SESSION 2009

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE PC

MATHEMATIQUES 1

Partie I

I.1. Soient $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
• ${}^t({}^tMSM) = {}^tM{}^tS{}^t({}^tM) = {}^tMSM$ et donc ${}^tMSM \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
• Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX({}^tMSM)X = {}^t(MX)S(MX) \geqslant 0$. Donc ${}^tMSM \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\forall S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}),\ \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tMSM \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}).}$$

I.2. S est symétrique réelle et donc S est orthogonalement semblable à une matrice diagonale d'après le théorème spectral. Donc $\exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\exists D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ telles que $S = PD{}^tP$.
D'après la question précédente, si $D \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ alors $S = {}^t({}^tP)D{}^tP \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et si $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ alors $D = {}^tPSP \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. En résumé, $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow D \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

• Notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On sait que $\forall X = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXDX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$.
Par suite, si tous les λ_i sont positifs, alors $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXDX \geqslant 0$ et donc $D \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
Réciproquement, si $D \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, alors en particulier, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i = {}^te_iDe_i \geqslant 0$.

En résumé, $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si toutes les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de S sont positives.

• Si $S \in \mathcal{S}^{++}(\mathbb{R})$, alors $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $PX \neq 0$ (car P est inversible) et donc ${}^tXDX = {}^t(PX)S(PX) > 0$ et donc $D \in \mathcal{S}^{++}(\mathbb{R})$ et si $D \in \mathcal{S}^{++}(\mathbb{R})$, alors $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, ${}^tPX \neq 0$ (car ${}^tP$ est inversible) et donc ${}^tXSX = {}^t({}^tPX)S({}^tPX) > 0$ et donc $S \in \mathcal{S}^{++}(\mathbb{R})$.

Finalement, $S \in \mathcal{S}^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow D \in \mathcal{S}^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 > 0$.
Par suite, si $S \in \mathcal{S}^{++}(\mathbb{R})$, alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i = {}^te_iDe_i > 0$. Réciproquement, si tous les λ_i sont strictement positifs, alors $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, ${}^tXDX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 > 0$ car $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$ est une somme de réels positifs, l'un au moins de ces réels étant strictement positifs.

$$\boxed{\forall S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \text{Sp}(S) \subset \mathbb{R}^+ \text{ et } S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \text{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+^*.}$$

I.3. A est symétrique réelle. $\chi_A = X^2 - 3X + 1$ et donc les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 3 - \sqrt{5} > 0$ et $\lambda_2 = 3 + \sqrt{5} > 0$. A est symétrique définie positive.

I.4. B est symétrique réelle. $\chi_B = (-1 - X)(X^2 - 3X + 1)$ et en particulier, B admet au moins une valeur propre négative ou nulle à savoir -1. B n'est pas symétrique définie positive.

I.5. Par hypothèse, T est symétrique. Puisque T est semblable à S, T et S ont mêmes valeurs propres. Si $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, d'après la question I.2, $\text{Sp}(T) = \text{Sp}(S) \subset \mathbb{R}^+$ et donc $T \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

I.6. **a)** Soit λ une valeur propre de M. Puisque $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, 0 n'est pas valeur propre de M et donc $\lambda \neq 0$.
Soit X un vecteur propre de M associé à λ. Donc $X \neq 0$ et $MX = \lambda X$. On multiplie à gauche les deux membres de cette égalité par $\frac{1}{\lambda}M^{-1}$ et on obtient $M^{-1}X = \frac{1}{\lambda}X$ et puisque $X \neq 0$, $\frac{1}{\lambda}$ est valeur propre de M^{-1}.

Supposons que l'expression « spectre de M » désigne l'**ensemble** des valeurs propres de M. Dans ce cas, le travail précédent suffit à exprimer le spectre de M^{-1} en fonction du spectre de M :

on a montré que $\left\{\frac{1}{\lambda},\ \lambda \in \mathrm{Sp}(M)\right\} \subset \mathrm{Sp}(M^{-1})$. Puis en appliquant ce résultat à M^{-1}, on voit que l'inverse d'une valeur propre de M^{-1} est une valeur propre de $M = (M^{-1})^{-1}$ ou encore que $\mathrm{Sp}(M^{-1}) \subset \left\{\frac{1}{\lambda},\ \lambda \in \mathrm{Sp}(M)\right\}$. Finalement

$$\boxed{\mathrm{Sp}(M^{-1}) = \left\{\frac{1}{\lambda},\ \lambda \in \mathrm{Sp}(M)\right\}.}$$

Si l'expression « spectre de M » désigne la **famille** des valeurs propres de M, le travail précédent ne suffit plus pour exprimer le spectre de M^{-1} en fonction du spectre de M. On doit pratiquer ainsi :
posons $\mathrm{Sp}(M) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$. On sait que M est triangulable dans $\mathbb{C}$ et donc il existe une matrice triangulaire semblable à M dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. On sait alors que T^{-1} est une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont $\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$ et on a montré que $\mathrm{Sp}(M^{-1}) = \mathrm{Sp}(T^{-1}) = \left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right)$.

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{Sp}(M) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n), \text{ alors } \mathrm{Sp}(M^{-1}) = \left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right).}$$

b) Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. 0 n'est pas valeur propre de S et donc S est inversible. De plus ${}^t(S^{-1}) = ({}^tS)^{-1} = S^{-1}$ et donc S est symétrique. Enfin, d'après la question précédente, $\mathrm{Sp}(S^{-1}) = \left\{\frac{1}{\lambda},\ \lambda \in \mathrm{Sp}(S)\right\} \subset \mathbb{R}_+^*$ et donc $S^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ d'après la question I.2.

$$\boxed{\forall S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}),\ S \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ et } S^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}).}$$

I.7. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXSX = 0$.
Soient λ une valeur propre de S puis X_0 un vecteur propre associé. $0 = {}^tX_0SX_0 = \lambda{}^tX_0X_0 = \lambda\|X_0\|_2^2$ et donc $\lambda = 0$ puisque $\|X_0\|_2^2 \neq 0$. Ainsi, toute valeur propre de S est nulle. Puisque S est diagonalisable, S est semblable à la matrice nulle et donc S est nulle.

I.8. **a)** Soient S_1 et S_2 deux éléments de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tels que $S_1 \leqslant S_2$ et $S_2 \leqslant S_1$. Alors $S_2 - S_1 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et donc $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $(S_2 - S_1)X \geqslant 0$. De même, $S_1 - S_2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et donc $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $(S_1 - S_2)X \geqslant 0$.
On en déduit que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $(S_1 - S_2)X = 0$. Puisque $S_1 - S_2$ est dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (puisque $(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}), +, .)$ est un espace vectoriel), la question précédente permet d'affirmer que $S_1 - S_2 = 0$ et donc que $S_1 = S_2$.

$$\boxed{\forall (S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2,\ (S_1 \leqslant S_2 \text{ et } S_2 \leqslant S_1 \Rightarrow S_1 = S_2).}$$

b) Les matrices $S_1 = \mathrm{diag}(0, 1)$ et $S_2 = \mathrm{diag}(1, 0)$ sont dans $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. Mais ni $S_1 - S_2 = \mathrm{diag}(-1, 1)$, ni $S_2 - S_1 = \mathrm{diag}(1, -1)$ ne sont dans $\mathcal{S}_2^+(\mathbb{R})$ et donc on n'a ni $S_1 \leqslant S_2$, ni $S_2 \leqslant S_1$.

c) Les matrices $S_1 = \mathrm{diag}(0, 0)$ et $S_2 = \mathrm{diag}(1, 0)$ sont dans $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et distinctes. De plus, $S_2 - S_1 = \mathrm{diag}(1, 0) \in \mathcal{S}_2^+(\mathbb{R})$ et donc $S_1 \leqslant S_2$. Mais $S_2 - S_1 = \mathrm{diag}(1, 0) \notin \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ et donc $S_1 \not< S_2$.

d) Soient $(S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $S_1 \leqslant S_2$ et α un réel.
- Si $\alpha \geqslant 0$, $S_1 \leqslant S_2 \Rightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tX(S_2 - S_1)X \geqslant 0 \Rightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tX(\alpha S_2 - \alpha S_1)X \geqslant 0 \Rightarrow \alpha S_1 \leqslant \alpha S_2$.
- Si $\alpha \leqslant 0$, $S_1 \leqslant S_2 \Rightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tX(S_2 - S_1)X \geqslant 0 \Rightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tX(\alpha S_1 - \alpha S_2)X \geqslant 0 \Rightarrow \alpha S_2 \leqslant \alpha S_1$.

e) Soit $(S_1, S_2, S) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^3$ tel que $S_1 \leqslant S_2$.
$S_1 \leqslant S_2 \Rightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tX(S_2 - S_1)X \geqslant 0 \Rightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tX((S_2 + S) - (S_1 + S))X \geqslant 0 \Rightarrow S + S_1 \leqslant S + S_2$.

I.9. Soient $(S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $S_1 \leqslant S_2$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les matrices ${}^tMS_1M$ et ${}^tMS_2M$ sont dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ d'après la question I.1.
De plus, pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX({}^tMS_2M - {}^tMS_1M)X = {}^t(MX)(S_2 - S_1)(MX) \geqslant 0$ et donc ${}^tMS_1M \leqslant {}^tMS_2M$.

I.10. **a)** Si $I_n \leqslant S$, la matrice $S - I_n$ est symétrique positive. Ces valeurs propres sont donc positives. Comme les valeurs propres de $S - I_n$ sont les $\lambda - 1$, $\lambda \in \mathrm{Sp}(S)$ (car $SX = \lambda X \Leftrightarrow (S - I_n)X = (\lambda - 1)X$), on a montré que toute valeur propre de S est supérieure ou égale à 1. En particulier, 0 n'est pas valeur propre de S et donc S est inversible.

b) Toute valeur propre de S est élément de $[1, +\infty[$ et donc toute valeur propre de S^{-1} est élément de $]0, 1]$ d'après la question I.6.a). Ceci montre déjà que $S^{-1} > 0$. D'autre part, les valeurs propres de $I_n - S^{-1}$ sont les $1 - \lambda'$, $\lambda' \in \mathrm{Sp}(S^{-1})$, et donc les valeurs propres de $I_n - S^{-1}$ sont positives. On en déduit que $I_n - S^{-1} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ puis que $S^{-1} \leqslant I_n$.

On a montré que $0 < S^{-1} \leqslant I_n$.

I.11. a) Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puis $S = {}^tMM$.
• ${}^t(S) = {}^tM{}^t({}^tM) = {}^tMM = S$ et donc $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
• $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX({}^tMM)X = {}^t(MX)MX = \|MX\|_2^2 \geqslant 0$ et donc $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tMM \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}).}$$

b) Soit $S = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i > 0$. Soit $M = \text{diag}\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$. M n'admet pas la valeur propre 0 et donc $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. De plus ${}^tMM = M^2 = S$.

c) Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D à coefficients diagonaux strictement positifs telles que $S = PD{}^tP$. De plus, d'après la question précédente, il existe une matrice M_1 inversible telle que $D = {}^tM_1M_1$.
Soit $M = M_1{}^tP$. M est inversible en tant que produit de matrices inversibles et de plus

$${}^tM_1M_1 = P{}^tM_1M_1{}^tP = PD{}^tP = S.$$

$$\boxed{\forall S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}),\ \exists M \in \mathcal{GL}_(\mathbb{R}) /\ S = {}^tMM.}$$

I.12. Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$${}^tX({}^t(M_1^{-1})S_2M_1^{-1} - I_n)X = {}^tX{}^t(M_1^{-1})(S_2 - {}^tM_1M_1)M_1^{-1}X = {}^t(M_1^{-1}X)(S_2 - S_1)(M_1^{-1}X) \geqslant 0.$$

Donc, $I_n \leqslant {}^t(M_1^{-1})S_2M_1^{-1}$. D'après la question I.1, la matrice ${}^t(M_1^{-1})S_2M_1^{-1}$ est symétrique et d'après la question I.10.b), les valeurs propres de la matrice ${}^t(M_1^{-1})S_2M_1^{-1}$ sont supérieures ou égales à 1. En particulier, 0 n'est pas valeur propre de la matrice ${}^t(M_1^{-1})S_2M_1^{-1}$. Cette matrice est donc inversible et, puisque $\det({}^t(M_1^{-1})) \times \det S_2 \times \det(M_1^{-1}) \neq 0$, on en déduit que S_2 est inversible.

On a $I_n \leqslant {}^t(M_1^{-1})S_2M_1^{-1}$ et donc, d'après la question I.10.b), $M_1S_2^{-1}{}^tM_1 = \left({}^t(M_1^{-1})S_2M_1^{-1}\right)^{-1} \leqslant I_n$. La question I.9. permet nous fournit alors $M_1^{-1}\left(M_1S_2^{-1}{}^tM_1\right){}^t(M_1^{-1}) \leqslant M_1^{-1}{}^t(M_1^{-1})$ ou encore $S_2^{-1} \leqslant S_1^{-1}$.

Partie II

II.1. a) Soit $(P_1, P_2) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$. Puisque $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\left\{\begin{array}{l} P_1 + P_2 = I_n \\ \lambda_1P_1 + \lambda_2P_2 = S \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} P_2 = I_n - P_1 \\ \lambda_1P_1 + \lambda_2(I_n - P_1) = S \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} P_1 = \dfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(\lambda_2I_n - S) \\ P_2 = \dfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(-\lambda_1I_n + S) \end{array}\right.$$

Ceci montre l'existence et l'unicité de (P_1, P_2). De plus, P_1 et P_2 sont symétriques en tant que combinaisons linéaires de matrices symétriques.

$$\boxed{P_1 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(\lambda_2I_n - S) \text{ et } P_2 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(-\lambda_1I_n + S).}$$

b)

$$\begin{aligned} P^{-1}P_1P &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(\lambda_2P^{-1}P - P^{-1}SP) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(\text{diag}(\lambda_2, \dots, \lambda_2, \lambda_2, \dots, \lambda_2) - \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2)) \\ &= \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{n_1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n_2}), \end{aligned}$$

et donc $P_1 = P\text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{n_1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n_2})P^{-1}$. De même,

$$\begin{aligned} P^{-1}P_2P &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(-\lambda_1P^{-1}P - P^{-1}SP) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(-\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_1) - \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2)) \\ &= \text{diag}(\underbrace{0, \dots, 0}_{n_1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{n_2}). \end{aligned}$$

$$\boxed{P_1 = P\text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{n_1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n_2})P^{-1} \text{ et } P_2 = P\text{diag}(\underbrace{0, \dots, 0}_{n_1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{n_2})P^{-1}.}$$

Posons $D_1 = \mathrm{diag}(\underbrace{1,\ldots,1}_{n_1},\underbrace{0,\ldots,0}_{n_2})$ et $D_2 = \mathrm{diag}(\underbrace{0,\ldots,0}_{n_1},\underbrace{1,\ldots,1}_{n_2})$. On a $D_1^2 = D_1$, $D_2^2 = D_2$ et $D_1D_2 = D_2D_1 = 0$. On en déduit que $P_1^2 = PD_1^2P^{-1} = PD_1P^{-1} = P_1$ et de même $P_2^2 = P_2$. De même, $P_1P_2 = PD_1D_2P^{-1} = 0$ et aussi $P_2P_1 = 0$.

P_1 est semblable à D_1 et en particulier a même rang que D_1 à savoir n_1. De même P_2 est de rang n_2.

On a $P_1^2 = P_1$ et donc $\forall k \geqslant 1$, $P_1^k = P_1$. De même, $\forall k \geqslant 1$, $P_2^k = P_2$.

c) Soit $k \geqslant 2$. Puisque $P_1P_2 = 0 = P_2P_1$, les matrices P_1 et P_2 commutent. La formule du binôme de NEWTON permet alors d'écrire :

$$\begin{aligned}S^k &= (\lambda_1P_1 + \lambda_2P_2))^k = \lambda_1^kP_1^k + \sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}P_1^iP_2^{k-i} + \lambda_2^kP_2^k = \lambda_1^kP_1 + \left(\sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}\right)P_1P_2 + \lambda_2^kP_2\\ &= \lambda_1^kP_1 + \lambda_2^kP_2.\end{aligned}$$

Cette formule reste valable pour $k = 0$ et $k = 1$ par définition de P_1 et P_2.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ S^k = \lambda_1^kP_1 + \lambda_2^kP_2.}$$

Soit $Q = \sum a_kX^k \in \mathbb{R}[X]$.

$$Q(S) = \sum a_kS^k = \sum a_k(\lambda_1^kP_1 + \lambda_2^kP_2) = \left(\sum a_k\lambda_1^k\right)P_1 + \left(\sum a_k\lambda_2^k\right)P_2 = Q(\lambda_1)P_1 + Q(\lambda_2)P_2.$$

$$\boxed{\forall Q \in \mathbb{R}[X],\ Q(S) = Q(\lambda_1)P_1 + Q(\lambda_2)P_2.}$$

d) S_0 est symétrique réelle et donc S_0 est diagonalisable. On en déduit que l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre de S_0 est égale à la dimension du sous-espace propre correspondant.

Puisque $\mathrm{rg}(S_0 - I_n) = 1$, $\mathrm{Ker}(S_0 - I_n)$ est de dimension $n-1$ et donc $\lambda_1 = 1$ est valeur propre de S_0 d'ordre $n_1 = n-1$. La dernière valeur propre λ_2 de S_0 est fournie par la trace de S_0 : $(n-1) + \lambda_2 = \mathrm{Tr}(S_0) = 2n$ et donc $\lambda_2 = n+1$.

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } S_0 \text{ sont } \lambda_1 = 1 \text{ d'ordre } n_1 = n-1 \text{ et } \lambda_2 = n+1 \text{ d'ordre } n_2 = 1.}$$

D'après la question II.1.a), $P_1 = \dfrac{1}{(n+1)-1}((n+1)I_n - S_0) = \dfrac{1}{n}\begin{pmatrix} n-1 & -1 & \ldots & -1\\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & -1\\ -1 & \ldots & -1 & n-1\end{pmatrix}$ et

$$P_2 = \frac{1}{(n+1)-1}(-I_n + S_0) = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & \ldots & \ldots & 1\\ \vdots & & & \vdots\\ \vdots & & & \vdots\\ 1 & \ldots & \ldots & 1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{P_1 = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} n-1 & -1 & \ldots & -1\\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & -1\\ -1 & \ldots & -1 & n-1\end{pmatrix} \text{ et } P_2 = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & \ldots & \ldots & 1\\ \vdots & & & \vdots\\ \vdots & & & \vdots\\ 1 & \ldots & \ldots & 1\end{pmatrix}.}$$

II.2. a) On note $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Puisque $\mathcal{B}$ est orthonormée, le coefficient ligne i, colonne j, $1 \leqslant i,j \leqslant n$, de S est $s_{i,j} = (u(e_j)|e_i)$. Puisque S est symétrique, on a $\forall(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $(u(e_j)|e_i) = (u(e_i)|e_j)$.

Soient alors $x = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_ie_i$ deux éléments de $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}(u(x)|y) &= \left(\sum_{j=1}^{n} x_ju(e_j)|\sum_{i=1}^{n} y_ie_i\right) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_jy_i\,(u(e_j)|e_i) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_jy_i\,(u(e_i)|e_j)\\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} x_je_j|\sum_{i=1}^{n} y_iu(e_i)\right) = (x|u(y)).\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ (u(x)|y) = (x|u(y)).}$$

b) Soit $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Soient $x \in E_i$ et $y \in E_j$.

$$\lambda_i\,(x|y) = (u(x)|y) = (x|u(y)) = \lambda_j\,(x|y),$$

et donc $(\lambda_j - \lambda_i)\,(x|y) = 0$ puis $(x|y) = 0$ car $\lambda_j - \lambda_i \neq 0$. Ceci montre que E_i et E_j sont orthogonaux. De plus, u est diagonalisable car autoadjoint et donc $\overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}} E_i = \mathbb{R}^n$.

c) i) Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Le coefficient ligne k, colonne l, $1 \leqslant k,l \leqslant n$, de P_i est $a_{k,l} = (p_i(e_l)|e_k)$ car la base $\mathcal{B}$ est orthonormée. Or

$$\begin{aligned}
a_{k,l} &= (p(e_l)|e_k) = (p_i(e_l)|e_k - p_i(e_k)) + (p_i(e_l)|p(e_k)) \\
&= 0 + (p_i(e_l)|p(e_k))\ \text{ (car } p_i(e_l) \in E_i \text{ et } e_k - p_i(e_k) \in E_i^{\perp}) \\
&= (p_i(e_l)|p(e_k))\,.
\end{aligned}$$

Par symétrie des rôles de k et l, on a aussi $a_{l,k} = (p_i(e_l)|p(e_k)) = a_{k,l}$. On a montré que

$$\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!],\ P_i \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).}$$

j) Soit $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$ tel que $i \neq j$ et soit $x_j \in E_j$.
D'après la question b), $E_j \subset E_i^{\perp} = \mathrm{Ker}(p_i)$ et donc $p_i(x_j) = 0$. Par suite, $\forall x \in E$, $p_i(p_j(x)) = 0$ car $p_j(x) \in \mathrm{Im}(p_j) = E_j$. On a montré que si $i \neq j$, $p_i \circ p_j = 0$ ou encore

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ (i \neq j \Rightarrow P_iP_j = 0).}$$

d) Soit $j \in [\![1,p]\!]$. Pour $x \in E_j$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} p_i(x) = p_j(x) = x = \mathrm{Id}(x)$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i p_i(x) = \lambda_j p_j(x) = \lambda_j x = u(x)$. Donc, les endomorphismes $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} p_i$ et Id d'une part et $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i p_i$ et u d'autre part coïncident sur des sous-espaces supplémentaires. On en déduit que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} p_i = \mathrm{Id}$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i = u$ ou encore

$$\boxed{\sum_{i=1}^{p} P_i = I_n \text{ et } \sum_{i=1}^{p} \lambda_i P_i = S.}$$

II.3. a)

$$\begin{aligned}
Sf(S) &= \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i P_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} f(\lambda_j) P_j\right) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \lambda_i f(\lambda_j) P_i P_j \\
&= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \lambda_i f(\lambda_j) \delta_{i,j} P_i \text{ (d'après II.2.c) et puisque les } p_i \text{ sont des projections)} \\
&= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(\lambda_i) P_i.
\end{aligned}$$

et de même $f(S)S = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(\lambda_i) P_i$.

$$\boxed{Sf(S) = f(S)S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(\lambda_i) P_i.}$$

b) $f(S)X = \sum_{i=1}^{p} f(\lambda_i)P_iX = \sum_{i=1}^{p} f(\lambda_i)\delta_{i,k}X = \sum_{i=1}^{p} f(\lambda_i)\delta_{i,k}X = f(\lambda_k)X$. On a montré que X est vecteur propre de $f(S)$ associé à la valeur propre $f(\lambda_k)$.

c) On a vu que $S_0 = P_1 + (n+1)P_2$ où $P_1 = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \dots & -1 & n-1 \end{pmatrix}$ et $P_2 = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Donc

$$\begin{aligned}\cos(\pi S_0) &= \cos(\pi)P_1 + \cos((n+1)\pi)P_2 = -P_1 - (-1)^nP_2 \\ &= \frac{1}{n}\begin{pmatrix} -n+1-(-1)^n & 1-(-1)^n & \dots & 1-(-1)^n \\ 1-(-1)^n & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1-(-1)^n \\ 1-(-1)^n & \dots & 1-(-1)^n & -n+1-(-1)^n \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

II.4. a) $g(S)$ existe $\Leftrightarrow \forall i \in [\![1,p]\!]$, $\lambda_i > 0 \Leftrightarrow S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. De plus, d'après la question II.3.a)

$$g(S)S = Sg(S) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g(\lambda_i)P_i = \sum_{i=1}^{p} P_i = I_n.$$

Ceci montre que

$$\boxed{g(S) = S^{-1}.}$$

D'après la question I.12, $\forall (S_1,S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$ tel que $0 < S_1 \leqslant S_2$, on a $g(S_2) = S_2^{-1} \leqslant S_1^{-1} = g(S_1)$. L'application g est donc matriciellement décroissante sur $]0,+\infty[$.

b) $h(S)$ existe si et seulement si les valeurs propres de S sont strictement supérieures à -1. Pour une telle S,

$$\begin{aligned}(I_n - h(S))(S+I_n) &= \left(\sum_{i=1}^{p} P_i - \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i}{\lambda_i+1}P_i\right)\left(\sum_{j=1}^{p} P_j - \sum_{j=1}^{p} \lambda_jP_j\right) = \left(\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{1+\lambda_i}P_i\right)\left(\sum_{j=1}^{p}(\lambda_j+1)P_j\right) \\ &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant p} \frac{\lambda_j+1}{\lambda_i+1}P_iP_j = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant p} \frac{\lambda_j+1}{\lambda_i+1}\delta_{i,j}P_i = \sum_{i=1}^{p} P_i = I_n.\end{aligned}$$

Ceci montre que $I_n - h(S) = (S+I_n)^{-1}$ et donc que

$$\boxed{h(S) = I_n - (S+I_n)^{-1}.}$$

Soient A et B deux éléments de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont toutes strictement supérieures à -1 et telles que $A \leqslant B$. Les valeurs propres de $I_n + A$ sont les $1+\lambda$, $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, et donc sont strictement positives. On en déduit que $I_n + A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. De même, $I_n + B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ puis

$$\begin{aligned}A \leqslant B &\Rightarrow 0 < I_n + A \leqslant I_n + B \text{ (d'après la question I.8.e))} \\ &\Rightarrow (I_n+B)^{-1} \leqslant (I_n+A)^{-1} \text{ (d'après la question II.4.a))} \\ &\Rightarrow -(I_n+A)^{-1} \leqslant -(I_n+B)^{-1} \text{ (d'après la question I.8.d))} \\ &\Rightarrow I_n - (I_n+A)^{-1} \leqslant I_n - (I_n+B)^{-1} \text{ (d'après la question I.8.e))} \\ &\Rightarrow h(A) \leqslant h(B).\end{aligned}$$

La fonction est matriciellement croissante sur $]-1,+\infty[$.

II.5. a) Soit $x \in \mathbb{R}$. $A(x) - B(x) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x - \dfrac{1}{\operatorname{ch} x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ \operatorname{sh} x & \dfrac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch} x} \end{pmatrix}$ puis

$$\chi_{A(x)-B(x)} = X^2 - \left(\operatorname{ch} x + \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch} x}\right)X + \operatorname{sh}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = X\left(X - \frac{\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch} x}\right).$$

Ainsi, la matrice $A(x) - B(x)$ admet deux valeurs propres positives à savoir 0 et $\dfrac{\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch} x}$. D'après la question I.2, on a $A(x) - B(x) \in \mathcal{S}_2^+(\mathbb{R})$ et donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ B(x) \leqslant A(x).}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\chi_{A(x)} = X^2 - 2X \operatorname{ch} x + 1 = X^2 - (e^x + e^{-x})X + e^x \times e^{-x} = (X - e^x)(X - e^{-x}).$$

Puisque $x \neq 0$, $A(x)$ admet deux valeurs propres simples à savoir $\lambda_1 = e^x$ et $\lambda_2 = e^{-x}$. De plus $A(x) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x \\ \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A(x) \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \\ -\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x \end{pmatrix} = e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Donc

$$A(x) = PDP^{-1} \text{ où } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \operatorname{diag}(e^x, e^{-x}).$$

D'après la question II.1.b), $A(x) = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$ avec

$$\begin{aligned} P_1 &= P \times \operatorname{diag}(1, 0) \times P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P_2 &= P \times \operatorname{diag}(0, 1) \times P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ A(x) = \frac{e^x}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{e^{-x}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Ceci reste vrai quand $x = 0$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x = 0$, $p_\alpha(A(x)) = p_\alpha(I_n) = p_\alpha(1)I_n = I_n = A(0 \times x)$.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$p_\alpha(A(x)) = p_\alpha(e^x)P_1 + p_\alpha(e^{-x})P_2 = \frac{e^{\alpha x}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{e^{-\alpha x}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(\alpha x) & \operatorname{sh}(\alpha x) \\ \operatorname{sh}(\alpha x) & \operatorname{ch}(\alpha x) \end{pmatrix} = A(\alpha x).$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ p_\alpha(A(x)) = A(\alpha x).}$$

d) Soit $x \in \mathbb{R}$. $B(x)$ est diagonale et ses valeurs propres sont $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = \dfrac{1}{\operatorname{ch} x} \neq 0$. Donc immédiatement d'après la question II.1.b), $P_1 = \operatorname{diag}(1, 0)$ et $P_2 = \operatorname{diag}(0, 1)$ puis

$$p_\alpha(B(x)) = 0^\alpha \operatorname{diag}(1, 0) + \frac{1}{\operatorname{ch}^\alpha x}\operatorname{diag}(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\operatorname{ch}^\alpha x} \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ p_\alpha(B(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\operatorname{ch}^\alpha x} \end{pmatrix}.}$$

e) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $p_\alpha(A(x)) - p_\alpha(B(x)) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(\alpha x) & \operatorname{sh}(\alpha x) \\ \operatorname{sh}(\alpha x) & \operatorname{ch}(\alpha x) - \dfrac{1}{\operatorname{ch}^\alpha x} \end{pmatrix}$ puis

$$\det\left[p_\alpha(A(x)) - p_\alpha(B(x))\right] = 1 - \frac{\operatorname{ch}(\alpha x)}{\operatorname{ch}^\alpha x} = \frac{\operatorname{ch}^\alpha x - \operatorname{ch}(\alpha x)}{\operatorname{ch}^\alpha x}.$$

Quand x tend vers 0, $\operatorname{ch}^\alpha x - \operatorname{ch}(\alpha x) = \left(1+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\right)^\alpha - \left(1+\dfrac{\alpha^2x^2}{2}+o(x^2)\right) = \dfrac{\alpha-\alpha^2}{2}x^2+o(x^2)$. Par suite, si $\alpha > 1$, $\alpha-\alpha^2 \neq 0$ et donc

$$\det\left[p_\alpha(A(x)) - p_\alpha(B(x))\right] \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\alpha-\alpha^2}{2}x^2.$$

Comme $\dfrac{\alpha-\alpha^2}{2}x^2 < 0$ pour $x \neq 0$, on en déduit que $\det\left[p_\alpha(A(x)) - p_\alpha(B(x))\right] < 0$ pour x petit et non nul. Mais alors une des valeurs propres de $p_\alpha(A(x))-p_\alpha(B(x))$ est strictement négative et on n'a donc pas $p_\alpha(A(x))-p_\alpha(B(x)) \in \mathcal{S}_2^+(\mathbb{R})$ bien que $B(x) \leqslant A(x)$. On a montré que la fonction h n'est pas matriciellement croissante sur $]0,+\infty[$.

Partie III

III.1. a) Soit $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$${}^tXAX = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_ja_{i,j}.$$

Puisque chaque fonction $a_{i,j}$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$, est intégrable sur I, il en est de même de ${}^tXAX$ et de plus par linéarité de l'intégrale

$$\int_I {}^tXA(t)X\,dt = \int_I \left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_ja_{i,j}(t)\right)\,dt = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_j\int_I a_{i,j}(t)\,dt = {}^tX\left(\int_I A(t)\,dt\right)X.$$

b) Soit $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Chaque fonction $m_{i,j}f$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$, est intégrable sur I et donc la fonction $t \mapsto f(t)M$ est intégrable sur I. De plus

$$\int_I f(t)M\,dt = \left(\int_I m_{i,j}f(t)\,dt\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \left(m_{i,j}\int_I f(t)\,dt\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \left(\int_I f(t)\,dt\right)(m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \left(\int_I f(t)\,dt\right)M.$$

III.2. a) Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \dfrac{x}{(1+xt)t^\alpha}$ dt est continue et positive sur $]0,+\infty[$.

- Quand t tend vers 0, $\dfrac{x}{(1+xt)t^\alpha} \sim \dfrac{x}{t^\alpha}$ avec $\alpha < 1$ et donc la fonction $t \mapsto \dfrac{x}{(1+xt)t^\alpha}$ est intégrable sur un voisinage de 0 à droite.
- Quand t tend vers $+\infty$, $\dfrac{x}{(1+xt)t^\alpha} \sim \dfrac{1}{t^{\alpha+1}}$ avec $\alpha+1 > 1$ et donc la fonction $t \mapsto \dfrac{x}{(1+xt)t^\alpha}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.

Finalement, la fonction $t \mapsto \dfrac{x}{(1+xt)t^\alpha}$ dt est intégrable sur $]0,+\infty[$ et donc $F(x)$ existe.

b) Soit $x > 0$. Posons $u = xt$. On obtient

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+u)\left(\frac{u}{x}\right)^\alpha}\frac{du}{x} = x^\alpha\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+u)u^\alpha}\,du.$$

$$\boxed{\forall x > 0,\ F(x) = Cx^\alpha \text{ où } C = \int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+u)u^\alpha}\,du.}$$

C est strictement positif car C est l'intégrale d'une fonction continue, positive et non nulle sur $]0,+\infty[$.

c) Soit $t > 0$.
S est symétrique définie positive et donc les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ de S sont strictement positives. La matrice S^{-1} est symétrique et il en est de même de la matrice $S^{-1}+tI_n$.
Les valeurs propres de $S^{-1}+tI_n$ sont les $\dfrac{1}{\lambda_i}+t = \dfrac{1+\lambda_it}{\lambda_i}$, $1 \leqslant i \leqslant p$. Ces valeurs propres sont strictement positives et donc la matrice $S^{-1}+tI_n$ est inversible. De plus, les valeurs propres de $(S^{-1}+tI_n)^{-1}$ sont les $\left(\dfrac{1+\lambda_it}{\lambda_i}\right)^{-1} = \dfrac{\lambda_i}{1+\lambda_it}$.
D'après la question II.2.d), on a $(S^{-1}+tI_n)^{-1} = \displaystyle\sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{1+\lambda_it}P_i$.

$$\boxed{\forall t > 0,\ (S^{-1}+tI_n)^{-1} = \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{1+\lambda_it}P_i.}$$

d)

$$\begin{aligned}F(S) &= \sum_{i=1}^{p} F(\lambda_i)P_i = \sum_{i=1}^{p}\left(\int_0^{+\infty}\frac{\lambda_i}{(1+\lambda_i t)t^\alpha}\,dt\right)P_i\\ &= \int_0^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda_i}{(1+\lambda_i t)t^\alpha}P_i\right)\,dt \text{ (d'après la question III.1.b))}\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}(S^{-1}+tI_n)^{-1}\,dt \text{ (d'après la question II.2.c)).}\end{aligned}$$

$$\boxed{F(S) = \int_0^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}(S^{-1}+tI_n)^{-1}\,dt.}$$

e) Soit $t > 0$. Puisque les matrices A, B, $A^{-1}+tI_n$ et $B^{-1}+tI_n$ sont définies positives, la question I.12 et la question I.8.e) permettent d'écrire

$$A \leqslant B \Rightarrow B^{-1} \leqslant A^{-1} \Rightarrow B^{-1}+tI_n \leqslant A^{-1}+tI_n \Rightarrow \left(A^{-1}+tI_n\right)^{-1} \leqslant \left(B^{-1}+tI_n\right)^{-1}.$$

Mais alors par définition, $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX\left(\left(B^{-1}+tI_n\right)^{-1}-\left(A^{-1}+tI_n\right)^{-1}\right)X \geqslant 0$ ou encore $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX\left(A^{-1}+tI_n\right)^{-1}X \leqslant {}^tX\left(B^{-1}+tI_n\right)^{-1}X$.

Puisque $\dfrac{1}{t^\alpha} > 0$, on a encore

$$\forall t>0,\ \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tX\frac{1}{t^\alpha}\left(A^{-1}+tI_n\right)^{-1}X \leqslant {}^tX\frac{1}{t^\alpha}\left(B^{-1}+tI_n\right)^{-1}X$$

d'après la question I.8.d). Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}{}^tX\frac{1}{t^\alpha}\left(A^{-1}+tI_n\right)^{-1}X\,dt \leqslant \int_0^{+\infty}{}^tX\frac{1}{t^\alpha}\left(B^{-1}+tI_n\right)^{-1}X\,dt$ puis que

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tX\left(\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}\left(A^{-1}+tI_n\right)^{-1}\,dt\right)X \leqslant {}^tX\left(\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}\left(B^{-1}+tI_n\right)^{-1}\,dt\right)X$$

d'après la question III.1.a). D'après le début de la question, ceci s'écrit encore $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXF(A)X \leqslant {}^tXF(B)X$ ou aussi $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX(F(B)-F(A))X \geqslant 0$. Comme la matrice $F(B)-F(A)$ est symétrique, on a montré que $F(B)-F(A) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et donc que $F(A) \leqslant F(B)$.

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est matriciellement croissante sur }]0,+\infty[.}$$

Puisque d'après la question II.2.b), $p_\alpha = \dfrac{1}{C}p_\alpha$ avec $\dfrac{1}{C} > 0$, on a aussi montré que

$$\boxed{\forall \alpha \in]0,1[, \text{ la fonction } p_\alpha \text{ est matriciellement croissante sur }]0,+\infty[.}$$

III.3. a) Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \dfrac{t}{1+t^2} - \dfrac{1}{x+t}$ est continue sur $[0,+\infty[$. Soit alors $A > 0$.

$$\int_0^A\left(\frac{t}{1+t^2}-\frac{1}{x+t}\right)\,dt = \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)-\ln(x+t)\right]_0^A = \ln(x)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{A^2+1}{(A+x)^2}\right).$$

Cette dernière expression tend vers $\ln(x)$ quand A tend vers $+\infty$. On a montré que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{1+t^2}-\frac{1}{x+t}\right)\,dt$ est une intégrale convergente et que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{1+t^2}-\frac{1}{x+t}\right)\,dt = \ln(x)$.

$$\boxed{\forall x>0,\ \int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{1+t^2}-\frac{1}{x+t}\right)\,dt = \ln(x).}$$

b)

$$\begin{aligned}\ln(S) &= \sum_{i=1}^{p}\ln(\lambda_i)P_i = \sum_{i=1}^{p}\left(\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{1+t^2}-\frac{1}{\lambda_i+t}\right)\,dt\right)P_i = \int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{1+t^2}\left(\sum_{i=1}^{p}P_i\right)-\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{\lambda_i+t}P_i\right)\right)\,dt\\ &= \int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{1+t^2}I_n-(S+tI_n)^{-1}\right)\,dt.\end{aligned}$$

c) Soient A et B deux matrices symétriques définies positives telles que $A \leqslant B$. Alors $\forall t \geqslant 0$, $A + tI_n \leqslant B + tI_n$ puis $\forall t \geqslant 0$, $(B + tI_n)^{-1} \leqslant (A + tI_n)^{-1}$ car les matrices $A + tI_n$ et $B + tI_n$ sont définies positives, puis $\forall t \geqslant 0$, $\dfrac{t}{t^2+1}I_n - (A + tI_n)^{-1} \leqslant \dfrac{t}{t^2+1}I_n - (B + tI_n)^{-1}$. Ensuite, comme à la question II.2.e), $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\forall t \geqslant 0$, ${}^tX\left(\dfrac{t}{t^2+1}I_n - (A + tI_n)^{-1}\right)X \leqslant {}^tX\left(\dfrac{t}{t^2+1}I_n - (B + tI_n)^{-1}\right)X$ puis

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tX\left(\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{t^2+1}I_n - (A + tI_n)^{-1}\right)\,dt\right)X \leqslant {}^tX\left(\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{t^2+1}I_n - (B + tI_n)^{-1}\right)\,dt\right)X,$$

ou encore $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX\ln(A)X \leqslant {}^tX\ln(B)X$ et finalement $\ln(A) \leqslant \ln(B)$.

$\boxed{\text{La fonction ln est matriciellement croissante sur }]0, +\infty[.}$

