SESSION 2010

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE PSI

MATHEMATIQUES 1

PARTIE I

I.1. Définition d'une structure euclidienne sur $\mathbb{R}_n[X]$

I.1.1 L'application B est bilinéaire, symétrique et positive sur $\mathbb{R}_n[X]$ ou sur $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soit alors $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$B(P,P) = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} P(x_i)^2 = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![0,n]\!],\ P(x_i) = 0$$
$$\Rightarrow P = 0 \text{ (car le polynôme P de degré } n \text{ admet au moins } n+1 \text{ racines deux à deux distinctes).}$$

Ainsi, B est une forme bilinéaire, symétrique, définie et positive sur $\mathbb{R}_n[X]$ et donc B est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. En revanche, B n'est pas un produit scalaire sur $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ car par exemple la fonction $f\ :\ x \mapsto (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$ vérifie $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ et $B(f,f) = 0$.

$$\boxed{\text{B est un produit scalaire sur } \mathbb{R}_n[X] \text{ mais pas sur } C(\mathbb{R},\mathbb{R}).}$$

I.1.2 Chaque L_j, $j \in [\![0,n]\!]$, est un polynôme de degré n et donc un élément de $\mathbb{R}_n[X]$. Ensuite, pour $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$, $L_j(x_i) = \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } j \neq i \\ 1 \text{ si } i = j \end{array}\right. = \delta_{i,j}$. On en déduit que pour $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$,

$$B(L_i,L_j) = \sum_{k=0}^{n} L_i(x_k)L_j(x_k) = \sum_{k=0}^{n} \delta_{i,k}\delta_{j,k} = 0 + \delta_{i,i}\delta_{j,i} + 0 = \delta_{i,j}.$$

Donc la famille $(L_j)_{0\leqslant j\leqslant n}$ est une famille orthonormale de l'espace euclidien $(\mathbb{R}_n[X], B)$. Puisque d'autre part $\text{card}(L_j)_{0\leqslant j\leqslant n} = n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X]) < +\infty$, la famille $(L_j)_{0\leqslant j\leqslant n}$ est une base orthonormale de l'espace euclidien $(\mathbb{R}_n[X], B)$.

$$\boxed{\text{La famille } (L_j)_{0\leqslant j\leqslant n} \text{ est une base orthonormale de l'espace euclidien } (\mathbb{R}_n[X], B).}$$

I.2. Définition de $P_n(f)$

I.2.1 Soit $k \in [\![0,n]\!]$. $B(f,L_k) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_k(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \delta_{i,k}f(x_i) = f(x_k)$ et donc

$$\boxed{P_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_k.}$$

Soit $k \in [\![0,n]\!]$. $P_n(f)(x_k) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x_k) = \sum_{i=0}^{n} \delta_{i,k}f(x_i) = f(x_k)$.

$$\boxed{P_n(f) \in \mathbb{R}_n[X] \text{ et } \forall k \in [\![0,n]\!],\ P_n(f)(x_k) = f(x_k).}$$

I.2.2 Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $Q(x_k) = f(x_k)$. Alors $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $(Q - P_n(f))(x_k) = 0$. Par suite, le polynôme $Q - P_n(f)$ est un polynôme de degré au plus n qui admet au moins $n+1$ racines deux à deux distinctes. On en déduit que $Q - P_n(f) = 0$. Ceci montre l'unicité de $P_n(f)$.

$$\boxed{P_n(f) \text{ est l'unique élément de } \mathbb{R}_n[X] \text{ vérifiant } \forall k \in [\![0,n]\!],\ P_n(f)(x_k) = f(x_k).}$$

I.2.3 Si de plus $f \in \mathbb{R}_n[X]$, $P_n(f) = f$ par unicité de $P_n(f)$. En particulier, $\sum_{k=0}^{n} L_k = 1$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n} L_k(x) = 1.}$$

I.3. Une application linéaire

I.3.1 L'application Φ est continue sur le segment $[a,b]$ et donc majorée sur ce segment. On en déduit l'existence de $N_\infty(\Phi)$.

Soit $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ telle que $N_\infty(f) \leqslant 1$. En particulier, $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $|f(x_k)| \leqslant 1$. Par suite, pour tout $x \in [a,b]$,

$$|P_n(f)(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |f(x_k)| \times |L_k(x)| \leqslant N_\infty(f) \sum_{k=0}^{n} |L_k(x)| = \Phi(x) \leqslant N_\infty(\Phi).$$

Ainsi, le nombre $N_\infty(\Phi)$ est un majorant de la fonction $|P_n(f)| = |\Lambda(f)|$ sur $[a,b]$ et puisque $N_\infty(\Lambda(f))$ est le plus petit des majorants de $|\Lambda(f)|$ sur $[a,b]$, on a montré que $N_\infty(\Lambda(f)) \leqslant N_\infty(\Phi)$.

En résumé, $N_\infty(\Phi)$ est un majorant de $\{N_\infty(\Lambda(f)),\ f \in C([a,b],\mathbb{R}),\ N_\infty(f) \leqslant 1\}$. Donc $\|\Lambda\|$ existe dans $\mathbb{R}$ et de plus $\|\Lambda\| \leqslant N_\infty(\Phi)$.

$$\boxed{\|\Lambda\| \leqslant N_\infty(\Phi).}$$

I.3.2 Puisque la fonction Φ est positive sur $[a,b]$, $N_\infty(\Phi) = \underset{t\in[a,b]}{\operatorname{Sup}}\ \Phi(t)|$.

Maintenant, la fonction Φ est continue sur le segment $[a,b]$ et donc la fonction Φ admet un maximum sur ce segment ou encore il existe un réel $\tau \in [a,b]$ tel que $N_\infty(\Phi) = \Phi(\tau)$.

I.3.3 Tout d'abord, pour x dans $[x_0,a] \cup [x_n,b] \cup \{x_0,\ldots,x_n\}$, $\Psi(x) \in \{-1,0,1\}$ et donc $|\Psi(x)| \leqslant 1$. Ensuite, sur chaque $[x_k,x_{k+1}]$, Ψ est affine et $\Psi(x_k)$ et $\Psi(x_{k+1})$ sont dans $\{-1,0,1\}$. Donc sur chaque $[x_k,x_{k+1}]$, on a aussi $|\Psi(x)| \leqslant 1$. Finalement, $\forall x \in [a,b]$, $|\Psi(x)| \leqslant 1$ et donc $N_\infty(\Psi) \leqslant 1$.

Maintenant, pour $k \in [\![0,n]\!]$, si $L_k(\tau) \neq 0$, on a $\varepsilon_k L_k(\tau) = |L_k(\tau)|$ ce qui reste vrai quand $L_k(\tau)0$. Donc

$$\begin{aligned}\Lambda(\Psi)(\tau) = P_n(\Psi)(\tau) &= \sum_{k=0}^{n} \psi(x_k)L_k(\tau) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k L_k(\tau) = \sum_{k=0}^{n} |L_k(\tau)| = \Phi(\tau)\\ &= N_\infty(\Phi).\end{aligned}$$

Puisque Ψ est un élément de $C([a,b],\mathbb{R})$ tel que $N_\infty(\Psi) \leqslant 1$, on a

$$N_\infty(\Phi) \geqslant \|\Lambda\| \geqslant N_\infty(\Lambda(\Psi)) \geqslant |\Lambda(\Psi)(\tau)| = |\Phi(\tau)| = \Phi(\tau) = N_\infty(\Phi).$$

On a ainsi montré que

$$\boxed{\|\Lambda\| = N_\infty(\Phi).}$$

I.4. Un résultat auxiliaire

I.4.1 Soit $k \in [\![0,p-1]\!]$. La fonction g est continue sur $[c_k,c_{k+1}]$, dérivable sur $]c_k,c_{k+1}[$ et vérifie $g(c_k) = g(c_{k+1})$. D'après le théorème de Rolle, il existe un réel $d_k \in]c_k,c_{k+1}[$ tel que $g'(d_k) = 0$. Puisque $c_0 < d_0 < c_1 < d_1 < \ldots < c_{p-1} < d_{p-1} < c_p$, les réels $d_0,\ldots,d_{p-1}$ sont p éléments deux à deux distincts de $[a,b]$ en lesquels la fonction g' s'annule. On a montré que la fonction g' au moins p réels deux à deux distincts de $[a,b]$.

I.4.2 Montrons par récurrence que $\forall k \in [\![0,p]\!]$, la fonction $g^{(k)}$ s'annule en au moins $p+1-k$ réels de $[a,b]$.

- Par définition de g, le résultat est vrai quand $k=0$.
- Soit $k \in [\![0,p-1]\!]$. Supposons que la fonction $g^{(k)}$ s'annule en au moins $p+1-k$ réels de $[a,b]$. D'après la question précédente appliquée à la fonction $g^{(k)}$ qui est bien dérivable sur $[a,b]$, la fonction $(g^{(k)})'$ s'annule en au moins $(p+1-k)-1$ points de $[a,b]$ ou encore la fonction $g^{(k+1)}$ s'annule en au moins $p+1-(k+1)$ points de $[a,b]$.

Le résultat est démontré par récurrence. En particulier, la fonction $g^{(p)}$ s'annule en $(p+1)-p = 1$ point de $[a,b]$ au moins et donc il existe $\alpha \in [a,b]$ tel que $g^{(p)}(\alpha) = 0$.

I.5. Une expression de $f - P_n$

I.5.1 Le polynôme $P_{n+1} - P_n$ s'annule en les $n+1$ réels deux à deux distincts. Donc le polynôme $P_{n+1} - P_n$ est divisible par le polynôme T_{n+1} et il existe un polynôme Q tel que $P_{n+1} - P_n = QT_{n+1}$. De plus, $P_{n+1} - P_n$ est un polynôme de degré au plus $n+1$ et donc $\deg(Q) \leqslant 0$ ou encore Q est une constante. On a montré que

$$\boxed{\text{il existe } r \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R},\ P_{n+1}(x) - P_n(x) = rT_{n+1}(x).}$$

I.5.2 La fonction g est de classe C^{n+1} sur $[a,b]$ car f est de classe C^{n+1} sur $[a,b]$ et T_{n+1} est de classe C^∞ sur $[a,b]$. De plus, la fonction g s'annule en les $n+2$ réels deux à deux distincts $x_0, \ldots, x_n$, y.

D'après la question I.4.2, il existe un réel $\beta \in [a, b]$ tel que $g^{(n+1)}(\beta) = 0$. Maintenant, $g = f-P_{n+1} = f-P_n-(P_{n+1}-P_n) = f - P_n - rT_{n+1}$. Comme P_n est un polynôme de degré au plus n et T_{n+1} est un polynôme unitaire de degré $n + 1$, $g^{(n+1)} = f^{(n+1)} - r(n + 1)!$. L'égalité $g^{(n+1)}(\beta) = 0$ s'écrit donc encore $f^{(n+1)}(\beta) = r(n + 1)!$.

$$\boxed{\text{il existe } \beta \in [a, b] \text{ tel que } f^{(n+1)}(\beta) = r(n + 1)!,}$$

ou encore $r = \dfrac{f^{(n+1)}(\beta)}{(n + 1)!}$ pour un certain $\beta \in [a, b]$. Mais alors

$$0 = f(y) - P_{n+1}(y) = g(y) = f(y) - P_n(y) - rT_{n+1}(y) = f(y) - P_n(y) - \frac{f^{(n+1)}(\beta)}{(n + 1)!}T_{n+1}(y),$$

et donc $f(y) - P_n(y) = \dfrac{f^{(n+1)}(\beta)}{(n + 1)!}T_{n+1}(y)$. On a montré que

$$\boxed{\forall y \in [a, b] \setminus \{x_0, \ldots, x_n\},\ \exists \beta \in [a, b]/\ f(y) - P_n(y) = \frac{f^{(n+1)}(\beta)}{(n + 1)!}T_{n+1}(y).}$$

I.5.3 Si maintenant y est l'un des x_k, les deux membres de l'égalité précédente sont nuls et donc cette égalité est encore vérifiée.

$$\boxed{\forall y \in [a, b],\ \exists \beta \in [a, b]/\ f(y) - P_n(y) = \frac{f^{(n+1)}(\beta)}{(n + 1)!}T_{n+1}(y).}$$

PARTIE II

II.1. Etude du maximum de φ

II.1.1 La fonction φ est continue sur le segment $[0, n]$ et admet donc un maximum sur ce segment.

II.1.2 Soit $t \in [0, n]$.

$$\varphi(n - t) = \left|\prod_{k=0}^{n}((n - t) - k)\right| = \left|\prod_{k=0}^{n}(t - (n - k))\right| = \left|\prod_{j=0}^{n}(t - j)\right| = \varphi(t).$$

II.1.3 Soit $t \in]1, n]$ tel que $t \notin \mathbb{N}$. Alors $\varphi(t) > 0$ et

$$\frac{\varphi(t - 1)}{\varphi(t)} = \frac{|(t - 1)(t - 2) \ldots (t - n)(t - (n + 1))|}{|t(t - 1) \ldots (t - n)|} = \left|\frac{t - (n + 1)}{t}\right| = \frac{(n + 1) - t}{t} = \frac{n + 1}{t} - 1.$$

Maintenant, la fonction $t \mapsto \dfrac{n + 1}{t} - 1$ est décroissante sur $\left[1, \dfrac{n}{2}\right]$ et donc pour $t \in \left[1, \dfrac{n}{2}\right]$,

$$\frac{\varphi(t - 1)}{\varphi(t)} = \frac{(n + 1) - t}{t} \geqslant \frac{(n + 1) - \frac{n}{2}}{\frac{n}{2}} = \frac{n + 2}{n} \geqslant 1,$$

puis $\varphi(t - 1) \geqslant \varphi(t)$ car $\varphi(t) > 0$. On a montré que

$$\boxed{\forall t \in \left[1, \frac{n}{2}\right],\ \varphi(t - 1) \geqslant \varphi(t).}$$

II.1.4 Soit $p \in \mathbb{N}$. Soient $M = \underset{t\in[0,n]}{\operatorname{Max}} \varphi(t)$ puis $t_0 \in [0, n] = [0, 2p]$ tel que $\varphi(t_0) = M$.

D'après la question II.1.2, $\varphi(n - t_0) = \varphi(t_0)$ et l'un des deux réels t_0 ou $n - t_0$ est dans $\left[0, \dfrac{n}{2}\right] = [0, p]$. Donc φ atteint son maximum dans $[0, p]$ et on supposera dorénavant que $t_0 \in [0, p]$. Si $p = 1$, c'est fini. Sinon, $p \geqslant 2$. D'après la question précédente, si $t_0 \in]1, p]$

$$M = \varphi(t_0) \leqslant \varphi(t_0 - 1) \leqslant \ldots \varphi(t_0 - E(t_0)) \leqslant M,$$

où $E(t_0)$ désigne la partie entière de t_0 de sorte que $t - E(t_0) \in [0, 1[$. Ainsi, $M = \varphi(t_0 - E(t_0))$ avec cette fois-ci $t_0 - E(t_0) \in [0, 1[$. On a montré que φ atteint son maximum en un point de $[0, 1]$.

II.2. Abscisse du maximum de la fonction φ

II.2.1 Pour tout $t \in [0, n] \setminus \mathbb{N}$, $\ln(\varphi(t)) = \sum_{k=0}^{n} \ln|t-k|$ puis en dérivant, on obtient pour $t \in [0, n] \setminus \mathbb{N}$,

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{t-k}.$$

II.2.2 Soit $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$. Alors $\forall k \in [\![2, n]\!]$, $t - k < 0$ puis $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{t-k} < 0$. Par suite,

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{t-k} < \frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} = \frac{2t-1}{t(t-1)} \leqslant 0.$$

Par suite, $\forall t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$, $\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} < 0$. Puisque la fonction φ est strictement positive sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$, on a montré que

$$\boxed{\forall t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[,\ \varphi'(t) < 0.}$$

II.2.3 Pour $t \in]0, 1[$, $g'(t) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(t-k)^2} < 0$. Donc la fonction $g = \frac{\varphi'}{\varphi}$ est strictement décroissante sur $]0, 1[$. En particulier, $g = \frac{\varphi'}{\varphi}$ est injective et s'annule donc au plus une fois sur $]0, 1[$. Il en est de même de φ'.

II.2.4 Soit t_n un réel de $[0, 1]$ en lequel φ atteint son maximum. Puisque $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ et que φ est strictement positive sur $]0, 1[$, $t_n \in]0, 1[$. Puisque $]0, 1[$ est un intervalle ouvert et que φ est dérivable sur $]0, 1[$, on sait que $\varphi'(t_n) = 0$. La question précédente montre alors l'unicité de t_n dans $]0, 1[$ et la question II.2.2 montre que $t_n \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ car φ' ne s'annule pas sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

$$\boxed{\text{Dans } [0, 1], \text{ il existe un unique réel } t_n \text{ tel que } \varphi(t_n) = \underset{t \in [0,n]}{\mathrm{Max}}\, \varphi(t). \text{ De plus, } t_n \in \left]0, \frac{1}{2}\right[.}$$

Enfin, l'égalité $\varphi'(t_n) = 0$ fournit

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{t_n - k} = 0.}$$

II.3. Etude de l'abscisse t_n du maximum de φ

II.3.1 Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $0 = 1 - 1 < k - t_n < k$ et donc $\frac{1}{k} < \frac{1}{k - t_n}$ par stricte décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$. Par suite,

$$\frac{1}{t_n} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{t_n - k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k - t_n} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

II.3.2 On sait que la série de terme général $\frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}^*$ diverge. Plus précisément, $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$. Puisqu'on a $0 < t_n < \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} t_n = 0.}$$

II.4. Une majoration de φ

II.4.1 La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est continue et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$. Par suite, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sum_{k=1}^{n}(k+1-k)\frac{1}{k} => \sum_{k=1}^{n}\int_{k}^{k+1}\frac{1}{t}\,dt = \int_{1}^{n+1}\frac{1}{t}\,dt.$$

II.4.2 Mais alors $t_n < \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}} < \dfrac{1}{\displaystyle\int_{1}^{n+1}\frac{1}{t}\,dt} = \dfrac{1}{\ln(n+1)}$.

II.4.3 Soit $t \in [0,n]$. Puisque $t_n \in]0,1[$,

$$\begin{aligned}\varphi(t) &\leqslant \varphi(t_n) = t_n(1-t_n)(2-t_n)\ldots(n-t_n) \leqslant t_n \times 1 \times 2 \times \ldots \times n = t_n n!\\ &< \frac{n!}{\ln(n+1)}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \in [0,n],\ \varphi(t) < \frac{n!}{\ln(n+1)}.}$$

II.5. Une majoration de $N_\infty(f - P_n)$

II.5.1 Soit $x \in [a,b]$.

$$|T_{n+1}(x)| = \prod_{i=0}^{n}|x-x_i| = \prod_{i=0}^{n}|(a+th)-(a+ih)| = h^{n+1}\prod_{i=0}^{n}|t-i| = h^{n+1}\varphi(t).$$

$$\boxed{\forall x \in [a,b],\ |T_{n+1}(x)| = h^{n+1}\varphi(t).}$$

II.5.2 f est de classe C^{n+1} sur le segment $[a,b]$ et donc $N_\infty(f^{(n+1)})$ existe.
Soit $y \in [a,b]$. D'après la question I.5.2, il existe $\beta \in [a,b]$ tel que $f(y) - P_n(y) = \dfrac{1}{(n+1)!}T_n(y)f^{(n+1)}(\beta)$. On en déduit en posant $t = \dfrac{y-a}{h}$ que

$$\begin{aligned}|f(y)-P_n(y)| &= \frac{1}{(n+1)!}|T_n(y)||f^{(n+1)}(\beta)| = \frac{1}{(n+1)!}h^{n+1}\varphi(t)|f^{(n+1)}(\beta)|\\ &\leqslant \frac{1}{(n+1)!} \times h^{n+1} \times \frac{n!}{\ln(n+1)} \times N_\infty(f^{(n+1)} = \frac{h^{n+1}}{(n+1)\ln(n+1)}N_\infty(f^{(n+1)}),\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\forall f \in C^{n+1}([a,b],\mathbb{R}),\ N_\infty(f - P_n(f)) \leqslant \frac{h^{n+1}}{(n+1)\ln(n+1)}N_\infty(f^{(n+1)}) \text{ où } h = \frac{b-a}{n}.}$$

PARTIE III

III.1. Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Pour tout réel x,

$$T_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i) = (x-x_k)\prod_{i\neq k}(x_k - x_i)\prod_{i\neq k}\frac{x-x_i}{x_k-x_i} = \frac{1}{w_k}(x-x_k)L_k(x).$$

III.2. Pour tout réel x distinct des x_k, $k \in [\![0,n]\!]$,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n}f(x_k)L_k = \sum_{k=0}^{n}f(x_k)\frac{w_kT_{n+1}(x)}{x-x_k} = T_{n+1}(x)\sum_{k=0}^{n}\frac{w_kf(x_k)}{x-x_k}.$$

En particulier, d'après la question II.1.3, $1 = P_n(1) = T_{n+1}(x)\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{w_k}{x-x_k}$ et donc pour tout x distinct des x_k, $k \in [\![0,n]\!]$,

$$P_n(f)(x) = \frac{P_n(f)(x)}{1} = \frac{T_{n+1}(x)\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{w_k f(x_k)}{x-x_k}}{T_{n+1}(x)\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{w_k}{x-x_k}} = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{w_k f(x_k)}{x-x_k}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{w_k}{x-x_k}}.$$

$$\boxed{P_n = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{w_k f(x_k)}{X-x_k}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{w_k}{X-x_k}}.}$$

III.3. **III.3.1** Soit $k \in [\![0,n]\!]$.

$$w_k = \frac{1}{\displaystyle\prod_{i\neq k}(x_k-x_i)} = \frac{1}{\displaystyle\prod_{i\neq k}((k-i)h)} = \frac{1}{h^n\displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}(k-i)\prod_{i=k+1}^{n}(k-i)} = \frac{1}{h^n k!(-1)^{n-k}(n-k)!}$$
$$= \frac{(-1)^{n-k}\times n!}{n!h^n k!(n-k)!} = \frac{(-1)^{n-k}}{n!h^n}\binom{n}{k}.$$

Par suite, $w_k^* = (-1)^k\dbinom{n}{k}$.

III.3.2 Pour x réel distinct des x_k, $k \in [\![0,n]\!]$,

$$P_n(f)(x) = \frac{(-1)^n h^n n!}{(-1)^n h^n n!}\,\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{w_k f(x_k)}{x-x_k}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{w_k}{x-x_k}} = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{f(x_k)}{x-x_k}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{x-x_k}}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{x_k,\ k\in[\![0,n]\!]\},\ P_n(f)(x) = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{f(x_k)}{x-x_k}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{x-x_k}}.}$$

III.4. **Une valeur approchée de** $\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$

III.4.1 Pour tout $k \in [\![0,4n]\!]$, $x_k = k-2n$.

III.4.2 Pour tout $k \in [\![0,4n]\!]$, $f(x_k) = \cos\left(\dfrac{\pi(k-2n)}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{k\pi}{2} - n\pi\right) = (-1)^n\cos\left(\dfrac{k\pi}{2}\right)$. Les $\cos\left(\dfrac{k\pi}{2}\right)$ sont nuls quand k est impair et donc

$$P_n(x) = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{4n}(-1)^{n+k}\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\binom{4n}{k}\frac{1}{x-(k-2n)}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{4n}(-1)^k\binom{4n}{k}\frac{1}{x-(k-2n)}} = \frac{\displaystyle\sum_{p=0}^{2n}(-1)^{n+2p}\cos\left(\frac{2p\pi}{2}\right)\binom{4n}{2p}\frac{1}{x-(2p-2n)}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{4n}(-1)^k\binom{4n}{k}\frac{1}{x-(k-2n)}}$$
$$= \frac{\displaystyle\sum_{p=0}^{2n}(-1)^{n+p}\binom{4n}{2p}\frac{1}{x-(2p-2n)}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{4n}(-1)^k\binom{4n}{k}\frac{1}{x-(k-2n)}} = \frac{\displaystyle\sum_{k=-n}^{n}(-1)^{k+2n}\binom{4n}{2(k+n)}\frac{1}{x-2k}}{\displaystyle\sum_{k=-2n}^{2n}(-1)^{k+2n}\binom{4n}{k+2n}\frac{1}{x-k}}$$
$$= \frac{\displaystyle\sum_{k=-n}^{n}(-1)^k\binom{4n}{2n+2k}\frac{1}{x-2k}}{\displaystyle\sum_{k=-2n}^{2n}(-1)^k\binom{4n}{2n+k}\frac{1}{x-k}}.$$

III.4.3 Soient $x \in [-2n, 2n]$ puis $p = E(x)$. Alors, $p \leqslant x < p+1$ et donc

$$\prod_{k=-2n}^{2n} |x-k| = \left(\prod_{k=-2n}^{p}(x-k)\right)\left(\prod_{k=p+1}^{2n}(k-x)\right) \leqslant \left(\prod_{k=-2n}^{p}((p+1)-k)\right)\left(\prod_{k=p+1}^{2n}(k-p)\right)$$
$$= (2n+p+1)!(2n-p)!$$

III.4.4 f est de classe C^{4n+1} sur $[-2n, 2n]$ et d'après la question I.5.2, pour tout réel $x \in [-2n, 2n]$

$$|f(x) - P_{4n}(x)| \leqslant \frac{1}{(4n+1)!} N_\infty(T_{4n+1}) N_\infty(f^{(4n+1)})$$

Or, pour tout réel x, $f^{(4n+1)}(x) = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^{4n+1} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ et donc $N_\infty(f^{(4n+1)}) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{4n+1}$. D'autre part, d'après la question précédente, $|T_{4n+1}(x)| = \displaystyle\prod_{k=-2n}^{2n} |x-k| \leqslant (2n+p+1)!(2n-p)!$. Finalement

$$\boxed{\forall x \in [-2n, 2n],\ |f(x) - P_{4n}(x)| \leqslant (2n+p+1)!(2n-p)! \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{4n+1}}{(4n+1)!} \text{ où } p = E(x).}$$

Ensuite

$$\frac{\theta(n+1,p)}{\theta(n,p)} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \frac{(2n+p+3)(2n+p+2)(2n+2-p)(2n+1-p)}{(4n+5)(4n+4)(4n+3)(4n+2)}$$
$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \times \frac{1}{2^4} = \frac{\pi^4}{256} = 0,3\ldots < 1$$

D'après la règle de d'Alembert, la série de terme général $\theta(n,p)$, $n \in \mathbb{N}$, converge et en particulier

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \theta(n,p) = 0.}$$

