SESSION 2009

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE PC

MATHEMATIQUES 2

Partie I

I.1. Soit $z \in \mathbb{C}$.

I.1.1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(-zx) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!} x^n$ et $\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} x^{2n}$. Ces deux séries ont un rayon de convergence infini.

I.1.2. On sait que le produit de CAUCHY des deux séries entières ci-dessus a un rayon de convergence infini et que pour $(x, z) \in \mathbb{C}^2$,

$$F(x,z) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^k}{k!} x^k\right) \times \left(\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l}{2^l l!} x^{2l}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k+2l=n} \frac{(-1)^k z^k}{k!} \times \frac{(-1)^l}{2^l l!}\right) x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{E(\frac{n}{2})} \frac{(-1)^{n-2p} z^{n-2p}}{(n-2p)!} \times \frac{(-1)^p}{2^p p!}\right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\sum_{p=0}^{E(\frac{n}{2})} \frac{(-1)^p z^{n-2p}}{2^p p!(n-2p)!}\right) x^n.$$

$$\boxed{\forall (x,z) \in \mathbb{C}^2,\ F(x,z) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(z) x^n \text{ où } A_n(z) = (-1)^n \sum_{p=0}^{E(\frac{n}{2})} \frac{(-1)^p z^{n-2p}}{2^p p!(n-2p)!}.}$$

A_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n \times \dfrac{(-1)^0}{2^0 0!(n-0)!} = \dfrac{(-1)^n}{n!}$. Par suite, pour $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme de degré n unitaire.

Pour $z \in \mathbb{C}$, $H_0(z) = F(0,z) = 1$ puis $H_1(z) = \displaystyle\sum_{p=0}^{0} \frac{(-1)^p z^{1-2p}}{2^p p!(1-2p)!} = z$.

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C},\ H_0(z) = 1 \text{ et } H_1(z) = z.}$$

I.1.3. Soit $z \in \mathbb{C}$. La fonction $g\ :\ x \mapsto F(x,z)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -(z+x)F(x,z)$. Par suite,

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n(z) x^n\right) = -(z+x)F(x,z) = -(x+z)\sum_{n=0}^{+\infty} A_n(z) x^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} zA_n(z)x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(z) x^{n+1}$$

$$= -zA_0(z) - \sum_{n=0}^{+\infty} zA_{n+1}(z)x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(z)x^{n+1}$$

$$= -z - \sum_{n=0}^{+\infty} \left(zA_{n+1}(z) + A_n(z)\right) x^{n+1}.$$

Mais on a aussi

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n(z) x^n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} nA_n(z)x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)A_{n+1}(z)x^n = A_1(z) + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)A_{n+2}(z)x^{n+1}.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on en déduit que pour $n \in \mathbb{N}$,

$$-zA_{n+1}(z) - A_n(z) = (n+2)A_{n+2}(z).$$

On multiplie les deux membres de cette égalité par $(-1)^n(n+1)!$. On obtient $(-1)^n(n+2)!A_{n+2}(z) = (-1)^{n+1}(n+1)!zA_{n+1}(z) - (-1)^n(n+1)!A_n(z)$ ou encore, en tenant compte de $(-1)^{n+2} = (-1)^n$ et $(n+1)! = (n+1)\times n!$, on obtient $H_{n+2}(z) = zH_{n+1}(z) - (n+1)H_n(z)$.

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C},\ \forall n \in \mathbb{N},\ H_{n+2}(z) = zH_{n+1}(z) - (n+1)H_n(z).}$$

$H_2(z) = zH_1(z) - H_0(z) = z^2 - 1$, puis $H_3(z) = z(z^2-1) - 2z = z^3 - 3z$ et $H_4(z) = z(z^3-3z) - 3(z^2-1) = z^4 - 6z^2 + 3$.

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C},\ H_0(z) = 1,\ H_1(z) = z,\ H_2(z) = z^2 - 1,\ H_3(z) = z^3 - 3z \text{ et } H_4(z) = z^4 - 6z^2 + 3.}$$

I.2.

I.2.1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2/2}$ puis $f'(x) = -xe^{-x^2/2} = -xf(x)$ et $f''(x) = -e^{-x^2/2} + x^2e^{-x^2/2} = (x^2-1)f(x)$. Donc pour tout réel x,

$$f''(x) + xf'(x) + f(x) = ((x^2-1) - x^2 + 1)f(x) = 0.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dérive n fois l'égalité précédente et avec la formule de Leibniz, on obtient pour tout réel x, $f^{(n+2)}(x) + (xf^{(n+1)}(x) + nf^{(n)}(x)) + f^{(n)}(x) = 0$ ou encore

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n+2)}(x) + xf^{(n+1)}(x) + (n+1)f^{(n)}(x) = 0.}$$

I.2.2. La fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Pour x réel donné, on divise les deux membres de l'égalité précédente par $f(x)$ et on multiplie par $(-1)^n = (-1)^{n+2} = -(-1)^{n+1}$. On obtient

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ K_{n+2}(x) - xK_{n+1}(x) + (n+1)K_n(x) = 0.}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, $K_0(x) = \dfrac{f(x)}{f(x)} = 1$ et $K_1(x) = -\dfrac{-xf(x)}{f(x)} = x$. Puisque $\mathbb{R}$ est infini, on a donc $H_0 = K_0$ et $H_1 = K_1$. Montrons alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $H_n = K_n$.
C'est vrai pour $n = 0$ et pour $n = 1$ et si pour $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $H_n = K_n$ et $H_{n+1} = K_{n+1}$ alors $H_{n+2} = XH_{n+1} - (n+1)H_n = XK_{n+1} - (n+1)K_n = K_{n+2}$. Le résultat est démontré par récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ H_n = K_n.}$$

I.3. **I.3.1.** Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question I.2.2, pour tout réel x on a $H_{n+1}(x) = K_{n+1}(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{f(x)}f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}e^{x^2/2}f^{(n+1)}(x)$. En dérivant, on obtient pour tout réel x

$$H'_{n+1}(x) = (-1)^{n+1}xe^{x^2/2}f^{(n+1)}(x) + (-1)^{n+1}e^{x^2/2}f^{(n+2)}(x) = xH_{n+1}(x) - H_{n+2}(x) = (n+1)H_n(x).$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ H'_{n+1} = (n+1)H_n.}$$

I.3.2. L'égalité est claire pour $n = 0$ et $n = 1$. Soit $n \geqslant 2$. D'après la question précédente

$$H''_n - XH'_n + nH_n = n(n-1)H_{n-2} - XnH_{n-1} + nH_n = n(H_n - XH_{n-1} + (n-1)H_{n-2}) = 0$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ H''_n - XH'_n + nH_n = 0.}$$

I.4. Soit $n \in \mathbb{N}$. La formule de Leibniz fournit pour $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\varphi''_n(x) &= (-1)^n H''_n(x)e^{-x^2/4} + 2(-1)^n H'_n(x)\left(-\frac{x}{2}e^{-x^2/4}\right) + (-1)^n H_n(x)\left(-\frac{1}{2} + \frac{x^2}{4}\right)e^{-x^2/4} \\
&= (-1)^n\left(H''_n(x) - xH'_n(x) - \frac{1}{2}H_n(x)\right)e^{-x^2/4} + \frac{x^2}{4}\varphi_n(x) = (-1)^n\left(-nH_n(x) - \frac{1}{2}H_n(x)\right)e^{-x^2/4} + \frac{x^2}{4}\varphi_n(x) \\
&= -\frac{2n+1}{2}\varphi_n(x) + \frac{x^2}{4}\varphi_n(x),
\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_n''(x) - \frac{x^2}{4}\varphi_n(x) = -\frac{2n+1}{2}\varphi_n(x).}$$

I.5.

I.5.1. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. La fonction H_pH_qf est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, puisque H_p et H_q sont des polynômes, $H_p(x)H_q(x)f(x) = H_p(x)H_q(x)e^{-x^2/2} \underset{\pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ d'après un théorème de croissances comparées. On en déduit que la fonction H_pH_qf est intégrable sur $\mathbb{R}$ et donc que $I_{p,q}$ existe.

I.5.2. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. On note que $H_{p+1}H_{q+1}f = (-1)^qH_{p+1}f^{(q+1)}$.
Soient alors A et B deux réels tels que $A < B$. Les deux fonctions H_{p+1} et $f^{(q)}$ sont de classe C^1 sur le segment $[A,B]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\int_A^B H_{p+1}(x)H_{q+1}(x)f(x)\,dx &= (-1)^{q+1}\int_A^B H_{p+1}(x)f^{(q+1)}(x)\,dx = (-1)^{q+1}\left(\left[H_{p+1}(x)f^{(q)}(x)\right]_A^B - \int_A^B H'_{p+1}(x)f^{(q)}(x)\,dx\right)\\ &= [-H_{p+1}(x)H_q(x)f(x)]_A^B + \int_A^B H'_{p+1}(x)H_q(x)f(x)\,dx\\ &= -H_{p+1}(B)H_q(B)f(B) + H_{p+1}(A)H_q(A)f(A) + (p+1)\int_A^B H_p(x)H_q(x)f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Quand A tend vers $+\infty$ et B tend vers $-\infty$, $-H_{p+1}(B)H_q(B)f(B) + H_{p+1}(A)H_q(A)f(A)$ d'après un théorème de croissances comparées. Quand A tend vers $+\infty$ et B tend vers $-\infty$, on obtient donc $\int_{-\infty}^{+\infty} H_{p+1}(x)H_{q+1}(x)f(x)\,dx = (p+1)\int_{-\infty}^{+\infty} H_p(x)H_q(x)f(x)\,dx$ puis

$$I_{p+1,q+1} = (-1)^{(p+1)+(q+1)}\int_{-\infty}^{+\infty} H_{p+1}(x)H_{q+1}(x)f(x)\,dx = (p+1)\times(-1)^{p+q}\int_{-\infty}^{+\infty} H_p(x)H_q(x)f(x)\,dx = (p+1)I_{p,q}.$$

Par symétrie des rôles de p et q, on a aussi $I_{p+1,q+1} = (q+1)I_{p,q}$.

Soient p et q deux entiers naturels tels que $p \neq q$. D'après ce qui précède, $(p+1)I_{p,q} = (q+1)I_{p,q}$ et donc $(p-q)I_{p,q} = 0$ puis $I_{p,q} = 0$ car $p - q \neq 0$.

D'autre part, pour $p \in \mathbb{N}$, $I_{p+1,p+1} = (p+1)I_{p,p}$ et donc pour $p \in \mathbb{N}$, $I_{p,p} = p!I_{0,0} = \sqrt{2\pi}\,p!$.

$$\boxed{\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ I_{p,q} = \delta_{p,q}\sqrt{2\pi}\,p!.}$$

Partie II

II.1. Soit $\nu \in \mathbb{R}$. On note g_ν la fonction $t \mapsto \exp\left(-2i\pi\nu t - \frac{t^2}{2}\right)$. Puisque la fonction g_ν est continue sur $\mathbb{R}$ et que $|g_\nu| = f$, la fonction g_ν est intégrable sur $\mathbb{R}$ et donc $\widehat{f}(\nu)$ existe.

Soit $\begin{array}{cccc} G : & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & (\nu,t) & \mapsto & \exp\left(-2i\pi\nu t - \frac{t^2}{2}\right)\end{array}$ de sorte que $\forall \nu \in \mathbb{R}$, $\widehat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\nu,t)\,dt$.

• Pour chaque $\nu \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto G(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
• Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto G(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
• Pour chaque $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $|G(x,t)| \leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) = \varphi_0(t)$ où φ_0 est une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et intégrable sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\widehat{f} \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}.}$$

II.2. Avec les notations de la question précédente,
• Pour chaque $\nu \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto G(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$.
• La fonction G admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\forall (\nu, t) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial G}{\partial \nu}(\nu, t) = -2i\pi t \exp\left(-2i\pi\nu t - \frac{t^2}{2}\right).$$

De plus,
- pour chaque $\nu \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial G}{\partial \nu}(\nu, t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$,
- pour chaque $t \in \mathbb{R}$, la fonction $\nu \mapsto \frac{\partial G}{\partial \nu}(\nu, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$,
- pour chaque $(\nu, t) \in \mathbb{R}^2$, $\left|\frac{\partial G}{\partial \nu}(\nu, t)\right| = 2\pi|t|\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) = \varphi_1(t)$ où φ_1 est une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ car négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ en $\pm\infty$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de Leibniz),

$$\boxed{\widehat{f} \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall \nu \in \mathbb{R},\ \widehat{f}'(\nu) = -2i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} t \exp\left(-2i\pi\nu t - \frac{t^2}{2}\right)\ dt.}$$

II.3. **II.3.1.** Puisque deux des trois intégrales ci-dessous existent, la troisième existe et

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} -t \exp\left(-2i\pi\nu t - \frac{t^2}{2}\right)\ dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} (-2i\pi\nu - t) \exp\left(-2i\pi\nu t - \frac{t^2}{2}\right)\ dt + 2i\pi\nu \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-2i\pi\nu t - \frac{t^2}{2}\right)\ dt \\ &= \left[\exp\left(-2i\pi\nu t - \frac{t^2}{2}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} + 2i\pi\nu\widehat{f}(\nu) = 2i\pi\nu\widehat{f}(\nu)\end{aligned}$$

car $\left|\exp\left(-2i\pi\nu t - \frac{t^2}{2}\right)\right| = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$ et donc $\lim\limits_{t \to \pm\infty} \exp\left(-2i\pi\nu t - \frac{t^2}{2}\right) = 0$.

Par suite, pour $\nu \in \mathbb{R}$, $\widehat{f}'(\nu) = 2i\pi \times 2i\pi\nu\widehat{f}(\nu) = -4\pi^2\nu\widehat{f}(\nu)$.

$$\boxed{\forall \nu \in \mathbb{R},\ \widehat{f}'(\nu) = -4\pi^2\nu\widehat{f}(\nu).}$$

II.3.2. $\widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\ dt = \sqrt{2\pi}$ puis

$$\begin{aligned}\forall \nu \in \mathbb{R},\ \widehat{f}'(\nu) + 4\pi^2\nu\widehat{f}(\nu) = 0 &\Rightarrow \forall \nu \in \mathbb{R},\ e^{2\pi^2\nu^2}\widehat{f}'(\nu) + 4\pi^2\nu e^{2\pi^2\nu^2}\widehat{f}(\nu) = 0 \\ &\Rightarrow \forall \nu \in \mathbb{R},\ \left(e^{2\pi^2\nu^2}\widehat{f}\right)'(\nu) = 0 \Rightarrow \forall \nu \in \mathbb{R},\ e^{2\pi^2\nu^2}\widehat{f}(\nu) = e^0\widehat{f}(0) \\ &\Rightarrow \forall \nu \in \mathbb{R},\ \widehat{f}(\nu) = \sqrt{2\pi}\, e^{-2\pi^2\nu^2}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall \nu \in \mathbb{R},\ \widehat{f}(\nu) = \sqrt{2\pi}\, e^{-2\pi^2\nu^2}.}$$

Partie III

III.1.
III.1.1. On note tout d'abord que f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et croissante sur $\mathbb{R}^-$.
Soit alors $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant \frac{A}{2\pi}$. Soit $x \in [-A, A]$. Alors $x + 2n\pi \geqslant -A + 2\pi\frac{A}{2\pi} = 0$. Ainsi, la fonction $x + 2n\pi$ est croissante sur $[-A, A]$ à valeurs dans $[0, +\infty[$ et f est décroissante sur $[0, +\infty[$. On en déduit que la fonction $x \mapsto f(x+2n\pi)$ est décroissante sur $[-A, A]$.
De même, $x - 2n\pi \leqslant A - 2\pi\frac{A}{2\pi} = 0$. Ainsi, la fonction $x - 2n\pi$ est croissante sur $[-A, A]$ à valeurs dans $]-\infty, 0]$ et f est croissante sur $]-\infty, 0]$. On en déduit que la fonction $x \mapsto f(x - 2n\pi)$ est croissante sur $[-A, A]$.

III.1.2. On en déduit que pour $x \in [-A, A]$,

$$0 \leqslant f(x - 2n\pi) + f(x + 2n\pi) \leqslant f(A - 2n\pi) + f(-A + 2n\pi) = 2\exp\left(-\frac{(2n\pi - A)^2}{2}\right).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons alors $\|u_n\|_\infty = \sup_{x \in [-A,A]} |u_n(x)|$. Puisque chaque u_n est une fonction continue sur le segment $[-A, A]$, chaque $\|u_n\|_\infty$ existe dans $\mathbb{R}$. De plus, d'après la question précédente, pour n grand on a $\|u_n\|_\infty \leqslant 2\exp\left(-\dfrac{(2n\pi - A)^2}{2}\right)$ et en particulier $\|u_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Ainsi, la série numérique de terme général $\|u_n\|_\infty$ converge ou encore

la série de fonctions de terme général u_n converge normalement sur $[-A, A]$.

III.2. III.2.1. En particulier, pour tout $A > 0$, la série de fonctions de terme général u_n converge simplement sur $[-A, A]$ et donc la série de fonctions de terme général u_n converge simplement sur $\mathbb{R}$.

III.2.2. Soit $A > 0$. Chaque u_n est continue sur $[-A, A]$ et la série de fonctions de terme général u_n converge normalement et donc uniformément vers U sur $[-A, A]$.
Par suite, pour tout $A > 0$, la fonction U est continue sur $[-A, A]$ et donc

la fonction U est continue sur $\mathbb{R}$.

III.2.3. La fonction f est paire et donc la fonction u_0 est paire. Ensuite, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$u_n(-x) = f(-x - 2n\pi) + f(-x + 2n\pi) = f(x + 2n\pi) + f(x - 2n\pi) = u_n(x).$$

Ainsi, chaque fonction u_n est paire. On en déduit que chaque fonction U_n est paire en tant que somme de fonctions paires. Soit alors $x \in \mathbb{R}$.

$$U(-x) = \lim_{n\to+\infty} U_n(-x) = \lim_{n\to+\infty} U_n(x) = U(x).$$

On a montré que

la fonction U est paire.

III.2.4. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

$$U_n(x+2\pi) = \sum_{k=-n}^{n} f(x+2\pi-2k\pi) = \sum_{k=-n}^{n} f(x-2(k-1)\pi) = \sum_{k=-(n+1)}^{n-1} f(x-2k\pi) = U_n(x)+f(x+2(n+1)\pi)-f(x-2n\pi).$$

Quand n tend vers $+\infty$, x étant fixé, $f(x + 2(n + 1)\pi)$ et $f(x - 2n\pi)$ tendent vers 0. Par suite, quand n tend vers $+\infty$ à x fixé dans l'égalité précédente, on obtient $U(x + 2\pi) = U(x)$. On a montré que $\forall x \in \mathbb{R}$, $U(x + 2\pi) = U(x)$ et donc que

la fonction U est 2π-périodique.

III.3. III.3.1. La fonction U est 2π-périodique et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Dirichlet, on sait que la série de Fourier de U converge vers U sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ U(x) = \frac{a_0(U)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(U)\cos(nx).}$$

III.3.2. Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$.

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} U_k(x)\cos(nx)\ dx &= \sum_{l=-k}^{k} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-2l\pi)\cos(nx)\ dx = \sum_{l=-k}^{k} \int_{-\pi-2l\pi}^{\pi-2l\pi} f(t)\cos(n(t+2k\pi))\ dt \\ &= \sum_{l=-k}^{k} \int_{-(2l+1)\pi}^{-(2l-1)\pi} f(t)\cos(nt)\ dt = \int_{-(2k+1)}^{2k+1} f(t)\cos(nt)\ dt.\end{aligned}$$

III.3.3. Soit $(k, n \in \mathbb{N}^2$.

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} U(x)\cos(nx)\ dx - \int_{-\pi}^{\pi} U_k(x)\cos(nx)\ dx\right| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |U(x) - U_k(x)| \times |\cos(nx)|\ dx \leqslant 2\pi \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |U(x) - U_k(x)|.$$

Puisque la suite de fonctions de terme général U_n converge uniformément vers U sur $[-\pi,\pi]$ d'après la question III.1.2, cette dernière expression tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$ à n fixé. On a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \lim_{k\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} U_k(x)\cos(nx)\ dx = \int_{-\pi}^{\pi} U(x)\cos(nx)\ dx.}$$

Comme d'autre part, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} U_k(x)\cos(nx)\ dx = \int_{-(2k+1)\pi}^{(2k+1)\pi} f(x)\cos(nx)\ dx$, on en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(nx)\ dx$ est une intégrale convergente et que

$$\int_{-\pi}^{\pi} U(x)\cos(nx)\ dx = \lim_{k\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} U_k(x)\cos(nx)\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(nx)\ dx.$$

III.3.4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
a_n(U) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} U(x)\cos(nx)\ dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(nx)\ dx \\
&= \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{inx}\ dx\right) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(inx - \frac{x^2}{2}\right)\ dx\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-2i\pi\left(-\frac{n}{2\pi}\right)x - \frac{x^2}{2}\right)\ dx\right) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left(\widehat{f}\left(-\frac{n}{2\pi}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\pi} \times \sqrt{2\pi}\ e^{-2\pi^2(-n/2\pi)^2} \text{ (d'après la question II.3.2)} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-n^2/2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(U) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-n^2/2}.}$$

On en déduit encore

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-2n\pi)^2}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2/2}\cos(nx).}$$

