SESSION 2009

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE MP

MATHEMATIQUES 1

Exercice 1

1. Notons I l'un des intervalles $]-1,0[$ ou $]0,1[$. Sur I, l'équaion (E) équivaut à l'équation $y'+\dfrac{1}{x}y=\dfrac{2}{\sqrt{1-x^4}}$. Les deux fonctions $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ et $x\mapsto\dfrac{2}{\sqrt{1-x^4}}$ sont continues sur I et donc les solutions de (E) sur I constituent un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 1.

Soit f une fonction dérivable sur I.

$$\begin{aligned}f \text{ solution de } (E) \text{ sur I} &\Leftrightarrow \forall x\in I,\ (xf)'(x)=\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\\ &\Leftrightarrow \exists C\in\mathbb{R}/\ \forall x\in I,\ xf(x)=\text{Arcsin}(x^2)+C \Leftrightarrow \exists C\in\mathbb{R}/\ \forall x\in I,\ f(x)=\frac{\text{Arcsin}(x^2)+C}{x}.\end{aligned}$$

$$\boxed{S_I=\left\{x\mapsto\frac{\text{Arcsin}(x^2)+C}{x},\ C\in\mathbb{R}\right\}.}$$

2. Soit f une éventuelle solution de (E) sur $]-1,1[$. Nécessairement, $0f'(0)+f(0)=0$ et donc $f(0)=0$ puis $f_{/]-1,0[}$ et $f_{/]0,1[}$ étant solutions de (E) sur $]-1,0[$ et $]0,1[$ respectivement,

$$\exists(C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2/\ \forall x\in]-1,1[,\ f(x)=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\text{Arcsin}(x^2)+C_1}{x} \text{ si } x\in]-1,0[\\ 0 \text{ si } x=0\\ \dfrac{\text{Arcsin}(x^2)+C_2}{x} \text{ si } x\in]0,1[\end{array}\right..$$

Réciproquement, une telle fonction f est solution de (E) sur $]-1,0[$ et sur $]0,1[$ et vérifie l'égalité en $x=0$ si de plus elle est dérivable en 0. Donc, une telle fonction f est solution de (E) sur $]-1,1[$ si et seulement si elle est dérivable en 0.

Si $C_1\neq0$ ou $C_2\neq0$, f ne tend pas vers $0=f(0)$ quand x tend vers 0 et n'est donc pas solution de (E) sur $]-1,1[$.
Si $C_1=C_2=0$, on a

$$f(x)\underset{x\to0,\ x\neq0}{=}\frac{x^2+o(x^2)}{x}=x+o(x)=f(0)+x+o(x).$$

Dans ce cas, f admet un développement limité d'ordre 1 en 0 et est donc dérivable en 0. f est alors solution de (E) sur $]-1,1[$.

$$\boxed{\text{L'équation } (E) \text{ admet une et une seule solution sur }]-1,1[\text{ à savoir la fonction } x\mapsto\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\text{Arcsin}(x^2)}{x} \text{ si } x\neq0\\ 0 \text{ si } x\neq0\end{array}\right..}$$

Exercice 2

1. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et négligeable en $+\infty$ devant $\dfrac{1}{t^2}$ d'après un théorème de croissances comparées. Donc

$$\boxed{\text{La fonction } t \mapsto e^{-t^2} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^+.}$$

2. (a) • La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et donc f est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout réel x, $f'(x) = e^{-x^2}$.

• Posons $G : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[\times[0, 1] & \to & \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto & \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \end{array}$ de sorte que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $g(x) = \displaystyle\int_0^1 G(x, t)\, dt$.

Pour chaque $x \in \mathbb{R}^+$, la fonction $t \mapsto G(x, t)$ est continue par morceaux sur le segment $[0, 1]$ et donc intégrable sur ce segment.

La fonction G est pourvue d'une dérivée partielle par rapport à sa première variable x sur $[0, +\infty[\times[0, 1]$ et

$$\forall (x, t) \in [0, +\infty[\times[0, 1],\ \frac{\partial G}{\partial x}(x, t) = -2xe^{-x^2(1+t^2)} = -2xe^{-x^2}e^{-x^2t^2}$$

De plus, pour chaque $x \in \mathbb{R}^+$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial G}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, 1]$ et pour chaque $t \in [0, 1]$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial G}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Enfin, la fonction $x \mapsto -2xe^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et admet une limite réelle en $+\infty$ à savoir 0. Cette fonction est donc bornée sur $\mathbb{R}^+$. Soit M un majorant de sa valeur absolue sur $\mathbb{R}^+$. Alors,

$$\forall (x, t) \in [0, +\infty[\times\mathbb{R},\ \left|\frac{\partial G}{\partial x}(x, t)\right| \leqslant M = \varphi_1(t)$$

(hypothèse de domination) où φ_1 est continue et intégrable sur $[0, 1]$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de Leibniz), g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ g'(x) = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial x}(x, t)\, dt = -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{x^2t^2}\, dt.$$

$$\boxed{f \text{ et } g \text{ sont de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \text{ et } \forall x \geqslant 0,\ f'(x) = e^{-x^2} \text{ et } g'(x) = -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}\, dt.}$$

(b) Le résultat est immédiat si $x = 0$ et si $x > 0$, en posant $t = ux$ ou encore $u = \dfrac{t}{x}$ puis $dt = x\, du$, on obtient $f(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2u^2}x\, du$.

La fonction φ est de classe C^1 sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et pour $x \geqslant 0$,

$$\varphi'(x) = g'(x) + 2f'(x)f(x) = -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}\, dt + 2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}\, dt = 0.$$

Donc la fonction φ est constante sur $[0, +\infty[$ et $\forall x \geqslant 0$, $\varphi(x) = \varphi(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt + 0 = \frac{\pi}{4}$.

$$\boxed{\forall x \in [0, +\infty[,\ g(x) + (f(x))^2 = \frac{\pi}{4}.}$$

(c) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Par positivité de l'intégrale, $g(x) \geqslant 0$ et d'autre part, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} = e^{-x^2(1+t^2)} \times \dfrac{1}{1+t^2}$ étant décroissante sur $[0, 1]$ en tant que produit de deux fonctions positives et décroissantes sur $[0, 1]$, on a

$$g(x) \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+0)}}{1+0}\, dt = \int_0^1 e^{-x^2}\, dt = e^{-x^2}.$$

$$\boxed{\forall x \geqslant 0,\ 0 \leqslant g(x) \leqslant e^{-x^2}.}$$

(d) Pour $x \geqslant$, on a $(f(x))^2 = \dfrac{\pi}{4} - g(x)$ et puisque $f(x) \geqslant 0$, on a encore $f(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{4} - g(x)}$. Mais la question précédente et le théorème des gendarmes montre que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ et donc que

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

Problème : Théorème du point fixe et applications

Partie I : Le théorème du point fixe de Picard

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\|u_{n+1}\| = \|x_{n+2} - x_{n+1}\| = \|f(x_{n+1}) - f(x_n)\| \leqslant k\|x_{n+1} - x_n\| = k\|u_n\|.$$

Montrons par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}$, $\|u_n\| \leqslant k^n\|f(a) - a\|$.
C'est vrai pour $n = 0$ car $\|u_0\| = \|x_1 - x_0\| \leqslant k^0\|f(a) - a\|$ et si pour $n \geqslant 0$, $\|u_n\| \leqslant k^n\|f(a) - a\|$ alors

$$\|u_{n+1}\| \leqslant k\|u_n\| \leqslant k \times k^n\|f(a) - a\| = k^{n+1}\|f(a) - a\|.$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \|u_n\| \leqslant k^n\|f(a) - a\|.}$$

Puisque $0 \leqslant k < 1$, la série géométrique de terme général $k^n\|f(a) - a\|$, $n \in \mathbb{N}$, converge. On en déduit que la série de terme général u_n est absolument convergente (c'est-à-dire $\sum \|u_n\|$ converge) et donc convergente puisque $(E, \|\ \|)$ est complet.

(b) On sait que la suite de terme général x_n, $n \in \mathbb{N}$, et la série de terme général $x_{n+1} - x_n$, $n \in \mathbb{N}$, sont de même nature (séries télescopiques). Donc la suite (x_n) converge vers un élément ℓ de E.

(c) f est Lipschitzienne sur E et donc continue sur E et en particulier en ℓ. On en déduit que

$$\ell = \lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\lim_{n \to +\infty} u_n) = f(\ell).$$

$$\boxed{\text{La suite } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers un point fixe de } f.}$$

(d) f admet donc au moins un point fixe. Soient x et y deux points fixes de f (non nécessairement distincts).

$$\|x - y\| = \|f(x) - f(y)\| \leqslant k\|x - y\|.$$

On en déduit $(1 - k)\|x - y\| \leqslant 0$ puis $\|x - y\| \leqslant$ puisque $1 - k > 0$ et donc $\|x - y\| = 0$ puis $x = y$.

$$\boxed{f \text{ admet un point fixe et un seul.}}$$

Partie II : Exemples et contre-exemples

2. Sur la nécessité d'avoir une contraction stricte.

(a) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $t \in \mathbb{R}$

$$g'(t) = 1 - \frac{1}{1 + t^2}$$

Donc $g'(t) < 1 - 0 = 1$ et $g'(t) \geqslant 1 - \dfrac{1}{1 + 0} = 0$. Par suite, pour tout réel t, $|g'(t)| < 1$.

Soient alors x et y deux réels tels que $x < y$. La fonction g est continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$. D'après l'égalité des accroissements finis, il existe $c \in]x, y[$ tel que

$$|g(y) - g(x)| = |g'(c)| \times |x - y| < |x - y|.$$

$$\boxed{\text{Pour tous réels distincts } x \text{ et } y,\ |g(x) - g(y)| < |x - y|.}$$

(b) Soit $t \in \mathbb{R}$. $g(t) = t \Leftrightarrow \operatorname{Arctan} t = \dfrac{\pi}{2}$. Cette équation n'a pas de solution réelle et donc la fonction g n'a pas de point fixe. D'après le théorème de Picard, la fonction g n'est pas une contraction stricte.

3. Un exemple. **(a)** Pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = g(u_n)$. Mais pour tous réels x et y, on a $|g(x) - g(y)| = \dfrac{1}{5}|x-y| \leqslant \dfrac{1}{5}|x-y|$. Donc la fonction g est une contraction stricte et d'après le théorème de Picard, la suite (u_n) converge vers l'unique point fixe de g à savoir $\ell = \dfrac{5}{4}$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge vers } \ell = \frac{5}{4}.}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(g^n(x)) = f(x)$.
C'est vrai pour $n = 0$ puisque $g^0 = Id_E$ et si pour $n \geqslant 0$, $f(g^n(x)) = f(x)$ alors $f(g^{n+1}(x)) = f(g(g^n(x))) = f(g^n(x)) = f(x)$.
On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(g^n(x)) = f(x).}$$

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$. f est continue sur $\mathbb{R}$ et donc en $\ell = \dfrac{5}{4}$. On fait tendre n tend vers $+\infty$ dans l'égalité précédente et on obtient

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f(g^n(x)) = f(\lim_{n \to +\infty} g^n(x)) = f\left(\frac{5}{4}\right).$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f\left(\dfrac{5}{4}\right)$ et donc f est constante. Réciproquement, les fonctions constantes conviennent.

4. Un système non linéaire dans $\mathbb{R}^2$. **(a)** L'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}^2, \| \|_1)$ est complet car l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie sur $\mathbb{R}$.

(b) L'inégalité $|\sin x| \leqslant |x|$, valable pour tout réel x est connue. Mais alors pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$|\sin b - \sin a| = \left|2 \sin\left(\frac{b-a}{2}\right) \cos\left(\frac{b+a}{2}\right)\right| \leqslant 2 \times \left|\frac{b-a}{2}\right| \times 1 = |b - a|.$$

La fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t, $0 \leqslant \operatorname{Arctan}'(t) = \dfrac{1}{1+t^2} \leqslant 1$. D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tous réels a et b,

$$|\operatorname{Arctan} b - \operatorname{Arctan} a| \leqslant |b - a| \times \sup\{|\operatorname{Arctan}'(t)|,\ t \in \mathbb{R}\} \leqslant |b - a| \times 1 = |b - a|.$$

$$\boxed{\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ |\sin b - \sin a| \leqslant |b - a| \text{ et } |\operatorname{Arctan} b - \operatorname{Arctan} a| \leqslant |b - a|.}$$

(c) Soit $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in (\mathbb{R}^2)^2$.

$$\begin{aligned}
\|\psi((x_2, y_2)) - \psi((x_1, y_1))\|_1 &= \left\|\left(\frac{1}{4}(\sin(x_2 + y_2) - \sin(x_1 + y_1)), \frac{2}{3}(\operatorname{Arctan}(x_2 - y_2) - \operatorname{Arctan}(x_1 - y_1)\right)\right\|_1 \\
&= \frac{1}{4}|\sin(x_2 + y_2) - \sin(x_1 + y_1)| + \frac{2}{3}|\operatorname{Arctan}(x_2 - y_2) - \operatorname{Arctan}(x_1 - y_1)| \\
&\leqslant \frac{1}{4}|(x_2 + y_2) - (x_1 + y_1)| + \frac{2}{3}|(x_2 - y_2) - (x_1 - y_1)| \\
&= \frac{1}{4}|(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)| + \frac{2}{3}|(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)| \\
&\leqslant \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right)(|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|) = \frac{11}{12}\|(x_2, y_2) - (x_1, y_1)\|_1
\end{aligned}$$

Comme $0 \leqslant \dfrac{11}{12} < 1$,

$$\boxed{\psi \text{ est une contraction stricte de } (\mathbb{R}^2, \| \ \|_1) \text{ dans } (\mathbb{R}^2, \| \ \|_1).}$$

(d) D'après le théorème de Picard, ψ admet un point fixe et un seul ou encore le système (S) admet un couple solution et un seul dans $\mathbb{R}^2$.

(e) $\left\|\psi\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) - \psi(0,0)\right\|_\infty = \left\|\left(0,\frac{\pi}{6}\right)\right\|_\infty = \frac{\pi}{6}$ et $\left\|\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) - (0,0)\right\|_\infty = \frac{1}{2} < \frac{\pi}{6}$.

Donc, $\left\|\psi\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) - \psi(0,0)\right\|_\infty \geqslant \left\|\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) - (0,0)\right\|_\infty$ avec $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) \neq (0,0)$. Ainsi, l'application ψ n'est pas une contraction stricte pour la norme $\| \ \|_\infty$.

Une application f peut donc être une contraction stricte pour une norme et pas pour une autre.

Partie III : Une équation intégrale

5. (a) Montrons que $\| \ \|_\infty$ est une norme sur F.

- Soit $f \in F$. f est bornée sur $[0,1]$. Donc $\|f\|_\infty$ existe et appartient à $\mathbb{R}^+$.
- Soit $f \in F$. $\|f\|_\infty = 0 \Rightarrow \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = 0 \Rightarrow \forall x \in [0,1],\ |f(x)| \leqslant 0 \Rightarrow \forall x \in [0,1],\ f(x) = 0 \Rightarrow f = 0$.
- Soient $f \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. L'application $g\ :\ y \mapsto |\lambda| y$ est continue et croissante sur $\mathbb{R}$. Donc

$$\|\lambda f\|_\infty = \sup\{g(|f(x)|),\ x \in [0,1]\} = g(\sup\{|f(x)|,\ x \in [0,1]\}) = |\lambda|\|f\|_\infty$$

- Pour tout x de $[0,1]$,

$$|(f+g)(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Donc $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ est un majorant de $\{|(f+g)(x)|,\ x \in [0,1]\}$ et puisque $\|f+g\|_\infty$ est le plus petit de ces majorants, on a $\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

$$\boxed{\| \ \|_\infty \text{ est une norme sur } F.}$$

(b) Une application continue sur un segment est bornée sur ce segment et donc $E \subset F$.

(c) Soient $x_0 \in G$ et $\varepsilon > 0$. Il existe un entier n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$, $\|g_n - g\|_\infty$ existe dans $\mathbb{R}$ et $\|g_n - g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$.

Pour $x \in G$, on a alors

$$\begin{aligned}\|g(x) - g(x_0)\| &\leqslant \|g(x) - g_n(x)\| + \|g_{n_0}(x) - g_{n_0}(x_0)\| + \|g_{n_0}(x_0) - g(x_0)\| \\ &\leqslant \|g_{n_0}(x) - g_{n_0}(x_0)\| + 2\|g_{n_0} - g\|_\infty < \|g_{n_0}(x) - g_{n_0}(x_0)\| + \frac{2\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

Maintenant, g_{n_0} est continue en x_0 et donc $\exists \alpha > 0/\ \forall x \in G,\ \left(\|x - x_0\| < \alpha \Rightarrow \|g_{n_0}(x) - g_{n_0}(x_0)\| < \frac{\varepsilon}{3}\right)$. Mais alors pour $x \in G$ tel que $\|x - x_0\| < \alpha$, on a $\|g(x) - g(x_0)\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

On a montré que $\forall x_0 \in G$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0/\ \forall x \in G$, $(\|x - x_0\| < \alpha \Rightarrow \|g(x) - g(x_0)\| < \varepsilon$ et donc g est continue sur G.

(d) Il s'agit de vérifier que toute suite de Cauchy d'éléments de E converge dans E.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E, de Cauchy pour $\| \ \|_\infty$.
Puisque $E \subset F$ d'après (b), $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une suite de Cauchy de l'espace vectoriel normé $(F, \| \ \|_\infty)$. Puisque cet espace est un espace de Banach, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $(F, \| \ \|_\infty)$ vers un élément f de F.
Mais alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$ et d'après la question précédente, puisque chaque f_n est continue sur $[0,1]$, f est continue sur $[0,1]$ ou encore $f \in E$.
En résumé, la suite de Cauchy (f_n) converge dans E ce qu'il fallait démontrer.

$$\boxed{(E, \| \ \|_\infty) \text{ est un espace de Banach.}}$$

6. (a) Le pavé $[0,1]^2$ est un compact de $\mathbb{R}^2$ et l'application $|K|$ est continue sur ce compact. On en déduit que $|K|$ admet sur $[0,1]^2$ un minimum et un maximum.

(b) Soit $f \in E$.
Pour chaque $x \in [0,1]$, l'application $y \mapsto K(x,y)f(y)$ est continue sur le segment $[0,1]$ et pour chaque $y \in [0,1]$, l'application $x \mapsto K(x,y)f(y)$ est continue sur $[0,1]$. Enfin, pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$

$$|K(x,y)f(y)| \leqslant M|f(y)| = \varphi_0(y) \text{ (hypothèse de domination)}$$

où φ_0 est continue et intégrable sur $[0,1]$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, l'application $x \mapsto \int_0^1 K(x,y)f(y)\,dy$ est définie et continue sur $[0,1]$. Il en est de même de la fonction $\Phi(f)$ et on a donc montré que

$$\boxed{\Phi \in E^E.}$$

(c) Supposons $M > 0$. Soit $\lambda \in \left]-\frac{1}{M}, \frac{1}{M}\right[$. Soit $(f_1, f_2) \in E^2$. Pour tout $x \in [0,1]$, on a

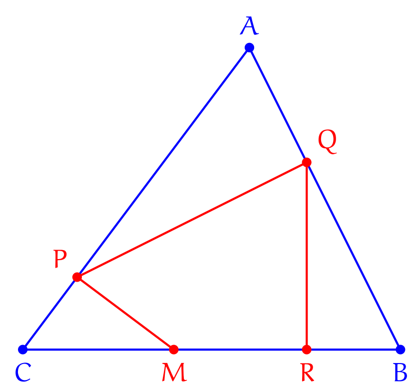
$$|\phi(f_1)(x) - \phi(f_2)(x)| \leqslant |\lambda| \int_0^1 |K(x,y)| \times |f_1(y) - f_2(y)|\,dy \leqslant |\lambda| M \|f_1 - f_2\|_\infty,$$

et donc $\|\phi(f_1) - \phi(f_2)\|_\infty \leqslant |\lambda| M \|f_1 - f_2\|_\infty$. Puisque $|\lambda|M < 1$, on a montré que ϕ est une contraction stricte de l'espace de Banach $(E, \|\ \|_\infty)$.

D'après le théorème de Picard, ϕ admet un point fixe et un seul ou encore il existe une et une seule $f \in E$ telle que $\forall x \in [0,1],\ f(x) + \lambda \int_0^1 K(x,y)f(y)\,dy = g(x)$.

Partie IV : Une application géométrique

7. (a) Les droites (MM') et (PP') sont parallèles et donc d'après le théorème de Thales $\frac{MM'}{MC} = \frac{PP'}{PC}$ et donc $\frac{PP'}{MM'} = \frac{PC}{MC}$. Ensuite, dans le triangle MPC, rectangle en C, $\frac{PC}{MC} = |\cos c|$.



$$\boxed{\frac{P_M P_{M'}}{MM'} = \frac{P_M C}{MC} = |\cos c|.}$$

(b) Mais alors, même si $M = M'$ ou $M = C$, $P_M P_{M'} = |\cos c| MM'$. Mais alors, on a aussi $Q_M Q_{M'} = |\cos a| P_M P_{M'}$ puis $R_M R_{M'} = |\cos b| Q_M Q_{M'}$ et donc

$$R_M R_{M'} = |\cos b| Q_M Q_{M'} = |\cos a \cos b| P_M P_{M'} = |\cos a \cos b \cos c| MM',$$

et donc pour tous points M et M' de l'axe des abscisses

$$|\varphi(x_{M'}) - \varphi(x_M)| = |\cos a \cos b \cos c| \times |x_{M'} - x_M|.$$

Comme le réel $|\cos a \cos b \cos c|$ est dans $[0,1[$, φ est une contraction stricte de l'espace de Banach $(\mathbb{R}, |\ |)$. On en déduit qu'il existe un point M de la droite (BC) et un seul tel que $R_M = M$.

