisque la fonction f est continue sur $[0,2]$, on sait que quand le pas $\frac{1}{p}$ tend vers 0, la somme de Riemann ci-dessus tend vers $\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2\frac{1}{1+x}\,dx=\ln 3$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $p=E\left(\frac{n}{3}\right)$ de sorte que $p\leqslant\frac{n}{3}<p+1$ ou encore $3p\leqslant n<3p+3$. En posant $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$, on a

- $|S_n-\ln 3|=|S_{3p}-\ln 3|$ si $n=3p$,
- $|S_n-\ln 3|=|S_{3p}-\ln 3+a_{3p+1}|\leqslant|S_{3p}-\ln 3|+|a_{3p+1}|$ si $n=3p+1$,
- $|S_n-\ln 3|=|S_{3p}-\ln 3+a_{3p+1}+a_{3p+2}|\leqslant|S_{3p}-\ln 3|+|a_{3p+1}|+|a_{3p+2}|$ si $n=3p+2$,

et dans tous les cas,

$$|S_n-\ln 3|\leqslant|S_{3p}-\ln 3|+|a_{3p+1}|+|a_{3p+2}|=|S_{3p}-\ln 3|+\frac{1}{3p+1}+\frac{1}{3p+2}\leqslant|S_{3E(n/3)}-\ln 3|+\frac{2}{n}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, $|S_{3E(n/3)}-\ln 3|$ tend vers 0 d'après la question précédente et donc $|S_{3E(n/3)}-\ln 3|+\frac{2}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On en déduit que la suite (S_n) converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty}=S_n=\ln 3$.

I.2.3. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, posons $u_n=\frac{1}{k}\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)$.

Pour $p\in\mathbb{N}^*$, $u_{3p}=\frac{1}{3p}=\frac{-1}{2}a_{3p}$, $u_{3p+1}=-\frac{1}{2(3p+1)}=\frac{-1}{2}a_{3p+1}$ et $u_{3p+2}=-\frac{1}{2(3p+2)}=\frac{-1}{2}a_{3p+2}$.

En résumé, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $u_k=-\frac{1}{2}a_k$. On en déduit que la série de terme général u_k, $k\geqslant 1$ converge et a pour somme $-\frac{1}{2}\ln 3=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).}$$

I.3. Etude des séries $\sum_{k\geqslant 1}\frac{\cos(k\alpha)}{k}$ et $\sum_{k\geqslant 1}\frac{\sin(k\alpha)}{k}$ **I.3.1.** Soit $t\in]0,2\pi[$ et $n\in\mathbb{N}^*$. $S_n(t)$ est une terme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $e^{it}\neq 1$. Donc

$$S_n(t) = e^{it} \times \frac{1-(e^{it})}{1-e^{it}} = \frac{e^{i(n+1)t} - e^{it}}{e^{it}-1} = \varphi(t)[e^{i(n+1)t} - e^{it}].$$

I.3.2. Puisque $[\pi, \alpha] \subset]0, 2\pi[$, la fonction $t \mapsto e^{it} - 1$ ne s'annule pas sur $[\pi, \alpha]$. Donc, φ est de classe C^1 sur $[\pi, \alpha]$ en tant qu'inverse d'une fonction de classe C^1 sur $[\pi, \alpha]$ ne s'annulant pas sur $[\pi, \alpha]$.

I.3.3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les fonction $t \mapsto \dfrac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)}$ et $t \mapsto \varphi(t)$ sont de classe C^1 sur le segment $[\alpha, \pi]$. On peut donc effectuer une intégration par parties.

$$\begin{aligned}
\int_\pi^\alpha e^{i(n+1)t}\varphi(t)\,dt &= \left[\frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)}\varphi(t)\right]_\pi^\alpha - \int_\pi^\alpha \frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)}\varphi'(t)\,dt \\
&= \frac{1}{i(n+1)}\left(e^{i(n+1)\alpha}\varphi(\alpha) - e^{i(n+1)\pi}\varphi(\pi) - \int_\pi^\alpha e^{i(n+1)t}\varphi'(t)\,dt\right),
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
\left|\int_\pi^\alpha e^{i(n+1)t}\varphi(t)\,dt\right| &= \left|\frac{1}{i(n+1)}\right| \left|e^{i(n+1)\alpha}\varphi(\alpha) - e^{i(n+1)\pi}\varphi(\pi) - \int_\pi^\alpha e^{i(n+1)t}\varphi'(t)\,dt\right| \\
&\leqslant \frac{1}{n+1}\left(|\varphi(\alpha)| + |\varphi(\pi)| + \int_\pi^\alpha |\varphi'(t)|\,dt\right)
\end{aligned}$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_\pi^\alpha e^{i(n+1)t}\varphi(t)\,dt = 0$.

I.3.4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par linéarité de l'intégrale,

$$\int_\pi^\alpha S_n(t)\,dt = \sum_{k=1}^n \int_\pi^\alpha e^{ikt}\,dt = \sum_{k=1}^n \left[\frac{e^{ikt}}{ik}\right]_\pi^\alpha = \frac{1}{i}\left(\sum_{k=1}^n \frac{e^{ik\alpha}}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}\right).$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \frac{e^{ik\alpha}}{k} &= -\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} + i\int_\pi^\alpha S_n(t)\,dt \\
&= -\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} - i\int_\pi^\alpha e^{it}\varphi(t)\,dt + i\int_\pi^\alpha e^{i(n+1)t}\varphi(t)\,dt.
\end{aligned}$$

D'après la question I.1.2, $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ tend vers $\ln 2$ quand n tend vers $+\infty$ et d'après la question précédente, $\displaystyle\int_\pi^\alpha e^{i(n+1)t}\varphi(t)\,dt$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc, la série de terme général $\dfrac{e^{ik\alpha}}{k}$, $k \geqslant 1$ converge et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\alpha}}{k} = -\ln 2 - i\int_\pi^\alpha e^{it}\varphi(t)\,dt.$$

I.3.5. Soit $t \in [\pi, \alpha]$.

$$e^{it}\varphi(t) = \frac{e^{it}}{e^{it}-1} = \frac{e^{it/2} \times e^{it/2}}{e^{it/2}(e^{it/2} - e^{-it/2})} = \frac{e^{it/2}}{2i\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}$$

I.3.6. Ensuite,

$$\begin{aligned}
-\ln 2 - i\int_\pi^\alpha e^{it}\varphi(t)\,dt &= -\ln 2 + \frac{1}{2}\int_\pi^\alpha \frac{e^{it/2}}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)} - \ln 2 - \frac{1}{2}\int_\pi^\alpha \frac{\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}\,dt - \frac{i}{2}\int_\pi^\alpha 1\,dt \\
&= -\ln 2 - \left[\ln\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|\right]_\pi^\alpha + i\frac{\pi-\alpha}{2} = -\ln 2 - \ln\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i\frac{\pi-\alpha}{2}.
\end{aligned}$$

Puisque la série de terme général $\dfrac{e^{ik\alpha}}{k}$, $k \geqslant 1$, converge, il en est de même des séries de termes généraux respectifs $\dfrac{\cos(k\alpha)}{k} = \mathrm{Re}\left(\dfrac{e^{ik\alpha}}{k}\right)$ et $\dfrac{\sin(k\alpha)}{k} = \mathrm{Im}\left(\dfrac{e^{ik\alpha}}{k}\right)$. De plus,

$$\boxed{\forall \alpha \in [\pi, 2\pi[,\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(k\alpha)}{k} = -\ln 2 - \ln\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \text{ et } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\alpha)}{k} = \frac{\pi - \alpha}{2}.}$$

Quand $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$, on obtient en particulier,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) = -\ln 2 - \ln\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\ln 2 - \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

et on retrouve le résultat de la question I.2.3.

Partie II. Limite d'une intégrale

II.1. Existence de $\tilde{f}_g(x)$ • Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto f(t)g(xt)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$. De plus, quand t tend vers $+\infty$, $f(t)g(xt) = O(f(t))$ car la fonction g est bornée sur $[0, +\infty[$. Puisque la fonction f est par hypothèse intégrable sur $[0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto f(t)g(xt)$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ et finalement la fonction $t \mapsto f(t)g(xt)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. On en déduit l'existence de $\tilde{f}_g(x)$.

• Notons $\|g\|_\infty$ la borne supérieure de $|g|$ sur $[0, +\infty[$ et $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\, dt$. Pour tout $x > 0$,

$$|\tilde{f}_g(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} |f(t)||g(xt)|\, dt \leqslant \|g\|_\infty \int_0^{+\infty} |f(t)\, dt = I\|g\|_\infty.$$

Donc, la fonction $\tilde{f}_g$ est bornée sur $[0, +\infty[$.

• Posons $\begin{array}{cccc} \Phi : &]0, +\infty[\times[0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & (x, t) & \mapsto & f(t)g(x,t) \end{array}$ de sorte que pour tout $x > 0$, $\tilde{f}_g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \Phi(x, t)\, dt$.

- Pour tout $x \in]0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \Phi(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
- Pour tout $t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \Phi(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$
- Pour tout $(x, t) \in]0, +\infty[\times[0, +\infty[$, $|\Phi(x, t)| \leqslant \|g\|_\infty |f(t)|$ où la fonction $t \mapsto \|g\|_\infty |f(t)|$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$.

Le théorème de continuité des intégrales à paramètres permet d'affirmer que $\tilde{f}_g$ est continue sur $]0, +\infty[$.

II.2. Limite de $\tilde{f}_g(x)$ **II.2.1.** Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est intégrable sur $[0, +\infty[$, on sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} |f(t)|\, dt = 0$. Par suite, il existe un réel $A > 0$ tel que $\forall x \geqslant A$, $\displaystyle\int_x^{+\infty} |f(t)|\, dt \leqslant \epsilon$. En particulier, $\displaystyle\int_A^{+\infty} |f(t)|\, dt \leqslant \epsilon$.

II.2.2. Soit $x > 0$. Les deux fonctions $t \mapsto \dfrac{e^{ixt}}{ix}$ et $t \mapsto f(t)$ sont de classe C^1 sur le segment $[0, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\left|\int_0^A f(t)e^{ixt}\, dt\right| = \left|\left[\frac{f(t)e^{it}}{ix}\right]_0^A - \frac{1}{ix}\int_0^A f'(t)e^{ixt}\right| \leqslant \frac{1}{x}\left(|f(0)| + |f(A)| + \int_0^A |f'(t)|\, dt\right).$$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left(|f(0)| + |f(A)| + \int_0^A |f'(t)|\, dt\right) = 0$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^A f(t)e^{ixt}\, dt = 0$.

II.2.3. Soient $\varepsilon > 0$ puis $A > 0$ tel que $\displaystyle\int_A^{+\infty} |f(t)|\, dt \leqslant \epsilon$. Soit $x > 0$.

$$|\tilde{f}_g(x)| = \left|\int_0^A f(t)e^{ixt}\, dt + \int_A^{+\infty} f(t)e^{ixt}\, dt\right| \leqslant \left|\int_0^A f(t)e^{ixt}\, dt\right| + \int_A^{+\infty} |f(t)|\, dt \leqslant \left|\int_0^A f(t)e^{ixt}\, dt\right| + \varepsilon.$$

D'après la question précédente, $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^A f(t)e^{ixt}\ dt = 0$ et donc il existe $B \geqslant A$ tel que pour tout $x \geqslant B$, $\left|\int_0^A f(t)e^{ixt}\ dt\right| < \varepsilon$. Pour $x \geqslant B$, on a alors

$$|\tilde{f}_g(x)| \leqslant \left|\int_0^A f(t)e^{ixt}\ dt\right| + \varepsilon < 2\varepsilon,$$

et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\tilde{f}_g(x) = 0$.

II.3. Etude pour une fonction f particulière **II.3.1.** Soit $\gamma \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\theta(\gamma) &= \int_0^\pi e^{\gamma y}\sin(y)\ dy = \mathrm{Im}\left(\int_0^\pi e^{\gamma y}e^{iy}\ dy\right) = \mathrm{Im}\left(\int_0^\pi e^{(\gamma+i)y}\ dy\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(\gamma+i)y}}{\gamma+i}\right]_0^\pi\right) \text{ (car } \gamma+i\neq 0)\\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{e^{(\gamma+i)\pi}-1}{\gamma+i}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{(\gamma-i)(-e^{\gamma\pi}-1)}{\gamma^2+1}\right)\\
&= \frac{e^{\gamma\pi}+1}{\gamma^2+1}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\theta(\gamma) = \int_0^\pi e^{\gamma y}\sin(y)\ dy = \frac{e^{\gamma\pi}+1}{\gamma^2+1}.}$$

II.3.2. Soit $x > 0$. Puisque la fonction g est bornée sur $]0, +\infty[$, $\tilde{E}(x)$ existe d'après la question II.1. En posant $u = xt$, on obtient

$$\tilde{E}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}|\sin(xt)|\ dt = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u}{x}}|\sin(u)|\ du.$$

II.3.3. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $x > 0$. En posant $t = u - k\pi$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-\frac{u}{x}}|\sin(u)|\ du &= \int_0^\pi e^{-\frac{t+k\pi}{x}}|\sin(t)|\ dt = e^{-\frac{k\pi}{x}}\int_0^\pi e^{-\frac{t}{x}}\sin(t)\ dt = e^{-\frac{k\pi}{x}}\theta\left(-\frac{1}{x}\right)\\
&= e^{-\frac{k\pi}{x}}\frac{x^2\left(e^{-\frac{\pi}{x}}+1\right)}{x^2+1}.
\end{aligned}$$

II.3.4. Soit $x > 0$. Alors, $0 < e^{-\frac{\pi}{x}} < 1$ et donc la série géométrique de terme général $e^{-\frac{k\pi}{x}} = \left(e^{-\frac{\pi}{x}}\right)^k$, $k \geqslant 0$, converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\frac{k\pi}{x}} = \frac{1}{1-e^{-\frac{\pi}{x}}}.$$

II.3.5. Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}
\tilde{E}(x) &= \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u}{x}}|\sin(u)|\ du \text{ (d'après la question II.3.2)}\\
&= \frac{1}{x}\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^{n\pi} e^{-\frac{u}{x}}|\sin(u)|\ du\right) = \frac{1}{x}\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-\frac{u}{x}}|\sin(u)|\ du\right)\\
&= \frac{1}{x}\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{-\frac{k\pi}{x}}\theta\left(-\frac{1}{x}\right)\right) \text{ (d'après la question II.3.3)}\\
&= \frac{1}{x}\theta\left(-\frac{1}{x}\right)\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\frac{k\pi}{x}} = \frac{1}{x}\times\frac{x^2\left(e^{-\frac{\pi}{x}}+1\right)}{x^2+1}\times\frac{1}{1-e^{-\frac{\pi}{x}}}\\
&= \frac{x\left(1+e^{-\frac{\pi}{x}}\right)}{(x^2+1)\left(1-e^{-\frac{\pi}{x}}\right)}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x>0,\ \tilde{E}(x)=\frac{x\left(1+e^{-\frac{\pi}{x}}\right)}{(x^2+1)\left(1-e^{-\frac{\pi}{x}}\right)}.}$$

Quand x tend vers $+\infty$, $\tilde{E}(x)\sim\dfrac{x(1+1)}{x^2\left(-\left(-\dfrac{\pi}{x}\right)\right)}=\dfrac{2}{\pi}$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\tilde{E}(x)\frac{2}{\pi}.}$$

II.4. Etude générale **II.4.1. Lemme préliminaire** Pour $k\geqslant 1$ et $t\in\mathbb{R}$, posons $h_k(t)=\dfrac{\cos(2kt)}{4k^2-1}$. Chaque fonction h_k est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $k\geqslant 1$. Pour tout $t\in\mathbb{R}$, $|h_k(t)|\leqslant\dfrac{1}{4k^2-1}$ et donc $\|h_k\|_\infty\leqslant\dfrac{1}{4k^2-1}$. Puisque la série numérique de terme général $\dfrac{1}{4k^2-1}$ converge (car $\dfrac{1}{4k^2-1}\underset{k\to+\infty}{=}O\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$), on en déduit que la série de fonctions de terme général h_k converge normalement et en particulier uniformément et simplement sur $\mathbb{R}$.

Puisque chaque fonction h_k, $k\geqslant 1$, est définie sur $\mathbb{R}$ et que la série de fonctions de terme général h_k, $k\geqslant 1$, converge simplement sur $\mathbb{R}$, la fonction h est définie sur $\mathbb{R}$.

Puisque chaque fonction h_k, $k\geqslant 1$, est continue sur $\mathbb{R}$ et que la série de fonctions de terme général h_k, $k\geqslant 1$, converge uniformément vers la fonction h sur $\mathbb{R}$, la fonction h est continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de g converge vers g sur $\mathbb{R}$.
La fonction g est paire et donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $b_n(g)=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n(g)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi g(t)\cos(nt)\ dt=\dfrac{2}{\pi}\int_0^\pi\sin t\cos(nt)\ dt$.

Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$a_n(g)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\sin t\cos(nt)\ dt=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(\sin((n+1)t)\ dt-\sin((n-1)t))\ dt.$$

- $a_1(g)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi\sin t\cos t\ dt=\dfrac{1}{2\pi}\int_0^\pi\sin(2t)\ dt=0$.
- Soit $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$.

$$a_n(g)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(\sin((n+1)t)\ dt-\sin((n-1)t))\ dt=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos((n+1)t)}{n+1}+\frac{\cos((n-1)t)}{n-1}\right]_0^\pi$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{(-1)^{n+1}-1}{n+1}+\frac{(-1)^{n-1}-1}{n-1}\right)=\frac{(1+(-1)^n)}{\pi}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right)=-\frac{2(1+(-1)^n)}{\pi(n^2-1)}.$$

Par suite, pour tout $k\in\mathbb{N}$ (y compris $k=0$), $a_{2k+1}(g)=0$ et pour $k\in\mathbb{N}$,

$$a_{2k}(k)=-\frac{4}{\pi(4k^2-1)}.$$

Puisque g est somme de sa série de Fourier sur $\mathbb{R}$, on en déduit que pour tout réel t,

$$|\sin t|=g(t)=\frac{a_0(g)}{2}+\sum_{n\geqslant 1}(a_n(g)\cos(nt)+b_n(g)\sin(nt))=\frac{a_0(g)}{2}+\sum_{k\geqslant 1}a_{2k}(g)\cos(2kt)$$
$$=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(2kt)}{4k^2-1}=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}h(t).$$

II.4.2. Limite de $\tilde{f}(x)$ dans le cas C^1

- Soit $x>0$.

$$\tilde{f}(x)=\int_0^{+\infty}f(t)|\sin(xt)|\ dt=\int_0^{+\infty}f(t)\left(\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}h(xt)\right)\ dt.$$

Maintenant, on sait que les fonction f et $t \mapsto f(t)|\sin(xt)|$ sont intégrables sur $[0, +\infty$. Il en est de même de la fonction $t \mapsto f(t)h(xt) = \dfrac{1}{2}f(t) - \dfrac{\pi}{4}f(t)|\sin(xt)|$. On peut donc écrire

$$\tilde{f}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\ dt - \frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)h(xt)\ dt.$$

• Soit $x > 0$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, +\infty[$, posons $h_k(t) = \dfrac{f(t)\cos(2kxt)}{4k^2-1}$ de sorte que pour tout réel $t \in [0, +\infty[$, $f(t)h(xt) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} h_k(t)$.

- Chaque fonction h_k est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
- La série de fonctions de terme général h_k, $k \geqslant 1$, converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction $t \mapsto f(t)h(xt)$ et de plus, la fonction $t \mapsto f(t)h(xt)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} |h_k(t)|\ dt = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{4k^2-1}\int_0^{+\infty}|f(t)\cos(2xkt)|\ dt \leqslant \left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{4k^2-1}\right)\int_0^{+\infty}|f(t)|\ dt < +\infty$.

D'après un théorème d'intégration terme à terme, on a

$$\tilde{f}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\ dt - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{4k^2-1}\int_0^{+\infty} f(t)\cos(2xkt)\ dt.$$

• Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, +\infty[$, posons $f_k(x) = \dfrac{1}{4k^2-1}\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\cos(2xkt)\ dt$ de sorte que pour tout réel $x \in]0, +\infty[$, $\tilde{f}(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ dt - \dfrac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$.

- Pour tout $x > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, $|f_k(x)| \leqslant \dfrac{1}{4k^2-1}\displaystyle\int_0^{+\infty}|f(t)|\ dt$ qui est le terme général d'une série numérique convergente. Donc, la série de fonctions de terme général f_k converge normalement et donc uniformément sur $]0, +\infty[$.
- Soit $k \geqslant 1$. Pour tout $x > 0$, $f_k(x) = \dfrac{1}{4k^2-1}\mathrm{Re}\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{2ikxt}\ dt\right)$. Puisque f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, la question II.2.3 permet d'affirmer que

$$\lim_{x\to+\infty} f_k(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{4k^2-1}\mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} f(t)e^{2ikxt}\ dt\right) = \lim_{y\to+\infty}\frac{1}{4k^2-1}\mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} f(t)e^{iyt}\ dt\right) = 0.$$

D'après le théorème d'interversion des limites, la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$ a une limite réelle quand x tend vers $+\infty$ à savoir

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty} f_k(x)\sum_{k=1}^{+\infty} 0 = 0.$$

Mais alors,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\tilde{f}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\ dt.}$$

Si $f(t) = E(t) = e^{-t}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\tilde{E}(x) = \frac{2}{\pi}$. On confirme ainsi le résultat de la question II.3.5.

II.4.3. Cas d'une fonction continue par morceaux

II.4.3.1. Une limite Soit $x > 0$. En posant $u = xt$, on obtient

$$F(x) = \int_\beta^\delta |\sin(xt)|\ dt = \frac{1}{x}\int_{\beta x}^{\delta x} |\sin(u)|\ du.$$

$p = E\left(\dfrac{\beta x}{\pi}\right) \Leftrightarrow p \leqslant \dfrac{\beta x}{\pi} < p+1 \Leftrightarrow p\pi \leqslant \beta x < (p+1)\pi$ et de même $q\pi \leqslant \delta x < (q+1)\pi$.

Soit $x > \dfrac{\pi}{\delta - \beta}$. Alors $(q+1) - p > \dfrac{\delta x}{\pi} - \dfrac{\beta x}{\pi} > 1$ puis $q > p$ ou encore $q \geqslant p+1$.

Puisque la fonction $u \mapsto |\sin(u)|$ est positive sur $]0, +\infty[$ et que $[(p+1)\pi, q\pi] \subset [\beta x, \delta x] \subset [p\pi, (q+1)\pi] \subset [0, +\infty[$, on peut écrire

$$\int_{(p+1)\pi}^{q\pi} |\sin(u)|\,du \leqslant \int_{\beta x}^{\delta x} |\sin(u)|\,du \leqslant \int_{p\pi}^{(q+1)\pi} |\sin(u)|\,du$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(u)|\,du = \int_0^{\pi} |/sin(v)|\,dv = 2$. Par suite,

$$\int_{(p+1)\pi}^{q\pi} |\sin(u)|\,du = \sum_{k=p+1}^{q-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(u)|\,du = 2(q-p-1),$$

et aussi $\displaystyle\int_{p\pi}^{(q+1)\pi} |\sin(u)|\,du = 2(q-p+1)$. On a ainsi montré que pour tout $x > \dfrac{\pi}{\delta-\beta}$,

$$\frac{2(q-p-1)}{x} \leqslant F(x) \leqslant \frac{2(q-p+1)}{x} \text{ où } p = E\left(\frac{\beta x}{\pi}\right) \text{ et } q = E\left(\frac{\delta x}{\pi}\right) \quad (*).$$

Maintenant, $p \leqslant \dfrac{\beta x}{\pi} < p+1 \Rightarrow\leqslant \dfrac{\beta x}{\pi} - 1 < p \leqslant \dfrac{\beta x}{\pi} \Rightarrow 1 - \dfrac{\pi}{\beta x} < \dfrac{p}{(\beta x)/\pi} \leqslant 1$. D'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{p}{(\beta x)/\pi} = 1$ ou encore $p \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\beta x}{\pi}$ ou enfin $p \underset{x\to+\infty}{=} \dfrac{\beta x}{\pi} + o(x)$. De même, $q \underset{x\to+\infty}{=} \dfrac{\delta x}{\pi} + o(x)$. Mais alors,

$$\frac{2(q-p)}{x} \underset{x\to+\infty}{=} \frac{2\left(\dfrac{\delta x}{\pi} - \dfrac{\beta x}{\pi}\right) + o(x)}{x} = \frac{2(\delta-\beta)}{\pi} + o(1).$$

Puisque d'autre part, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, les deux membres de l'encadrement $(*)$ tendent vers $\dfrac{2(\delta-\beta)}{\pi}$ quand x tend vers $+\infty$. Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{2(\delta-\beta)}{\pi}.}$$

II.4.3.2. Limite de $\tilde{f}(x)$ dans le cas d'une fonction continue par morceaux

• Supposons que $J = [a, b]$ soit un segment contenu dans $[0, +\infty[$ et que f soit une fonction en escalier sur $[a, b]$ (et nulle en dehors de $[a, b]$). Il existe une subdivision $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$ de $[a, b]$ telle que sur chaque $]x_k, x_{k+1}[$, la fonction f soit une constante f_k. Alors, pour $x > 0$,

$$\tilde{f}(x) = \int_J f(t)|\sin(xt)|\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} f_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} |\sin(xt)|\,dt.$$

D'après la question III.4.3.1, $\tilde{f}(x)$ a une limite réelle quand x tend vers $+\infty$ à savoir

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \tilde{f}(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} f_k \lim_{x\to+\infty} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |\sin(xt)|\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} f_k \frac{2(x_{k+1}-x_k)}{\pi} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)f_k \\ &= \frac{2}{\pi}\int_J f(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\,dt.\end{aligned}$$

• Supposons que $J = [a, b]$ soit un segment contenu dans $[0, +\infty[$ et que f soit une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ (et nulle en dehors de $[a, b]$).

Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe une fonction g en escalier sur $J = [a, b]$ telle que $\forall x \in [a, b]$, $|f(x) - g(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$. Pour $x > 0$ donné, on écrit alors

$$\begin{aligned}\left|\tilde{f}(x) - \frac{2}{\pi}\int_J f(t)\,dt\right| &= \left|\int_J (f(t)-g(t))|\sin(xt)|\,dt + \int_J g(t)|\sin(xt)|\,dt - \frac{2}{\pi}\int_J g(t)\,dt - \frac{2}{\pi}\int_J (f(t)-g(t))\,dt\right| \\ &\leqslant \int_a^b |f(t)-g(t)|\,dt + \left|\int_J g(t)|\sin(xt)|\,dt - \frac{2}{\pi}\int_J g(t)\,dt\right| + \frac{2}{\pi}\int_a^b |f(t)-g(t)|\,dt \\ &< (b-a)\frac{\varepsilon}{3(b-a)} + \left|\int_J g(t)|\sin(xt)|\,dt - \frac{2}{\pi}\int_J g(t)\,dt\right| + \frac{2}{\pi}\frac{\varepsilon}{3(b-a)} \\ &< \left|\int_J g(t)|\sin(xt)|\,dt - \frac{2}{\pi}\int_J g(t)\,dt\right| + \frac{2\varepsilon}{3}\end{aligned}$$

Maintenant, d'après l'étude du premier cas, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\int_J g(t)|\sin(xt)|\,dt - \frac{2}{\pi}\int_J g(t)\,dt\right| = 0$ et donc il existe $A > 0$ tel que $\forall x \geqslant A$, $\left|\int_J g(t)|\sin(xt)|\,dt - \frac{2}{\pi}\int_J g(t)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{3}$ et donc $\left|\tilde{f}(x) - \frac{2}{\pi}\int_J f(t)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

On a montré que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A > 0/\ \forall x \geqslant A$, $\left|\tilde{f}(x) - \frac{2}{\pi}\int_J f(t)\,dt\right| < \varepsilon$ et donc encore une fois que $\lim\limits_{x\to+\infty}\tilde{f}(x) = \frac{2}{\pi}\int_J f(t)|\sin(xt)|\,dt$ quand J est un segment contenu dans $[0, +\infty[$ et f est une fonction continue par morceaux sur J et nulle en dehors de J.

• Supposons finalement que f soit une fonction continue par morceaux sur $[0, +\infty[$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$, il existe $A > 0$ tel que $\int_A^{+\infty} |f(t)|\,dt < \frac{\pi\varepsilon}{4(\pi+1)}$. On note g la fonction qui coïncide avec f sur $[0, A]$ et qui est nulle sur $[A, +\infty[$.

$$\begin{aligned}\left|\tilde{f}(x) - \frac{2}{\pi}\int_J f(t)\,dt\right| &= \left|\int_0^{+\infty} (f(t)-g(t))|\sin(xt)|\,dt + \int_0^{+\infty} g(t)|\sin(xt)|\,dt - \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} g(t)\,dt - \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} (f(t)-g(t))\,dt\right| \\ &= \left|\int_A^{+\infty} f(t)|\sin(xt)|\,dt + \int_0^{A} g(t)|\sin(xt)|\,dt - \frac{2}{\pi}\int_0^{A} g(t)\,dt - \frac{2}{\pi}\int_A^{+\infty} f(t)\,dt\right| \\ &\leqslant \left|\int_0^{A} g(t)|\sin(xt)|\,dt - \frac{2}{\pi}\int_0^{A} g(t)\,dt\right| + \left(2 + \frac{2}{\pi}\right)\int_A^{+\infty} |f(t)|\,dt \\ &< \left|\int_0^{A} g(t)|\sin(xt)|\,dt - \frac{2}{\pi}\int_0^{A} g(t)\,dt\right| + \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

D'après l'étude précédente, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\int_0^A g(t)|\sin(xt)|\,dt - \frac{2}{\pi}\int_0^A g(t)\,dt\right| = 0$ et donc il existe $B > 0$ tel que pour $x \geqslant B$, $\left|\int_0^A g(t)|\sin(xt)|\,dt - \frac{2}{\pi}\int_0^A g(t)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ et donc $\left|\tilde{f}(x) - \frac{2}{\pi}\int_J f(t)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. On a de nouveau montré que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\tilde{f}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\,dt.}$$

