SESSION 2010

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE PSI

MATHEMATIQUES 2

PARTIE I

I.1. **I.1.1** $\chi_l = X^2 - 2\cos\theta X + 1 = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$. Donc

$$\boxed{\mathrm{Sp}(l) = (e^{i\theta}, e^{-i\theta}).}$$

I.1.2 Puisque la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est orthonormée,

$$\begin{aligned}\|v\|^2 &= \|x_1v_1 + x_2v_2\|^2 = \|(x_1 + x_2\cos(\theta))\varepsilon_1 + x_2\sin(\theta)\varepsilon_2\|^2 = (x_1 + x_2\cos(\theta))^2 + x_2^2\sin^2(\theta)\\ &= x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2\cos(\theta),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\|l(v)\|^2 &= \|x_1v_2 + x_2(-v_1 + 2\cos(\theta)v_2)\|^2 = \|(x_1\cos(\theta) - x_2 + 2x_2\cos^2(\theta))\varepsilon_1 + (x_1\sin(\theta) + 2x_2\cos(\theta)\sin(\theta))\varepsilon_2\|^2\\ &= (x_1\cos(\theta) + x_2\cos(2\theta))^2 + (x_1\sin(\theta) + x_2\sin(2\theta))^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2(\cos(2\theta)\cos(\theta) + \sin(2\theta)\sin(\theta))\\ &= x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2\cos(\theta).\end{aligned}$$

Donc, pour tout $v \in \mathbb{R}^2$, $\|l(v)\| = \|v\|$ et on sait que

$$\boxed{l \in O(\mathbb{R}^2).}$$

I.1.3 $P = \begin{pmatrix} 1 & \cos(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) \end{pmatrix}$ puis $P^{-1} = \dfrac{1}{\sin(\theta)}\begin{pmatrix} \sin(\theta) & -\cos(\theta) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \\ 0 & \dfrac{1}{\sin(\theta)} \end{pmatrix}$. Par suite,

$$\begin{aligned}M' = PMP^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & \cos(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \\ 0 & \dfrac{1}{\sin(\theta)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -1 + 2\cos^2(\theta) \\ \sin(\theta) & 2\sin(\theta)\cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \\ 0 & \dfrac{1}{\sin(\theta)} \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \dfrac{-1 + \cos^2(\theta)}{\sin(\theta)} \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Puisque la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est orthonormée directe,

$$\boxed{l \text{ est la rotation d'angle } \theta.}$$

I.1.4 **I.1.4.1** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la question I.A.1, $\|v_k\|^2 = a_k^2 + b_k^2 + 2a_kb_k\cos(\theta)$. Mais puisque l conserve la norme, on a aussi $\|v_k\|^2 = \|l^{k-1}(v_1)\|^2 = \|v_1\|^2 = \|\varepsilon_1\|^2 = 1$. Donc

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ a_k^2 + b_k^2 + 2a_kb_k\cos(\theta) = 1.}$$

I.1.4.2 Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Puisque l est la rotation d'angle θ et que la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est orthonormée,

$$(v_1|v_k) = \left(\varepsilon_1|l^{k-1}(\varepsilon_1)\right) = (\varepsilon_1|\cos((k-1)\theta)\varepsilon_1 + \sin((k-1)\theta)\varepsilon_2) = \cos((k-1)\theta).$$

Soit $k \geqslant 2$. Puisque l conserve le produit scalaire,

$$(v_2|v_k) = (l(v_1), l(v_{k-1})) = (v_1, v_{k-1}) = \cos((k-2)\theta),$$

ce qui reste vrai quand $k = 1$ car $(v_1|v_2) = \cos(\theta)$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ (v_1|v_k) = \cos((k-1)\theta) \text{ et } (v_2|v_k) = \cos((k-2)\theta).}$$

I.1.4.3 Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $\cos((k-1)\theta) = (v_1|v_k) = a_k(v_1|v_1) + b_k(v_1|v_2) = a_k + b_k\cos(\theta)$.
De même, $\cos((k-2)\theta) = (v_2|v_k) = a_k(v_1|v_2) + b_k(v_2|v_2) = a_k\cos(\theta) + b_k$. Donc a_k et b_k vérifient

$$\left\{\begin{array}{l} a_k + b_k\cos(\theta) = \cos((k-1)\theta) \\ a_k\cos(\theta) + b_k = \cos((k-2)\theta) \end{array}\right. .$$

Le déterminant de ce système est $1-\cos^2(\theta) = \sin^2(\theta) \neq 0$. Les formules de Cramer fournissent

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\sin^2(\theta)}\begin{vmatrix} \cos((k-1)\theta) & \cos(\theta) \\ \cos((k-2)\theta) & 1 \end{vmatrix} = \frac{\cos((k-1)\theta) - \cos(\theta)\cos((k-2)\theta)}{\sin^2(\theta)} \\ &= \frac{\cos((k-2)\theta)\cos(\theta) - \sin(k-2)\theta)\sin(\theta) - \cos(\theta)\cos((k-2)\theta)}{\sin^2(\theta)} = -\frac{\sin((k-2)\theta)}{\sin(\theta)}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\sin^2(\theta)}\begin{vmatrix} 1 & \cos((k-1)\theta) \\ \cos(\theta) & \cos((k-2)\theta) \end{vmatrix} = \frac{\cos((k-2)\theta) - \cos(\theta)\cos((k-1)\theta)}{\sin^2(\theta)} \\ &= \frac{\cos((k-1)\theta)\cos(\theta) + \sin(k-1)\theta)\sin(\theta) - \cos(\theta)\cos((k-1)\theta)}{\sin^2(\theta)} = \frac{\sin((k-1)\theta)}{\sin(\theta)}, \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ a_k = -\frac{\sin((k-2)\theta)}{\sin(\theta)} \text{ et } b_k = \frac{\sin((k-1)\theta)}{\sin(\theta)}.}$$

I.2. Dans le repère $\mathfrak{R}$, les coordonnées de A_1 sont $(a_1, b_1) = (1, 0)$, celles de A_2 sont $(a_2, b_2) = (0, 1)$ et celles de A_3 sont $(a_3, b_3) = (-1, 2\cos(\theta))$.
• $pa_1^2 + qa_1b_1 + rb_1^2 = 1 \Leftrightarrow p = 1$.
• $pa_2^2 + qa_2b_2 + rb_2^2 = 1 \Leftrightarrow r = 1$.
• $pa_3^2 + qa_3b_3 + rb_3^2 = 1 \Leftrightarrow 1 - 2q\cos(\theta) + 4\cos^2(\theta) = 1 \Leftrightarrow q = 2\cos(\theta)$ (car $\cos(\theta) \neq 0$).
Maintenant, d'après la question I.1.4.1, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $a_k^2 + 2\cos(\theta)a_kb_k + b_k^2 = 1$ et donc

$$\boxed{\text{t}\forall k \in \mathbb{N}^*,\ A_k \text{ appartient à la conique } (\Gamma) \text{ d'équation } x^2 + 2xy\cos(\theta) + y^2 = 1 \text{ dans le repère } \mathfrak{R}.}$$

I.2.2 Soit M la matrice de la forme quadratique $(x, y) \mapsto x^2+2xy\cos(\theta)+y^2$ dans la base (v_1, v_1). $M = \begin{pmatrix} 1 & \cos(\theta) \\ \cos(\theta) & 1 \end{pmatrix}$
puis $\chi_M = X^2 - 2X + \sin^2(\theta) = (X-1)^2 - \cos^2(\theta) = (X - 1 - \cos(\theta))(X - 1 + \cos(\theta))$. Les valeurs propres de M sont $\lambda = 1 - \cos(\theta) > 0$ et $\lambda_2 = 1 + \cos(\theta) > 0$. Donc (Γ) est une conique du genre ellipse c'est-à-dire une ellipse, un cercle, un point ou vide.
(Γ) n'est ni vide ni réduite à un point car A_1 et A_2 sont deux points distincts de (Γ). (Γ) n'est pas un cercle car en repère orthonormé, une équation de cercle ne comporte pas de terme en xy et car $\cos(\theta) \neq 0$. Finalement,

$$\boxed{\text{La courbe d'équation } x^2 + 2xy\cos(\theta) + y^2 = 1 \text{ dans } \mathfrak{R} \text{ est une ellipse.}}$$

Si $\theta = \frac{\pi}{3}$, une équation de (Γ) dans le repère $\mathfrak{R}$ est $x^2 + xy + y^2 = 1$. On tourne de $\frac{\pi}{4}$ ce qui correspond aux formules de changement de repère

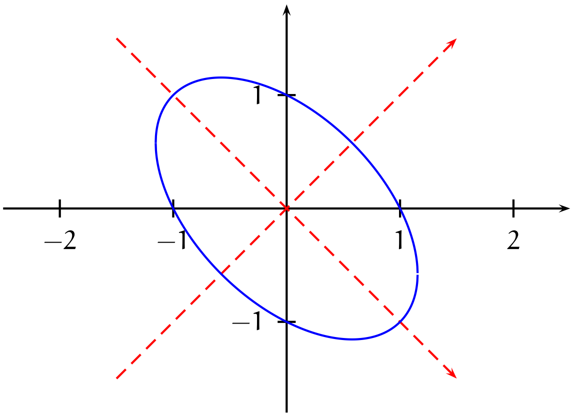
$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \end{array}\right. .$$

Dans le nouveau repère ainsi défini, une équation de (Γ) est $\frac{1}{2}(x'-y')^2 + \frac{1}{2}(x'-y')(x'+y') + \frac{1}{2}(x'+y')^2 = 1$ ou encore $3x'^2 + y'^2 = 2$ ou enfin

$$\frac{x'^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} + \frac{y'^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 1.$$

$a = \dfrac{2}{\sqrt{3}} < \sqrt{2} = b$ et donc l'axe focal de l'ellipse est dirigé par le vecteur de coordonnées $\left(-\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right), \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$ dans le repère $\mathfrak{R}$ ou aussi par le vecteur de coordonnées $(1, -1)$.

Tracé de l'ellipse d'équation $x^2 + xy + y^2 = 1$ dans le repère $\mathfrak{R}$



PARTIE II

II.1. II.1.1 Le cardinal d'une famille libre est inférieur ou égal à la dimension de E. Donc la famille $(l^p(u))_{0 \leqslant p \leqslant n}$ est liée. Ceci montre que $A = \{k \in \mathbb{N},\ (l^p(u))_{0 \leqslant p \leqslant n} \text{ liée}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ et on sait alors que A admet un plus petit élément que l'on note $r(l, u)$.

II.1.2 Puisque $u \neq 0$, la famille $(l^p(u))_{0 \leqslant p \leqslant 0}$ est libre et donc $r(l, u) \geqslant 1$. D'autre part, la famille $(l^p(u))_{0 \leqslant p \leqslant n}$ est liée et donc $r(l, u) \leqslant n$.

II.1.3 Puisque $u \neq 0$,

$$r(l, u) = 1 \Leftrightarrow (u, l(u)) \text{ liée} \Leftrightarrow l(u) \in \text{Vect}(u) \Leftrightarrow u \text{ vecteur propre de } l.$$

Puisque $r(u, l) \leqslant n$ et que toute sous-famille d'une famille libre est libre,

$$(l^p(u))_{0 \leqslant p \leqslant n-1} \text{ base de } E \Leftrightarrow (l^p(u))_{0 \leqslant p \leqslant n-1} \text{ libre} \Leftrightarrow r(l, u) = n.$$

II.2. $\text{Tr}(f) = 1 - 2 + 4 + 3 = 6$ puis

$$\det(f) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 4 & 1 \\ 1 & -8 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & 2 \\ 0 & -10 & 3 & 4 \end{vmatrix} \ (\forall i \in \{2, 3, 4\},\ L_i \leftarrow L_i - L_1)$$

$$= \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ -8 & 4 & 2 \\ -10 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \\ -5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -4(-10 - 4 + 15) = -4.$$

Ensuite, $(\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f))^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 4 & 1 \\ 1 & -8 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 4 & 1 \\ 1 & -8 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 & -2 \\ 1 & -8 & 5 & 1 \\ 0 & -18 & 13 & 0 \\ -1 & -24 & 13 & -3 \end{pmatrix}$.

La matrice de la famille $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4) est donc $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Cette matrice a même rang que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $(L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_2)$ puis que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (car $L_4 = 2L_3$).
Cette dernière matrice est de rang 3 car carrée et de déterminant égal à $-1 \neq 0$. Donc la famille $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est de rang 3 ce qui montre que

$$\boxed{\text{la famille } (e_1, f(e_1), f^2(e_1)) \text{ est libre.}}$$

$$(\mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}}(f))^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 4 & 1 \\ 1 & -8 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 & -2 \\ 1 & -8 & 5 & 1 \\ 0 & -18 & 13 & 0 \\ -1 & -24 & 13 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & \times & \times & \times \\ -1 & \times & \times & \times \\ -5 & \times & \times & \times \\ -9 & \times & \times & \times \end{pmatrix} \text{ puis}$$

$$f^3(e_1) = xe_1 + yf(e_1) + zf^2(e_1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + 2z = 5 \\ y + z = -1 \\ y = -5 \\ y - z = -9 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -5 \\ z = 4 \\ x = 2 \end{array} \right. .$$

Ainsi, $f^3(e_1) = 2e_1 - 5f(e_1) + 4f^2(e_1)$ et la famille $(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1))$ est liée. Finalement

$$\boxed{r(f, e_1) = 3.}$$

II.3. **II.3.1** $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}(u)}(l) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$. Donc $\mathrm{Tr}(l) = a_{n-1}$ puis en développant suivant la dernière colonne, on obtient $\det(l) = (-1)^{n+1}a_0$

II.3.2 On effectue la transformation $L_1 \leftarrow L_1 + \sum_{i=2}^{n} \lambda^{i-1} L_i$. En posant $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$, on obtient

$$\chi_l(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -\lambda & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -P(\lambda) \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -\lambda & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{vmatrix}$$
$$= -(-1)^{n+1}P(\lambda) = (-1)^n P(\lambda).$$

$$\boxed{\det(l - \lambda \mathrm{id}) = (-1)^n \left(\lambda^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k \right).}$$

II.4. **II.4.1** • Le polynôme nul est dans $I(l, u)$. Soient $(P, Q) \in (I(l, u))^2$. Alors $(P - Q)(l)(u) = P(l)(u) - Q(l)(u) = 0$ et donc $P - Q \in I(l, u)$.
• Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \in I(l, u)$. $PQ(l)(u) = (P(l) \circ Q(l))(u) = P(l)(Q(l)(u)) = P(l)(0) = 0$ et donc $PQ \in I(l, u)$.

On a montré que

$$\boxed{I(l, u) \text{ est un idéal de l'anneau } (\mathbb{K}[X], +, \times).}$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique χ_l de l vérifie $\chi_l(l) = 0$ et en particulier $\chi_l(l)(u) = 0$.
Donc χ_l est un élément non nul de $I(l, u)$. On sait que l'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est principal et donc, puisque $I(l, u)$ est un idéal non réduit à $\{0\}$ de cet anneau, on sait qu'il existe un unique polynôme unitaire que l'on note $G(l, u)$ tel que $I(l, u)$ est constitué des multiples de $G(l, u)$.

II.4.2 D'après ce qui précède, $\chi_l \in I(l, u) = G(l, u) \times \mathbb{K}[X]$ et donc $G(l, u)$ divise χ_l.

Soit r le degré du polynôme non nul $G(l, u)$. Il est clair que $r \in \mathbb{N}^*$.
L'égalité $G(l, u)(u) = 0$ montre que la famille $(u, l(u), \dots, l^r(u))$ est liée car les coefficients de $G(l, u)$ ne sont pas tous nuls. Donc $r(l, u) \leqslant r$.

Soient $k \leqslant r - 1$ puis $(a_0, \dots, a_k) \in \mathbb{K}^{k+1}$. Si $a_0 u + \dots + a_k l^k(u) = 0$, le polynôme $\sum_{i=0}^{k} a_i X^i$ est dans $I(l, u)$ et a un degré strictement inférieur au degré de $G(l,u)$. On en déduit que $\sum_{i=0}^{k} a_i X^i = 0$ puis que $\forall i \in [\![0,k]\!]$, $a_i = 0$. Ainsi, $\forall k \in [\![0, r-1]\!]$, la famille $(u, l(u), \dots, l^k(u)$ est libre et donc $r(l,u) \geqslant r$.

On a montré que

$$\boxed{\deg(G(l,u)) = r(l,u).}$$

II.4.3 On a vu que $r(f, e_1) = 3$ et que le polynôme $P = X^3 - 4X^2 + 5X - 2$ est un élément de $I(f, e_1)$. Puisque P est unitaire de degré 3,

$$\boxed{G(f, e_1) = X^3 - 4X^2 + 5X - 2.}$$

Le polynôme caractéristique de f est un multiple de $G(f, e_1)$ de degré 3 et de coefficient dominant $(-1)^3 = -1$. Donc

$$\chi_f = -X^3 + 4X^2 - 5X + 2 = (1 - X)(X^2 - 3X + 2) = -(X - 1)^2(X - 2).$$

Ainsi, $\mathrm{Sp}(f) = (1, 1, 2)$. Supposons alors f diagonalisable. Dans ce cas, le polynôme minimal de f doit être $(X-1)(X-2) = X^2 - 3X + 2$. En particulier, on doit avoir $f^2(e_1) - 3f(e_1) + 2e_1 = 0$ ce qui est impossible car la famille $(e_1, f(e_1, f^2(e_1))$ est libre. Donc

$$\boxed{f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

II.4.4 Le polynôme $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ vérifie $P(l)(u) = 0$. Donc $P \in I(l,u) = G(l,u) \times \mathbb{K}[X]$. De plus, P est unitaire de degré $r(l,u)$ qui est aussi le degré de $G(l,u)$. Donc $G(l,u) = P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

Le polynôme caractéristique χ_l de l est un multiple de $G(l,u)$ de même degré et de coefficient dominant $(-1)^n$. Donc $\chi_l = (-1)^n G(l,u)$.

$$\boxed{G(l,u) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \text{ et } \chi_l = (-1)^n G(l,u).}$$

II.5. **II.5.1** Les « valeurs propres dans $\mathbb{C}$ » de l sont à choisir parmi les racines du polynôme annulateur X^p. Donc l admet 0 pour unique valeur propre et on en déduit que

$$\boxed{\chi_l = (-X)^n.}$$

II.5.2 (2) $\Rightarrow$ (1). Si $l^{n-1} \neq 0$, il existe $u \in E$ tel que $l^{n-1}(u) \neq 0$. Le polynôme X^p est dans $I(l,u)$ et donc $G(l,u)$ est un multiple unitaire de ce polynôme et aussi un diviseur de χ_l. Donc $G(l,u)$ est de la forme X^q avec $p \leqslant q \leqslant n$. On ne peut avoir $q \leqslant n-1$ car alors $l^{n-1}(u) = 0$ ce qui n'est pas. Donc $G(l,u) = X^n$ puis $r(l,u) = n$.

(1) $\Rightarrow$ (2). Si $l^{n-1} = 0$, pour tout $u \in E \setminus \{0\}$, $X^{n-1} \in I(l,u)$ et en particulier, $r(l,u) \leqslant n-1$. Par contraposition, s'il existe $u \in E \setminus \{0\}$ tel que $r(l,u) = n$ alors $l^{n-1} \neq 0$.

II.6. **II.6.1** Pour tout $p \in [\![0, n-1]\!]$, $l^p(u) = \sum_{k=1}^{n} x_k \lambda^p w_k$. Donc

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{W}}(\mathfrak{B}(u)) = \begin{pmatrix} x_1 & \lambda_1 x_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} x_1 \\ x_2 & \lambda_2 x_2 & & \lambda_2^{n-1} x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & \lambda_n x_n & \dots & \lambda_n^{n-1} x_n \end{pmatrix}}.$$

Si l admet deux valeurs propres égales, alors deux des lignes de la matrice précédente sont identiques et cette matrice n'est pas inversible. Ceci contredit le fait que $\mathfrak{B}(u)$ est une base de E. On a donc montré que les valeurs propres de l sont deux à deux distinctes.

II.6.2 I.6.2.1 Le vecteur colonne AC est le vecteur $(P(\lambda_k))_{1\leqslant k\leqslant n}$. Si $AC = 0$, alors $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P(\alpha_k) = 0$. Par suite, le polynôme P, de degré au plus $n-1$, admet au moins n racines deux à deux distinctes. On en déduit que $P = 0$ puis que $C = 0$.

Ce qui précède montre que $\text{Ker}(A) = \{0\}$ et donc A est inversible.

I.6.2.2 Soit $u = w_1 + w_2 + \ldots + w_n$. La matrice de la famille $\mathfrak{B}(u)$ dans la base $\mathcal{W}$ est $\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = A$.

D'après la question précédente, A est inversible et donc la famille $\mathfrak{B}(u)$ est une base de E. D'après la question II.1.3, on a $r(l, u) = n$.

