SESSION 2011

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE PC

MATHEMATIQUES 1

Partie I : DROITES DES MOINDRES CARRÉS DANS UN CAS PARTICULIER

I.1. $\det_{(i,j)}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \begin{vmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\alpha \neq 0$ et donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

I.2. **I.2.a.** Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. $p_{a,b}(A) = (0,b)$, $p_{a,b}(B) = (0,b)$ et $p_{a,b}(C) = (\alpha, a\alpha + b)$.

$$\begin{aligned} f_0(a,b) &= (0-0)^2 + (0-b)^2 + (0-0)^2 + (b-1)^2 + (\alpha-\alpha)^2 + (\frac{1}{2} - a\alpha - b)^2 \\ &= b^2 + (b-1)^2 + \left(a\alpha + b - \frac{1}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

I.2.b. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} f_0(a,b) &= \left(a\alpha + b - \frac{1}{2}\right)^2 + 2b^2 - 2b + 1 = \left(a\alpha + b - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(b^2 - b\right) + 1 \\ &= \left(a\alpha + b - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(b^2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{2}{4} + 1 \\ &= \left(a\alpha + b - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(b^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

I.2.c. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $f_0(a,b) \geqslant \frac{1}{2}$ avec égalité si et seulement si $a\alpha + b - \frac{1}{2} = b - \frac{1}{2} = 0$ ce qui équivaut à $b = \frac{1}{2}$ et $a = 0$.
Pour $(a,b) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$, on obtient la droite $\mathcal{D}_0$ d'équation $y = \frac{1}{2}$.

I.3. **I.3.a.** Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. $p'_{a,b}(A) = (b,0)$, $p'_{a,b}(B) = (a+b,1)$ et $p'_{a,b}(C) = \left(\frac{a}{2} + b, \frac{1}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} f_1(a,b) &= (0-b)^2 + (0-a-b)^2 + \left(\alpha - \frac{a}{2} - b\right)^2 \\ &= b^2 + (a+b)^2 + \left(\alpha - \frac{a}{2} - b\right)^2. \end{aligned}$$

I.3.b. Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} b^2 + (a+b)^2 + \left(\alpha - \frac{a}{2} - b\right)^2 &= 3b^2 + 2b\left(-\alpha + \frac{3a}{2}\right) + a^2 + \alpha^2 - a\alpha + \frac{a^2}{4} \\ &= 3\left(b^2 + 2b\left(-\frac{\alpha}{3} + \frac{a}{2}\right)\right) + \alpha^2 - a\alpha + \frac{5a^2}{4} \\ &= 3\left(b - \frac{\alpha}{3} + \frac{a}{2}\right)^2 - 3\left(-\frac{\alpha}{3} + \frac{a}{2}\right)^2 + \alpha^2 - a\alpha + \frac{5a^2}{4} \\ &= 3\left(b - \frac{\alpha}{3} + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{\alpha^2}{3}. \end{aligned}$$

I.3.c. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $f_0(a, b) \geqslant \dfrac{2\alpha^2}{3}$ avec égalité si et seulement si $a = \dfrac{a}{2} + b - \dfrac{\alpha}{3} = 0$ ce qui équivaut à $a = 0$ et $b = \dfrac{\alpha}{3}$.
Pour $(a, b) = \left(0, \dfrac{\alpha}{3}\right)$, on obtient la droite $\mathcal{D}_1$ d'équation $x = \dfrac{\alpha}{3}$.

I.4. Les droites $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$ sont respectivement dirigées par i et j et sont donc orthogonales. Elles se coupent au point $M = \left(\dfrac{\alpha}{3}, \dfrac{1}{2}\right)$. Or l'isobarycentre de (A, B, C) est

$$\left(\frac{0+0+\alpha}{3}, \frac{0+1+\frac{1}{2}}{3}\right) = \left(\frac{\alpha}{3}, \frac{1}{2}\right) = M,$$

et donc M est l'isobarycentre de (A, B, C).

Partie II : RÉSULTATS SUR UN ESPACE PRÉHILBERTIEN RÉEL

II.1. $F^{\perp}$ est l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de F. $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E tel que $F \cap F^{\perp} = \{0\}$. Si de plus E est de dimension finie, $E = F \oplus F^{\perp}$.

II.2. Puisque $\dim F < +\infty$, le théorème de la projection orthogonale montre que p_F est bien défini.

Soit $x \in E$. $\{\|x - z\|,\ z \in F\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ (car contient $\|x\|$ par exemple) et minorée par 0. Par suite, $\{\|x - z\|,\ z \in F\}$ admet une borne inférieure.
Pour tout vecteur z de F,

$$\begin{aligned}
\|x - z\| &= \sqrt{\|x - z\|^2} \\
&= \sqrt{\|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - z\|^2} \text{ (d'après le théorème de Pythagore car } x - p_F(x) \in F^{\perp} \text{ et } p_F(x) - z \in F) \\
&\geqslant \sqrt{\|x - p_F(x)\|^2} = \|x - p_F(x)\|,
\end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si $z = p_F(x)$. Donc, la borne inférieure de $\{\|x - z\|,\ z \in F\}$ est atteinte en l'unique élément z de F défini par $z = p_F(x)$.

II.3. **II.3.a.** • Soit $(x, y) \in E^2$.

$$\begin{aligned}
(x|y)_F &= (x|y - p_F(y) + p_F(y))_F = (x|y - p_F(y))_F + (x|p_F(y))_F \text{ (d'après } \mathbf{i)}) \\
&= (x|y - p_F(y))_F \text{ (d'après } \mathbf{iii)} \text{ car } p_F(y) \in F) \\
&= (y - p_F(y)|x)_F \text{ (d'après } \mathbf{ii)}) \\
&= (y - p_F(y)|x - p_F(x))_F + (y - p_F(y)|p_F(x))_F = (x - p_F(x)|y - p_F(y))_F \\
&= (x - p_F(x)|y - p_F(y)) \text{ (d'après } \mathbf{iv)} \text{ car } (x - p_F(x) \in F^{\perp} \text{ et } y - p_F(y) \in F^{\perp}).
\end{aligned}$$

• Soit $x \in E$. D'après l'égalité précédente, $(x|x)_F = (x - p_F(x)|x - p_F(x)) = \|x - p_F(x)\|^2 = (d(x, F))^2$.

• En particulier, $(x|x)_F = (d(x, F))^2 \geqslant 0$.

• Soit $x \in E$. $(x|x)_F = 0 \Leftrightarrow \|x - p_F(x)\| = 0 \Leftrightarrow x = p_F(x) \Leftrightarrow x \in F$ (si $x \in F$, alors $p_F(x) = x$ et si $x = p_F(x)$ alors $x \in F$).

II.3.b. D'après la question précédente, on a nécessairement $\forall (x, y) \in E^2$, $(x|y)_F = (x - p_F(x)|y - p_F(y))$ ce qui assure l'unicité de $(\ |\ )_F$.

Réciproquement, posons $\forall (x, y) \in E^2$, $(x|y)_F = (x - p_F(x)|y - p_F(y))$.
i) Soit $x \in E$. L'application $y \mapsto y - p_F(y)$ est linéaire et donc l'application $y \mapsto (x - p_F(x), y - p_F(y))$ est linéaire par linéarité du produit scalaire par rapport à sa deuxième variable.
ii) L'application $(x, y) \mapsto (x|y)_F$ est symétrique par symétrie du produit scalaire.
iii) Pour $x \in E$ et $y \in F$, $(x|y)_F = (x - p_F(x)|y - p_F(y)) = (x - p_F(x)|0) = 0$.
iv) Pour $(x, y) \in (F^{\perp})^2$, $p_F(x) = p_F(y) = 0$ et donc $(x|y)_F = (x - p_F(x)|y - p_F(y)) = (x|y)$.

Donc, $(\ |\ )_F$ est effectivement un produit subordonné à F. On a ainsi montré qu'il existe un unique produit subordonné à F.

II.4. Soit $(x,y) \in E^2$. D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ

$$|(x|y)_F| = |(x - p_F(x)|y - p_F(y))| \leqslant \|x - p_F(x)\|\|y - p_F(y)\| = \|x\|_F\|y\|_F.$$

De plus, on sait que $|(x|y)_F| = \|x\|_F\|y\|_F$ si et seulement si la famille $(x - p_F(x), y - p_F(y))$ est liée.

II.5. **II.5.a.** $E\{0\}$. Donc il existe $x \in E$ tel que $x \neq 0$. Le vecteur $u = \dfrac{1}{\|x\|}x$ est un vecteur de E tel que $\|u\| = 1$.

II.5.b. Soit $x \in E$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $p_D(x) = \lambda u$. De plus,

$$x - p_D(x) \in D^\perp \Rightarrow (x - \lambda u|u) = 0 \Rightarrow (x|u) - \lambda(u|u) = 0 \Rightarrow \lambda = (x|u) \text{ (car } \|u\| = 1).$$

Donc, $\forall x \in E$, $p_D(x) = (x|u)u$.

II.5.c. Soit $x \in E$. $\sigma_x = \|x\|_D = \|x - p_D(x)\| = \|x - (x|u)u\| = \|x - m_x u\|$.
Soit $(x,y) \in E^2$.

$$\begin{aligned}\text{cov}(x,y) = (x|y)_D &= (x - (x|u)u|y - (y|u)u) = (x|y) - (x|u)(y|u) - (y|u)(x|u) + (x|u)(y|u)(u|u) = (x|y) - (x|u)(y|u)\\ &= (x|y) - m_x m_y.\end{aligned}$$

II.6. Puisque la famille (x,y,u) est libre, $x \notin \text{Vect}(u) = D$. D'après la question II.3.a, $\|x\|_D = \sqrt{(x|x)_D} \geqslant 0$ et $\|x\|_D = \sqrt{(x|x)_D} \neq 0$. Donc $\sigma_x = \|x\|_D > 0$. De même, $\sigma_y > 0$.

II.7. **II.7.a.** $m_{x^*} = (x^*|u) = \dfrac{1}{\sigma_x}(x - m_x u|u) = \dfrac{1}{\sigma_x}((x|u) - m_x(u|u)) = \dfrac{1}{\sigma_x}(m_x - m_x) = 0.$
$\sigma_{x^*} = \|x^* - m_{x^*}u\| = \|x^*\| = \dfrac{1}{\sigma_x}\|x - m_x u\| = \dfrac{\sigma_x}{\sigma_x} = 1.$
$|\rho| = \left|\dfrac{\text{cov}(x,y)}{\sigma_x\sigma_y}\right| = \dfrac{|(x|y)_D|}{\|x\|_D\|y\|_D} \in [0,1]$ d'après la question II.4. De plus,

$$\begin{aligned}\frac{|(x|y)_D|}{\|x\|_D\|y\|_D} = 1 &\Rightarrow (x - p_D(x), y - p_D(y)) \text{ liée} \Rightarrow \exists(\lambda,\mu) \neq (0,0)/\ \lambda(x - p_D(x)) + \mu(y - p_D(y)) = 0\\ &\exists(\lambda,\mu) \neq (0,0)/\ \lambda x + \mu y + (-\lambda m_x - \mu m_y)u = 0 \Rightarrow (x,y,u) \text{ liée.}\end{aligned}$$

Par contraposition, (x,y,u) libre $\Rightarrow \dfrac{|(x|y)_D|}{\|x\|_D\|y\|_D} \neq 1$. Finalement, $|\rho| < 1$ ou encore $\rho \in]-1,1[$.

II.7.b. Puisque $u \neq 0$ et $x \notin \text{Vect}(u)$, F est un plan vectoriel.
$\|u\| = 1$ et $\|x^*\| = \dfrac{\|x - m_x u\|}{\sigma_x} = 1$. Enfin,

$$(u|x^*) = \frac{1}{\sigma_x}(u|x - p_D(x)) = 0 \text{ car } x - p_D(x) \in D^\perp.$$

Donc (u,x^*) est une famille orthonormale. Enfin, $u \in F$ et $x^* \in \text{Vect}(x,u) = F$. Donc, (u,x^*) est une famille orthonormale de F et finalement une base orthonormale de F car F est un plan.

II.7.c. D'après la question II.2, $\inf\{\|y - ax - bu\|,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\} = \inf\{\|y - z\|,\ z \in F\}$ existe et vaut $\|y - p_F(y)\| = d(y,F)$.

II.7.d. Puisque la famille (u,x^*) est une base orthonormée de F

$$p_F(y) = (y|u)u + (y|x^*)x^* = m_y u + (y|x^*)x^*,$$

et donc $\inf\{\|y - ax - bu\|,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\} = \|y - m_y u - (y|x^*)x^*\|$.

II.7.e. $(y|x^*) = \dfrac{1}{\sigma_x}(y|x - m_x u) = \dfrac{(x|y) - m_x(y|u)}{\sigma_x} = \dfrac{(x|y) - m_x m_y}{\sigma_x} = \dfrac{\text{cov}(x,y)}{\sigma_x} = \sigma_y\rho$ et donc

$$y - m_y u - (y|x^*)x^* = \sigma_y y^* - \sigma_y\rho x^* = \sigma_y(y^* - \rho x^*),$$

puis $\inf\{\|y-ax-bu\|,\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\}=\sigma_y\|y^*-\rho x^*\|$.

II.7.f.

$$\begin{aligned}p_F(y)&=m_y u-(y|x^*)x^*=\frac{1}{\sigma_x^2}(y|x-m_xu)(x-m_xu)+m_yu\\&=\left(\frac{1}{\sigma_x^2}((y|x)-m_x(y|u))\right)x+\left(-\frac{m_x}{\sigma_x^2}((y|x)-m_x(y|u))+m_y\right)u\\&=\frac{\text{cov}(x,y)}{\sigma_x^2}x+\left(-\frac{m_x}{\sigma_x^2}\text{cov}(x,y)+m_y\right)u\\&=\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x+\left(-m_x\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}+m_y\right)u.\end{aligned}$$

Donc $a_0=\rho\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$ et $b_0=-m_x\rho\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}+m_y$.

II.8. $y=a_0x+b_0\Leftrightarrow y=\rho\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}x-m_x\rho\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}+m_y\Leftrightarrow\dfrac{y-m_y}{\sigma_y}=\rho\dfrac{x-m_x}{\sigma_x}$.

II.9. Le résultat s'obtient en échangeant les rôles de x et y ce qui est licite puisque la famille (y,x,u) est libre.

II.10. a_1 et b_1 s'obtiennent en échangeant les rôles de x et y puis une équation de $\mathcal{D}_1$ s'obtient en échangeant les rôles de x et y. Une équation de $\mathcal{D}_1$ est donc $\dfrac{x-m_x}{\sigma_x}=\rho\dfrac{y-m_y}{\sigma_y}$ (car ρ est invariant quand on échange les rôles de x et y).

II.11. Un vecteur normal à $\mathcal{D}_0$ est $n_0=\left(\dfrac{\rho}{\sigma_x},-\dfrac{1}{\sigma_y}\right)$ et un vecteur normal à $\mathcal{D}_1$ est $n_1=\left(\dfrac{1}{\sigma_x},-\dfrac{\rho}{\sigma_y}\right)$.

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\rho}{\sigma_x}&\dfrac{1}{\sigma_x}\\-\dfrac{1}{\sigma_y}&-\dfrac{\rho}{\sigma_y}\end{vmatrix}=\frac{-\rho^2+1}{\sigma_x\sigma_y}\neq0\text{ (d'après la question II.7.a).}$$

Donc les droites $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$ sont sécantes en un unique point. Le point (m_x,m_y) appartient à chacune de ces deux droites et donc les droites $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$ sont sécantes en l'unique point (m_x,m_y).

II.12.

$$\mathcal{D}_0\perp\mathcal{D}_1\Leftrightarrow(n_0|n_1)=0\Leftrightarrow\rho\left(\frac{1}{\sigma_x^2}+\frac{1}{\sigma_y^2}\right)=0\Leftrightarrow\rho=0\Leftrightarrow\text{cov}(x,y)=0\Leftrightarrow(x|y)=m_xm_y.$$

Partie III : BASE ADAPTÉE À UN PRODUIT SCALAIRE DANS UN ESPACE EUCLIDIEN

III.1. On identifie une matrice de format $(1,1)$ et son unique coefficent.

$${}^tXSY=\sum_{i=1}^{n}x_i\left(\sum_{j=1}^{n}s_{i,j}y_j\right)=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}x_iy_j\,(e_i|e_j)=\left(\left(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\right)|\left(\sum_{j=1}^{n}y_je_j\right)\right)=(x|y).$$

III.2. **III.2.a.** Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$. $s_{j,i}=(e_j|e_i)=(e_i|e_j)=s_{i,j}$.
Donc S est une matrice symétrique réelle de format n.

D'après le théorème spectral, le spectre de S est contenu dans $\mathbb{R}$. Soit alors λ une valeur propre de S puis X un vecteur propre unitaire associé.

$${}^tXSX={}^tX(\lambda X)=\lambda{}^tXX=\lambda\|X\|^2=\lambda$$

et donc $\lambda={}^tXSX=(x|x)>0$ car $x\neq0$. Ainsi, les valeurs propres de S sont des réels strictement positifs.

III.2.b. $S\in D_n(\mathbb{R})\Leftrightarrow\forall i\neq j,\ (e_i|e_j)=0\Leftrightarrow(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base orthogonale de E_n.

III.3. Supposons que $\forall(X,Y)\in(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$, ${}^tXAY={}^tXBY$ ou encore supposons que $\forall((x_i)_{1\leqslant i\leqslant n},(y_j)_{1\leqslant j\leqslant n})\in(\mathbb{R}^n)^2$, $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}x_iy_ja_{i,j}=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}x_iy_jb_{i,j}$.
En appliquant cette égalité aux vecteurs $X=E_k$ et $Y=E_l$ de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}$ pour chaque k et chaque l de $[\![1,n]\!]$, on obtient $a_{k,l}=b_{k,l}$ pour chaque k et chaque l de $[\![1,n]\!]$ et donc $A=B$.

III.4. **III.4.a.** On sait que $X=PX'$.

III.4.b. ${}^tX'S'Y'=(x,y)={}^tXSY={}^t(PX')S(PY')={}^tX'(tPSP)Y'$.
Ainsi, pour tout $(X',Y')\in(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$, ${}^tX'S'Y'={}^tX'(tPSP)Y$ et d'après la question III.3, $S'={}^tPSP$.

III.4.c. E est un espace euclidien et on sait alors qu'il existe dans E au moins une base orthonormée $\mathcal{B}'=(e'_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

III.4.d. Pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $S'=(e'_i|e'_j)=\delta_{i,j}$. Par suite, $\left((e'_i|e'_j)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}=I_n$. D'après la question III.4.b, ${}^tPSP=I_n$ puis $S={}^t(P^{-1})P^{-1}$. Mais alors

$$P\in O_n(\mathbb{R})\Leftrightarrow P^{-1}\in O_n(\mathbb{R})\Leftrightarrow {}^t(P^{-1})P^{-1}=I_n\Leftrightarrow S=I_n\Leftrightarrow \mathcal{B}\text{ est une base orthonormée.}$$

III.5. Soit $\mathcal{B}'=(e'_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base orthonormée de E_n. Pour $i\in[\![1,n]\!]$, on pose $e''_i=\sqrt{d_i}e'_i$ puis on pose $\mathcal{B}''=(e''_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Puisque chaque $\sqrt{d_i}$ est non nul, $\mathcal{B}''$ est une base de E. De plus, pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$,

$$(e''_i|e''_j)=\sqrt{d_i}\sqrt{d_j}\delta_{i,j}=\left\{\begin{array}{l}d_i\text{ si }i=j\\0\text{ si }i\neq j\end{array}\right..$$

Donc la matrice associée à la base $\mathcal{B}''$ est $\text{diag}(d_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ c'est-à-dire M_1. La matrice M_1 est donc associée à une base de E_n.

III.6. **III.6.a.** $\chi_{M_2}=\begin{vmatrix}1-X&1\\1&1-X\end{vmatrix}=X^2-2X=X(X-2)$. Donc $\text{Sp}(f_2)=(0,2)$.
$\text{Ker}(f_2)=\text{Vect}(e'_1)$ où $e'_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1-e_2)$ et $\text{Ker}(f_2-2Id)=\text{Vect}(e'_2)$ où $e'_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1+e_2)$.

III.6.b. Si M est une matrice associée à une certaine base de E_2, les valeurs propres de M sont strictement positives d'après la question III.2.a. Comme 0 est valeur propre de M_2, M_2 n'est pas associée à une base de E_2.

III.7. **III.7.a.** $\text{rg}(M_3-4I_3)=1$ et donc $\dim(\text{Ker}(M_3-4I_3))=2$. Par suite, 4 est valeur propre d'ordre au moins 2.
La dernière valeur propre λ est fournie par la trace de M_3 : $9=\text{Tr}(M_3)=4+4+\lambda$ et donc $\lambda=8$. Ainsi, $\text{Sp}(f_3)=(4,4,1)$.
$\text{Ker}(f_3-4Id)$ est le plan d'équation $x+y+z=0$ puis $\text{Ker}(f_3-Id)$ est l'orthogonal de ce plan (car M_3 est symétrique réelle) c'est-à-dire la droite engendrée par le vecteur unitaire $e'_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(e_1+e_2+e_3)$.

Un vecteur unitaire du plan $\text{Ker}(f_3-4Id)$ est le vecteur $e'_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1-e_2)$. Par suite une base orthonormée du plan $\text{Ker}(f_3-4Id)$ est (e'_1,e'_2) où

$$e'_2=e'_3\wedge e'_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(e_1+e_2+e_3)\wedge(e_1-e_2)=\frac{1}{\sqrt{6}}(e_1+e_2-2e_3).$$

III.7.b. Posons $Q=\mathscr{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&-\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$. Les formules de changement de bases s'écrivent $M_3=Q\text{diag}(4,4,1)Q^{-1}$ avec $Q^{-1}={}^tQ$.
Posons $D=\text{diag}(2,2,1)$ de sorte que $D^2=\text{diag}(4,4,1)$. On a alors

$$M_2=QD^{2t}Q=QD^tD^tQ=(QD)^t(QD).$$

Ainsi, en posant $P={}^t(QD)=\begin{pmatrix}\sqrt{2}&-\sqrt{2}&0\\\sqrt{\frac{2}{3}}&\sqrt{\frac{2}{3}}&-2\sqrt{\frac{2}{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$, on a $M_3={}^tPP$. Cette dernière égalité signifie que si $\mathcal{B}''=(e''_1,e''_2,e''_3)$ est la base de E_3 telle que $P=\mathscr{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}$, alors pour $(i,j)\in[\![1,3]\!]^2$, $(e''_i|e''_j)$ est le coefficient ligne i, colonne j de la matrice M_3.

Ainsi, la matrice M_3 est la matrice adaptée à la base

$$(e''_1, e''_2, e''_3) = \left(\sqrt{2}e_1 + \sqrt{\frac{2}{3}}e_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, -\sqrt{2}e_1 + \sqrt{\frac{2}{3}}e_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, -2\sqrt{\frac{2}{3}}e_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}e_3\right).$$

III.8. $M_4\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-3\\3\\3\end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$. Donc -3 est une valeur propre de M_4. Puisque M_4 admet une valeur propre négative ou nulle, M_4 n'est pas la matrice associée à une base de E_4 (d'après la question III.2.a). 5on peut aussi remarquer que la trace de M_4 est nulle et donc M_4 admet au moins une valeur propre négative ou nulle).

III.9. III.9.a. Une famille adaptée est une famille orthogonale de vecteurs tous non nuls. On sait qu'une telle famille est libre. Etant de cardinal $n = \dim(E_n)$, une famille adaptée est une base de E_n.

III.9.b. Soit $(e'_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base orthonormée de E_n. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, posons $e_i = \dfrac{1}{\sqrt{n}}e'_i$. La famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille adaptée.

III.9.c. Il n'y a pas unicité d'une famille adaptée. En effet, soit $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et f un automorphisme orthogonal de E_n distinct de Id. Puisque f conserve le produit scalaire, la famille $(f(e_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une autre famille adaptée. Par exemple, la famille $(-e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille adaptée distincte de la famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

III.9.d.

$$(x|y) = \left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_ie_i\right) | \left(\sum_{j=1}^{n} y_je_j\right)\right) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_iy_j(e_i|e_j) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_iy_i.$$

III.9.e. Si $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} e_i$, alors $(x|x) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 1\times 1 = 1$ et donc $\left\|\displaystyle\sum_{i=1}^{n} e_i\right\| = 1$.

Partie IV : DROITES DES MOINDRES CARRÉS DANS LE CAS GÉNÉRAL

IV.1. Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $(P, Q) \in E^2$, on pose $(P|Q) = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\ dt$. $(E, (\ |\ ))$ est un espace préhilbertien réel de dimension infinie. D'autre part, $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique est un espace euclidien.

IV.2. Il suffit de prendre pour $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille adaptée.

IV.3. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

$$\alpha u + \beta x + \gamma y = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(\alpha + \beta x_i + \gamma y_i)e_i = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \alpha + \beta x_i + \gamma y_i = 0.$$

On ne peut avoir $(\beta, \gamma) \neq (0, 0)$ car alors tous les points A_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, appartiennent à la droite D d'équation $\alpha + \beta X + \gamma Y = 0$ dans $\mathcal{R}$ ce qui contredit le fait que les points A_i ne sont pas alignés.
Donc $\beta = \gamma = 0$ puis $\alpha = 0$. On a ainsi montré que la famille (u, x, y) est libre.

IV.4.

$$\begin{aligned}f_0(a, b) &= \sum_{i=1}^{n}(y_i - (ax_i + b))^2 = n \times \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - bu_i)(y_i - ax_i - bu_i)\\ &= n\left((y - ax - bu)|(y - ax - bu)\right) = n\|y - ax - bu\|^2.\end{aligned}$$

En échangeant les rôles de x et y, on a aussi $f_1(a, b) = n\|x - ay - bu\|^2$.

IV.5. **IV.5.a.** D'après la question IV.3, la famille (u, x, y) est libre. On peut donc appliquer les résultats des questions II.6 à II.12.

D'après la question II.7.f, $\inf\{\|y-ax-bu\|,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ existe et est atteint en l'unique couple $(a_0, b_0) = \left(\rho\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}, -m_x\rho\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x} + m_y\right)$. Il en est de même de $\inf\{n\|y - ax - bu\|^2,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\} = \inf\{f_0(a,b),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

De même, f_1 admet un minimum atteint en l'unique couple $(a_1, b_1) = \left(\rho\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}, -\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}\rho m_y + m_x\right)$.

D'après la question II.8 et II.10, une équation de $\mathcal{D}_0$ dans $\mathcal{R}$ est : $\dfrac{y - m_y}{\sigma_y} = \rho\dfrac{x - m_x}{\sigma_x}$ et une équation de $\mathcal{D}_1$ dans $\mathcal{R}$ est : $\dfrac{x - m_x}{\sigma_x} = \rho\dfrac{y - m_y}{\sigma_y}$.

IV.5.b. D'après la question II.11, les droites $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$ se coupent au point $(m_x, m_y) = ((x|u), (y|u)) = \left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i, \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$.
Ce point est l'isobarycentre de $(A_1, \dots, A_n)$.

IV.5.c. D'après la question II.12, les droites $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$ sont orthogonales si et seulement si $(x|y) = m_x m_y$ ce qui équivaut à $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$ ou encore

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right).$$

IV.5.d. Posons $A_0 = (0,0)$, $A_1 = (1,0)$, $A_2 = (1,1)$ et $A_3 = (0,1)$. Ces quatre points sont non alignés.
$\displaystyle\sum_{i=1}^{4} x_i y_i = 0 + 0 + 1 + 0 = 1$ et $\dfrac{1}{4}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{4} x_i\right)\left(\sum_{i=4}^{n} y_i\right) = \dfrac{1}{4}(1+1)(1+1) = 1$.

Par suite, les droites des moindres carrés $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$ associées à ces quatre points sont orthogonales. Plus précisément, quand $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$ sont orthogonales, on a $\rho = \dfrac{(x|y) - m_x m_y}{\sigma_x \sigma_y} = 0$. Donc $\mathcal{D}_0$ est la droite d'équation $y = m_y$ ou encore $y = \dfrac{1}{2}$. De même, $\mathcal{D}_1$ est la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$.

