SESSION 2010

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE MP

MATHEMATIQUES 1

EXERCICE 1

1. • Pour $x \neq 0$, $\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \dfrac{0-0}{x-0} = 0$. Mais alors $\displaystyle\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0$. Ainsi, f admet en $(0,0)$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

• Pour $y \neq 0$, $\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \dfrac{y^4/y^2}{y} = y$ et donc $\displaystyle\lim_{y\to 0} \dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0$. Ainsi, f admet en $(0,0)$ une dérivée partielle par rapport à sa deuxième variable y et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

$$\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.}$$

2. Si f est différentiable en $(0,0)$, on a nécessairement pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$

$$df_{(0,0)}(h,k) = h\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) + k\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Réciproquement, pour $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, posons $L(h,k) = 0$. L est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et pour $(h,k) \neq (0,0)$,

$$\dfrac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-L(h,k)}{\|(h,k)\|_2} = \dfrac{k^4}{(h^2+k^2)^{3/2}} \leqslant \dfrac{h^4+2h^2k^2+k^4}{(h^2+k^2)^{3/2}} = \dfrac{(h^2+k^2)^2}{(h^2+k^2)^{3/2}} = \sqrt{h^2+k^2} = \|(h,k)\|_2.$$

Donc $\dfrac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-L(h,k)}{\|(h,k)\|_2}$ tend vers 0 quand (h,k) tend vers $(0,0)$ ce qui montre que f est différentiable en $(0,0)$.

$$\boxed{f \text{ est différentiable en } (0,0) \text{ et } df_{(0,0)} = 0.}$$

EXERCICE 2

1. Soient $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé puis K une partie de E. K est compacte si et seulement si K est vide ou bien K est non vide et de toute suite d'éléments de K, on peut extraire une sous-suite convergeant dans K.

2. Soit K une partie compacte de E. Si $K = \varnothing$, $f(K) = f(\varnothing) = \varnothing$ et $f(K)$ est une partie compacte de F.

Supposons maintenant $K \neq \varnothing$. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $f(K)$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in K$ tel que $f(x_n) = y_n$. Puisque la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans le compact K, on peut en extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, convergeant vers un certain élément x de K. Puisque f est continue sur E et donc en x,

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)}\right) = \lim_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)}) = \lim_{n\to+\infty} y_{\varphi(n)}.$$

Ainsi, la suite $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite $f(x) \in f(K)$. On a montré que de toute suite d'éléments de $f(K)$, on peut extraire une sous-suite convergente de limite appartenant à $f(K)$ et dans tous les cas, $f(K)$ est une partie compacte de F.

L'image réciproque d'une partie compacte de F par une application continue n'est pas nécessairement une partie compacte de E. Par exemple, si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, alors f est continue sur $\mathbb{R}$ et $f^{-1}([-1,1]) = \mathbb{R}$. $[-1,1]$ est un compact de $\mathbb{R}$ car est fermé et borné mais $\mathbb{R}$ n'est pas un compact de $\mathbb{R}$ car $\mathbb{R}$ n'est pas borné.

PROBLÈME : PHÉNOMÈNE DE GIBBS

Partie préliminaire

1. **(a)** La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est continue sur $]0,\pi]$ et a une limite réelle en 0 à savoir 1 ou encore est prolongeable par continuité en 0. Donc cette fonction est intégrable sur $]0,\pi]$. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(0) = 1$ et pour $t \neq 0$, $g(t) = \dfrac{\sin t}{t}$.

(b) Pour tout réel $t \neq 0$,

$$g(t) = \frac{\sin t}{t} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k+1)!} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k+1)!},$$

ce qui reste vrai pour $t = 0$. Donc la fonction g est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. On sait alors que pour tout réel $r > 0$, la série entière de somme g converge uniformément vers g sur $[-r, r]$. En particulier, la série de fonctions de terme général $t \mapsto (-1)^k \dfrac{t^{2k}}{(2k+1)!}$, $k \in \mathbb{N}$, converge uniformément vers la fonction g sur le segment $[0,\pi]$ et d'autre part chacune de ces fonctions est continue sur ce segment. D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, on peut écrire

$$I = \int_0^{\pi} g(t)\, dt = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_0^{\pi} \frac{t^{2k}}{(2k+1)!}\, dt = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\pi^{2k+1}}{(2k+1) \times (2k+1)!}.$$

$$\boxed{I = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\pi^{2k+1}}{(2k+1) \times (2k+1)!}.}$$

2. **(a)** D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\pi^n}{n!} = 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $v_n = \dfrac{\pi^n}{n \times n!} > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} - 1 = \frac{\dfrac{\pi^{n+1}}{(n+1) \times (n+1)!}}{\dfrac{\pi^n}{n \times n!}} - 1 = \frac{n\pi}{(n+1)^2} - 1 = \frac{-n^2 + (\pi - 2)n - 1}{(n+1)^2} < \frac{-n^2 + 2n - 1}{(n+1)^2} = -\frac{(n-1)^2}{(n+1)^2} \leqslant 0.$$

Mais alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} < v_n$ et la suite $\left(\dfrac{\pi^n}{n \times n!}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.

(b) Pour $k \in \mathbb{N}$, $u_k = \dfrac{\pi^{2k+1}}{(2k+1) \times (2k+1)!}$. D'après la question précédente, la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de limite nulle ou encore, la suite $((-1)\hat{u}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est alternée en signe et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. D'après une majoration classique du reste à l'ordre n d'une série alternée, pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$|R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k \right| \leqslant \left| (-1)^{n+1} u_{n+1} \right| = \frac{\pi^{2n+3}}{(2n+3) \times (2n+3)!}.$$

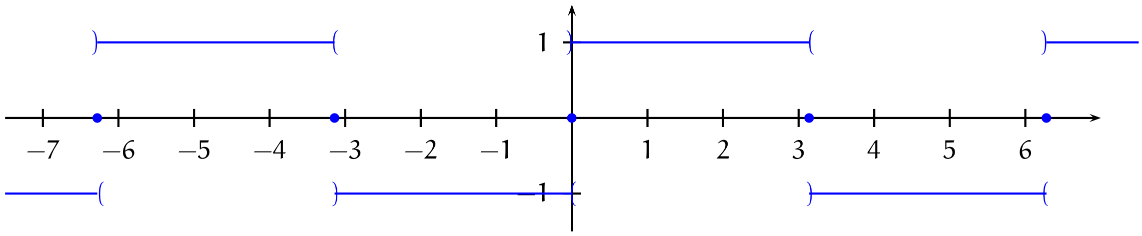
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\left| \dfrac{2}{\pi} I - \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k \right| = \dfrac{2}{\pi} |R_n| \leqslant \dfrac{2\pi^{2n+2}}{(2n+3) \times (2n+3)!}$. Pour $n = 4$, on a $\dfrac{2\pi^{2n+2}}{(2n+3) \times (2n+3)!} = 0,0004\ldots < \dfrac{10^{-2}}{2}$ et donc une valeur approchée à $\dfrac{10^{-2}}{2}$ près de $\dfrac{2}{\pi} \displaystyle\sum_{k=0}^{4} (-1)^k u_k$ est une valeur approchée à 10^{-2} près de $\dfrac{2}{\pi} I$.

La machine fournit $\dfrac{2}{\pi} \displaystyle\sum_{k=0}^{4} (-1)^k u_k = 2 \left(1 - \dfrac{\pi^2}{3 \times 3!} + \dfrac{\pi^4}{5 \times 5!} - \dfrac{\pi^6}{7 \times 7!} + \dfrac{\pi^8}{9 \times 9!} \right) = 1,179\ldots$

$$\boxed{I = 1,18 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}}$$

Première partie : Phénomène de Gibbs

3. La fonction f est 2π-périodique, de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ et vérifie en tout réel x, $f(x) = \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$. D'après le théorème de DIRICHLET, la série de FOURIER de f converge simplement vers la fonction f sur $\mathbb{R}$.



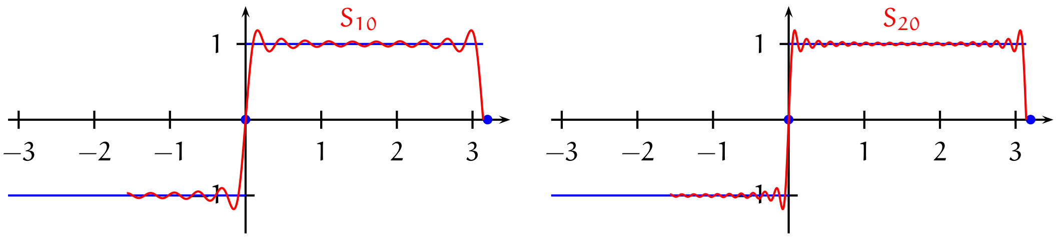
De plus, f est impaire et donc pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nt)\ dt = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}.$$

Par suite, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $b_{2k}(f) = 0$ et pour $k \in \mathbb{N}$, $b_{2k+1}(f) = \dfrac{4}{(2k+1)\pi}$. Ainsi, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, S_n est le $2n$-ème polynôme de FOURIER de f. On a donc montré que la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction f sur $\mathbb{R}$.

La suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers la fonction f sur $\mathbb{R}$ car chaque fonction S_n est continue sur $\mathbb{R}$ mais la fonction f ne l'est pas.

4.



On constate que les courbes représentatives des fonctions S_n, n grand, sont presque verticales au voisinage de $t = 0$ ce qui présage d'un saut pour la fonction limite.

5. (a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}\sin t \times T_n(t) &= \sum_{k=0}^{n-1}(\sin t)(\sin((2k+1)t)) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(\cos(2kt) - \cos((2k+2)t))\\ &= \frac{1}{2}(\cos(0) - \cos(2nt))\ \text{(somme télescopique)}\\ &= \frac{1}{2}(1-\cos(2nt)) = \sin^2(nt),\end{aligned}$$

et donc, puisque $\sin t \neq 0$, $T_n(t) = \dfrac{\sin^2(nt)}{\sin t}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z},\ T_n(t) = \frac{\sin^2(nt)}{\sin t}.}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [a,b]$, $0 < \sin(a) \leqslant \sin(t)$ et donc $T_n(t) \leqslant \dfrac{1}{\sin(a)}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [a,b],\ T_n(t) \leqslant \frac{1}{\sin(a)}.}$$

(c) Soient $n \geqslant 1$, $p \geqslant 2$ et $t \in [a,b]$. Une transformation d'ABEL fournit

$$\begin{aligned}
|S_{n+p}(t)-S_n(t)| &= \frac{4}{\pi}\left|\sum_{k=n}^{n+p-1}\frac{1}{2k+1}(T_{k+1}(t)-T_k(t))\right| = \frac{4}{\pi}\left|\sum_{k=n}^{n+p-1}\frac{1}{2k+1}T_{k+1}(t)-\sum_{k=n}^{n+p-1}\frac{1}{2k+1}T_k(t)\right|\\
&= \frac{4}{\pi}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{2k-1}T_k(t)-\sum_{k=n}^{n+p-1}\frac{1}{2k+1}T_k(t)\right|\\
&= \frac{4}{\pi}\left|\frac{1}{2(n+p)-1}T_{n+p}(t)+\sum_{k=n+1}^{n+p}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)T_k(t)-\frac{1}{2n+1}T_n(t)\right|\\
&\leqslant \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2(n+p)-1}|T_{n+p}(t)|+\sum_{k=n+1}^{n+p}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)|T_k(t)|-\frac{1}{2n+1}|T_n(t)|\right)\\
&\leqslant \frac{4}{\pi\sin(a)}\left(\frac{1}{2(n+p)-1}+\sum_{k=n+1}^{n+p-1}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)+\frac{1}{2n+1}\right)\\
&= \frac{4}{\pi\sin(a)}\left(\frac{1}{2(n+p)-1}+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2(n+p)-1}\right)+\frac{1}{2n+1}\right)\text{(somme télescopique)}\\
&= \frac{8}{\pi\sin(a)(2n+1)}.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour $\forall n \geqslant 1$, $\forall p \geqslant 2$, $\forall t \in [a,b]$, $|S_{n+p}(t)-S_n(t)| \leqslant \dfrac{8}{\pi\sin(a)(2n+1)}$. Quand p tend vers $+\infty$ à n et t fixés, on obtient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [a,b],\ |f(t)-S_n(t)| \leqslant \frac{8}{\pi\sin(a)(2n+1)}.}$$

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sup\{|f(t)-S_n(t)|,\ t \in [a,b]\} \leqslant \dfrac{8}{\pi\sin(a)(2n+1)}$ puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\{|f(t)-S_n(t)|,\ t \in [a,b]\} = 0$. Par suite,

$$\boxed{\text{la série de FOURIER de } f \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur tout segment } [a,b] \text{ contenu dans } \left]0,\frac{\pi}{2}\right[.}$$

6. **(a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel $t \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, $S'_n(t) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos((2k+1)t)$. Par suite, pour tout réel $t \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$,

$$\begin{aligned}
\sin(t)\times S'_n(t) &= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\sin(t)\cos((2k+1)t) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}(\sin(2k+2)t)-\sin(2kt))\\
&= \frac{2\sin(2nt)}{\pi},
\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [a,b],\ S'_n(t) = \frac{2\sin(2nt)}{\pi\sin(t)}.}$$

Puis pour $t \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$

$$S'_n(t) = 0 \Leftrightarrow \sin(2nt) = 0 \Leftrightarrow 2nt \in \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow t \in \frac{\pi}{2n}\mathbb{Z} \Leftrightarrow t \in \left\{\frac{\pi}{2n},\frac{2\pi}{2n},\ldots,\frac{(n-1)\pi}{2n},\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha_n = \frac{\pi}{2n}.}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction S'_n est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout $t \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, $S'_n(t) = \dfrac{2\sin(2nt)}{\pi\sin(t)}$. Donc pour $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $S_n(x) = \displaystyle\int_0^x S'_n(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\sin(2nt)}{\sin(t)}\,dt$. En posant $u = 2nt$, et donc $t = \dfrac{u}{2n}$ puis $dt = \dfrac{du}{2n}$, on obtient en particulier

$$S_n(\alpha_n) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/(2n)} \frac{\sin(2nt)}{\sin(t)}\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{\sin\left(\frac{u}{2n}\right)}\,\frac{du}{2n} = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{\sin\left(\frac{u}{2n}\right)}\,du.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n(\alpha_n) = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{\sin\left(\frac{u}{2n}\right)}\,du.}$$

(c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in]0, \pi]$, posons $f_n(u) = \dfrac{\sin(u)}{n\pi\sin\left(\frac{u}{2n}\right)}$.

- Chaque fonction f_n est continue sur $]0, \pi]$.
- La suite de fonctions f_n converge simplement sur $]0, \pi]$ vers la fonction $u \mapsto \dfrac{2\sin(u)}{\pi u}$ qui est continue sur $]0, \pi]$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in]0, \pi]$,

$$|f_n(u)| = \frac{\sin(u)}{n\pi\sin\left(\frac{u}{2n}\right)} \leqslant \frac{\sin(u)}{n\pi\dfrac{2u}{2n\pi}} = \frac{\sin(u)}{u} = \varphi(u) \text{ (hypothèse de domination).}$$

De plus la fonction φ est continue et intégrable sur $]0, \pi]$ d'après le préliminaire.

D'après le théorème de convergence dominée, la suite $(S_n(\alpha_n))$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(\alpha_n) = \int_0^{\pi} \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(u)}{n\pi\sin\left(\frac{u}{2n}\right)}\,du = \int_0^{\pi} \frac{2\sin(u)}{\pi u}\,du = \frac{2I}{\pi}.$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n(\alpha_n) = \frac{2I}{\pi}.}$$

7. 1ère solution. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\sup\limits_{x\in]0,\frac{\pi}{2}[} |S_n(x) - f(x)| \geqslant |S_n(\alpha_n) - f(\alpha_n)| = |S_n(\alpha_n) - 1|$. Cette dernière expression tend vers $\left|\dfrac{2I}{\pi} - 1\right| = 0,2$ à 10^{-1} près d'après la question 2.b) et donc $\sup\limits_{x\in]0,\frac{\pi}{2}[} |S_n(x) - f(x)|$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

2ème solution. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\lim\limits_{n\to+\infty}(S_n(x) - f(x))\right) = \lim\limits_{x\to 0^+} 0 = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\lim\limits_{x\to 0^+}(S_n(x) - f(x))\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}(0 - 1) = -1 \neq 0$.
D'après le théorème d'interversion des limites, la suite de fonctions (S_n) ne converge pas uniformément vers f sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ ou encore $\sup\limits_{x\in]0,\frac{\pi}{2}[} |S_n(x) - f(x)|$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Deuxième partie : Démonstration du théorème de convergence normale

8. Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, à valeurs dans $\mathbb{C}$. Alors

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt.$$

Si tous les c_n, $n \in \mathbb{Z}$, sont nuls alors $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt = 0$ puis $\forall t \in [0, 2\pi]$, $|f(t)|^2 = 0$ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle) puis $\forall t \in [0, 2\pi]$, $f(t) = 0$ et finalement $f = 0$ par 2π-périodicité.

Le résultat ne reste pas valable si la fonction est seulement continue par morceaux. Par exemple, soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $f(t) = 0$ et $\forall t \in 2\pi\mathbb{Z}$, $f(t) = 1$. f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = 0$ mais f n'est pas la fonction nulle.

9. (a) Par hypothèse, la série de fonctions $S_n\ :\ t \mapsto c_0(f) + \displaystyle\sum_{p=1}^{n}\left(c_{-p}(f)e^{-ipt} + c_p(f)e^{ipt}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge uniformément vers la fonction g sur $\mathbb{R}$. Puisque chaque fonction S_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$.

Soit $k \in \mathbb{Z}$. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $|g(t)e^{-ikt} - S_n(t)e^{-ikt}| = |g(t) - S_n(t)|$, la série de fonctions $t \mapsto S_n(t)e^{ikt}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ et donc sur le segment $[0, 2\pi]$ vers la fonction $t \mapsto g(t)e^{-ikt}$. D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment,

$$\begin{aligned}
c_k(g) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(c_0(f)e^{-ikt} + \sum_{p=1}^{+\infty}(c_{-p}e^{i(-p-k)t} + c_p e^{i(p-k)t})\right)\,dt \\
&= c_0(f)\times\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\,dt + \sum_{p=1}^{+\infty}\left(c_{-p}(f)\times\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(-p-k)t}\,dt + c_p(f)\times\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(p-k)t}\,dt\right) \\
&= \delta_{0,k}c_0(f) + \sum_{p=1}^{+\infty}(c_{-p}(f)\delta_{k,-p} + c_p(f)\delta_{k,p}) = c_k(f).
\end{aligned}$$

(b) Ainsi, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = c_n(g)$. Puisque les deux fonctions continues f et g sont 2π-périodiques et continues sur $\mathbb{R}$, on en déduit d'après la question 8 que $f = g$.

10. (a) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Supposons f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On peut effectuer une intégration par parties qui fournit

$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[f(t)e^{-int}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\times(-ine^{-int})\,dt = 0 + in\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int})\,dt = inc_n(f).$$

Si f est continue et de classe C^1 par morceaux, la fonction f' n'est éventuellement pas définie en quelques points de $[0, 2\pi]$ et d'autre part, l'intégration par parties ci-dessus n'est plus licite. Néanmoins, soit $a_0 = 0 < a_1 < \ldots < a_{k-1} < a_k = 2\pi$ une subdivision de $[0, 2\pi]$ adaptée à la fonction f. Pour $t \in [0, 2\pi]$, on pose $DF(t) = f'(t)$ si $t \in [0, 2\pi] \setminus \{a_0, a_1, \ldots, a_k\}$ et 0 si $t \in \{a_0, a_1, \ldots, a_k\}$ puis on prolonge Df à $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité. Vérifions alors que $c_n(Df) = inc_n(f)$.

La fonction Df est définie sur $[0, 2\pi]$ et continue par morceaux et si on note f_p la restriction de f à $[a_p, a_{p+1}]$

$$\begin{aligned}
\int_{a_p}^{a_{p+1}} Df(t)e^{-int}\,dt &= \int_{a_p}^{a_{p+1}} f_p'(t)e^{-int}\,dt \\
&= \int_{a_p}^{a_{p+1}} \widetilde{f}_p'(t)e^{-int}\,dt \text{ (où } \widetilde{f}_p' \text{ désigne le prolongement par continuité de la fonction } f_p' \text{en } a_p \text{ et } a_{p+1}) \\
&= \left[f_p(t)e^{-int}\right]_{a_p}^{a_{p+1}} + in\int_{a_p}^{a_{p+1}} f_p(t)e^{-int}\,dt = \left[f(t)e^{-int}\right]_{a_p}^{a_{p+1}} + in\int_{a_p}^{a_{p+1}} f(t)e^{-int}\,dt
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
c_n(Df) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{p=0}^{k-1}\left(\left[f(t)e^{-int}\right]_{a_p}^{a_{p+1}} + in\int_{a_p}^{a_{p+1}} f(t)e^{-int}\,dt\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\left[f(t)e^{-int}\right]_0^{2\pi} + in\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt\right) = inc_n(f).
\end{aligned}$$

Comme la fonction Df coïncide avec la fonction f' sur $[0, 2\pi]$ sauf peut-être en un nombre fini de points, on notera encore $c_n(f')$ le complexe $c_n(Df)$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f') = inc_n(f).}$$

(b) Pour tout réel a et b, on a $|ab| \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ car $(|a| - |b|)^2 \geqslant 0$. Soit alors $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel t,

$$\begin{aligned}
|u_n(t)| &\leqslant |c_n(f)| + |c_{-n}(f)| = |inc_n(f')| + |inc_{-n}(f')| = n|c_n(f')| + n|c_{-n}(f')| \\
&\leqslant \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2}|c_n(f')|^2 + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2}|c_{-n}(f')|^2 = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2}(|c_n(f')|^2 + |c_{-n}(f')|^2)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n(t)| \leqslant \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2}(|c_n(f')|^2 + |c_{-n}(f')|^2).}$$

(c) La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge et d'autre part, d'après le théorème de Parseval, puisque la fonction f' « est » continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, la série numérique de terme général $\frac{1}{2}(|c_n(f')|^2 + |c_{-n}(f')|^2)$. Finalement, on a majoré $u_n(t)|$ par une expression indépendante de t, terme général d'une série numérique convergente et donc la série de fonction de terme général u_n converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $g = f$.

(d) On vient de montrer que si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 par morceaux, 2π-périodique alors la série de FOURIER de f converge normalement vers la fonction f sur $\mathbb{R}$. Le phénomène de GIBBS ne se produit donc pas.

