SESSION 2008

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE PC

MATHEMATIQUES 2

Partie I

I.1.

I.1.1. Notons h_s la fonction $x \mapsto f_s(-x)$. Puisque $]-1,1[$ est symétrique par rapport à 0, h_s est définie et deux fois dérivable sur $]-1,1[$ et pour $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}(1-x^2)h_s''(x) - 2(s+2)xh_s'(x) - 2(s+1)h_s(x) &= (1-x^2)f_s''(-x) - 2(s+2)(-xf_s'(-x)) - 2(s+1)f_s(-x) \\ &= (1-(-x)^2)f_s''(-x) - 2(s+2)(-x)f_s'(-x) - 2(s+1)f_s(-x) = 0 \text{ (car } f_s \text{ est solution de } \mathcal{E}_s \text{ sur }]-1,1[).\end{aligned}$$

Maintenant, $\mathcal{E}_s$ est une équation différentielle linéaire du second ordre homogène et on sait que la somme de deux solutions de $\mathcal{E}_s$ est encore une solution de $\mathcal{E}_s$. On en déduit que $g_s = f_s + h_s$ est solution de $\mathcal{E}_s$ sur $]-1,1[$.

$$\boxed{g_s \text{ est solution de } \mathcal{E}_s \text{ sur }]-1,1[.}$$

I.1.2. $g_s(0) = 2f_s(0) = 0$ et $g_s'(0) = f_s'(0) - f_s'(0) = 0$.

Maintenant, sur $]-1,1[$, l'équation $\mathcal{E}_s$ s'écrit encore $y'' - \dfrac{2(s+2)x}{1-x^2}y' - \dfrac{2(s+1)}{1-x^2}y = 0$. Comme les fonctions $x \mapsto -\dfrac{2(s+2)x}{1-x^2}$ et $x \mapsto -\dfrac{2(s+1)}{1-x^2}$ sont continues sur $]-1,1[$, le théorème de Cauchy permet d'affirmer que $\mathcal{E}_s$ la fonction nulle est l'unique solution de $\mathcal{E}_s$ sur $]-1,1[$ vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$. Par suite, g_s est nulle ou encore

$$\boxed{f_s \text{ est impaire.}}$$

I.2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Notons y_α la fonction $x \mapsto (1-x^2)^\alpha$. y_α est deux fois dérivable sur $]-1,1[$ (car $1-x^2 > 0$ sur $]-1,1[$) et pour $x \in]-1,1[$, $y_\alpha'(x) = -2\alpha x(1-x^2)^{\alpha-1}$ puis $y_\alpha''(x) = -2\alpha[(1-x^2)^{\alpha-1} - 2(\alpha-1)x^2(1-x^2)^{\alpha-2}] = -2\alpha(1-x^2)^{\alpha-2}((-2\alpha+1)x^2+1)$ et donc

$$\begin{aligned}&(1-x^2)y_s''(x) - 2(s+2)xy_s'(x) - 2(s+1)y_s(x) \\ &\quad = -2\alpha(1-x^2)^{\alpha-1}((-2\alpha+1)x^2+1) - 2x(s+2)(-2\alpha x)(1-x^2)^{\alpha-1} - 2(s+1)(1-x^2)^\alpha \\ &\quad = -2(1-x^2)^{\alpha-1}\left[\alpha((-2\alpha+1)x^2+1) - 2(s+2)\alpha x^2 + (s+1)(1-x^2)\right] \\ &\quad = -2(1-x^2)^{\alpha-1}\left[(\alpha(-2\alpha+1) - 2\alpha(s+2) - s - 1)x^2 + \alpha + s + 1\right] \\ &\quad = -2(1-x^2)^{\alpha-1}\left[(-2\alpha^2 - 3\alpha - 2\alpha s - s - 1)x^2 + \alpha + s + 1\right].\end{aligned}$$

Mais alors y_α solution de $\mathcal{E}_s$ sur $]-1,1[\Leftrightarrow -2\alpha^2 - 3\alpha - 2\alpha s - s - 1 = 0$ et $\alpha = -s-1$. Comme

$$-2(-s-1)^2 - 3(-s-1) - 2s(-s-1) - s - 1 = -2s^2 - 4s - 2 + 3s + 3 + 2s^2 + 2s - s - 1 = 0,$$

on a montré que

$$\boxed{y_\alpha \text{ solution de } \mathcal{E}_s \text{ sur }]-1,1[\Leftrightarrow \alpha = -s-1.}$$

I.3.

I.3.1. Comme à la question précédente, on note y_{-s-1} la fonction $x \mapsto (1-x^2)^{-s-1}$. La fonction y_{-s-1} est solution de $\mathcal{E}_s$ sur $]-1,1[$ et puisque $f_s = y_{-s-1}u_s$, la formule de Leibniz fournit

$$\begin{aligned}
&(1-x^2)f_s'' - 2(s+2)f_s' - 2(s+1)f_s \\
&\quad = (1-x^2)(y_{-s-1}''u_s + 2y_{-s-1}'u_s' + y_{-s-1}u_s'') - 2x(s+2)(y_{-s-1}'u_s + y_{-s-1}u_s') - 2(s+1)y_{-s-1}u_s \\
&\quad = u_s((1-x^2)y_{-s-1}'' - 2x(s+2)y_{-s-1}' - 2(s+1)y_{-s-1}) + u_s'(2(1-x^2)y_{-s-1}' - 2x(s+2)y_{-s-1}) \\
&\quad + (1-x^2)y_{-s-1}u_s'' \\
&\quad = (1-x^2)^{-s}u_s'' + (2(1-x^2)(-s-1)(-2x)(1-x^2)^{-s-2} - 2x(s+2)(1-x^2)^{-s-1})u_s' \\
&\quad = (1-x^2)^{-s}u_s'' + 2x(1-x^2)^{-s-1}(2s+2-s-2)u_s' = (1-x^2)^{-s-1}((1-x^2)u_s'' + 2xsu_s'),
\end{aligned}$$

et puisque $(1-x^2)f_s'' - 2(s+2)f_s' - 2(s+1)f_s = 0$, on a encore $(1-x^2)u_s'' + 2xsu_s' = 0$ ce qui signifie que

$$\boxed{u_s' \text{ est solution sur }]-1,1[\text{ de } (1-x^2)y' + 2sxy = 0 \ (\mathcal{E}_s').}$$

I.3.2. Soit y une fonction dérivable sur $]-1,1[$.

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } \mathcal{E}_s' \text{ sur }]-1,1[&\Leftrightarrow \forall x \in]-1,1[,\ (1-x^2)y'(x) + 2sxy(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in]-1,1[,\ (1-x^2)^{-s}y'(x) + 2sx(1-x^2)^{-s-1}y(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in]-1,1[,\ ((1-x^2)^{-s}y)'(x) = 0 \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x \in]-1,1[,\ (1-x^2)^{-s}y(x) = C \\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x \in]-1,1[,\ y(x) = C(1-x^2)^s.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les solutions de } (\mathcal{E}_s') \text{ sur }]-1,1[\text{ sont les fonctions de la forme } x \mapsto C(1-x^2)^s,\ C \in \mathbb{R}.}$$

I.3.3. Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]-1,1[$, $u_s'(x) = C(1-x^2)^s$.
Or $u_s'(0) = (s+1) \times 0 \times 1^s \times f_s(0) + 1 \times f_s'(0) = 1$. Comme d'autre part $u_s'(0) = C$ on a donc $C = 1$ puis $\forall x \in]-1,1[$, $u_s'(x) = (1-x^2)^s$.
Ensuite, $u_s(0) = 1 \times f_s(0) = 0$ et donc u_s est la primitive sur $]-1,1[$ de la fonction $x \mapsto (1-x^2)^s$ qui s'annule en 0. On en déduit que

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ u_s(x) = \int_0^x (1-t^2)^s\ dt,}$$

et aussi

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ f_s(x) = (1-x^2)^{-s-1}\int_0^x (1-t^2)^s\ dt,}$$

I.4. **I.4.1.** On note R le rayon de convergence de la série entière de somme y et on suppose à priori $R > 0$. Pour $x \in]-R,R[$, on a

$$\begin{aligned}
&(1-x^2)y''(x) - 2(s+2)y'(x) - 2(s+1)y(x) \\
&\quad = (1-x^2)\sum_{n=1}^{+\infty} 2n(2n+1)c_n x^{2n-1} - 2(s+2)x\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)c_n x^{2n} - 2(s+1)\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{2n+1} \\
&\quad = \sum_{n=1}^{+\infty} 2n(2n+1)c_n x^{2n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} 2n(2n+1)c_n x^{2n+1} - 2(s+2)\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)c_n x^{2n+1} - 2(s+1)\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{2n+1} \\
&\quad = \sum_{n=1}^{+\infty} 2n(2n+1)c_n x^{2n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty}[-2n(2n+1) - 2(s+2)(2n+1) - 2(s+1)]c_n x^{2n+1}
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
&(1-x^2)y''(x)-2(s+2)y'(x)-2(s+1)y(x)\\
&\qquad=\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+2)(2n+3)c_{n+1}x^{2n+1}+\sum_{n=0}^{+\infty}[-4n^2-(4s+10)n-4s-6]c_nx^{2n+1}\\
&\qquad=\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+2)(2n+3)c_{n+1}x^{2n+1}+\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+2)(-2n-2s-3)c_nx^{2n+1}\\
&\qquad=\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+2)[(2n+3)c_{n+1}-(2n+2s+3)c_n]x^{2n+1}.
\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'une série entière, on en déduit que

$$y \text{ est solution de } \mathcal{E}_s \text{ sur }]-R,R[\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N},\ (2n+3)c_{n+1}-(2n+2s+3)c_n \Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N},\ c_{n+1}=\frac{2s+2n+3}{2n+3}c_n.$$

I.4.2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$c_n=\prod_{k=1}^{n}\frac{2s+2k+1}{2k+1}c_0=\frac{(2n)\times(2n-2)\times\ldots\times 2}{(2n+1)\times(2n)\times\ldots\times 3\times 2}\prod_{k=1}^{n}(2s+2k+1)=\frac{2^nn!}{(2n+1)!}\prod_{k=1}^{n}(2s+2k+1).$$

I.4.3. y est polynomiale si et seulement si la suite c est nulle à partir d'un certain rang. Ceci équivaut à $c_0=0$ ou bien il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $2s+2n+3=0$. Cette dernière condition équivaut à $s\in\left\{-n-\dfrac{3}{2},\ n\in\mathbb{N}\right\}$.
Le cas $c_0=0$ fournit la fonction nulle.
Le cas $c_0=0$ fournit une solution non nulle de rayon $R=+\infty$ ce qui valide les calculs de la question I.4.1 sur $]-\infty,\infty[$.

$$\boxed{\mathcal{E}_s \text{ admet des solutions polynomiales impaires non nulles si et seulement si } s\in\left\{-n-\frac{3}{2},\ n\in\mathbb{N}\right\} \text{ et } c_0\neq 0.}$$

I.4.4. Dans cette question, aucun des c_n n'est nul.
Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $u_n=c_nx^{2n+1}$. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{c_{n+1}}{c_n}x^2=\frac{2n+2s+3}{2n+3}x^2.$$

Quand n tend vers $+\infty$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers x^2 et donc, d'après la règle de d'Alembert, si $|x|<1$, la série de terme général u_n converge et si $|x|>1$, la série de terme général u_n diverge. On en déduit que $R=1$ ce qui valide les calculs de la question I.4.1 sur $]-1,1[$.

I.5. Dans tous les cas, les solutions sur $]-1,1[$, impaires et développables en série entière sont les fonctions de la forme $x\mapsto c_0\left(x+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{2^nn!}{(2n+1)!}\prod_{k=1}^{n}(2s+2k+1)\right]x^{2n+1}\right)$, $c_0\in\mathbb{R}$.
Le cas $c_0=1$ fournit en particulier une solution y de $\mathcal{E}_s$ sur $]-1,1[$ telle que $y(0)=0$ et $y'(0)=c_0=1$. f_s étant l'unique solution vérifiant ces conditions, on a montré que

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ f_s(x)=\left(x+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{2^nn!}{(2n+1)!}\prod_{k=1}^{n}(2s+2k+1)\right]x^{2n+1}\right).}$$

I.6. Soient $p\in\mathbb{N}$ puis $s=-p-\dfrac{3}{2}$. D'après la question I.3.3., pour $x\in]-1,1[$

$$\int_0^x\frac{dt}{(1-t^2)^{p+\frac{3}{2}}}=\int_0^x(1-t^2)^s\ dt=u_s(x)=\frac{f_s(x)}{(1-x^2)^{s+1}}=\frac{f_{-p-\frac{3}{2}}(x)}{(1-x^2)^{p+\frac{1}{2}}}.$$

Maintenant, d'après la question I.4.3., $f_{-p-\frac{3}{2}}$ est une fonction polynomiale que l'on note Q_p.

Déterminons explicitement Q_p. On a $c_0 = 1$ puis pour $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = \dfrac{2(n-p)}{2n+3} c_n$.
Par suite, pour $n \geq p+1$, $c_n = 0$ puis, pour $n \in [\![1, p]\!]$,

$$c_n = \frac{2^n n!}{(2n+1)!} \prod_{k=1}^{n} (-2p + 2k - 2) = \frac{(-1)^n 2^{2n} n!}{(2n+1)!} \prod_{k=1}^{n} (p - k + 1) = \frac{(-1)^n 2^{2n} n!}{(2n+1)!} \frac{p!}{(p-n)!},$$

ce qui reste vrai pour $n = 0$. Donc,

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},,\ Q_p = \sum_{n=0}^{p} \frac{(-1)^n 2^{2n} n! p!}{(2n+1)!(p-n)!} X^{2n+1}.}$$

On a en particulier $Q_0 = X$ et $Q_1 = X - \dfrac{2}{3} X^3$. Donc

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[,\ \int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} \text{ et } \int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{x - \frac{2}{3}x^3}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.}$$

Partie II

II.1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $\alpha\ :\ t \mapsto (1-t^2)^x$ est continue sur $[0, 1[$. De plus, quand t tend vers 1,

$$(1-t^2)^x = (1+t)^x (1-t)^x \sim 2^x (1-t)^x > 0.$$

On en déduit que α est intégrable au voisinage de 1 à droite si et seulement si $x > -1$.

$$\boxed{\text{Le domaine de définition de } \beta \text{ est }]-1, +\infty[.}$$

II.2. Soient a un réel strictement supérieur à -1 puis $G\ :\ \begin{array}{ccc} [a, +\infty[\times [0, 1[& \to & \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto & (1-t^2)^x \end{array}$.

- Pour chaque $t \in [0, 1[$, la fonction $x \mapsto (1-t^2)^x$ est continue sur $[a, +\infty[$.
- Pour chaque $x \in [a, +\infty[$, la fonction $t \mapsto (1-t^2)^x$ est continue sur $[0, 1[$ et de plus, pour $(x, t) \in [a, +\infty[\times [0, 1[$, on a $0 < 1 - t^2 \leq 1$ puis $\ln(1-t^2) \leq 0$ et donc

$$0 \leq (1-t^2)^x = e^{x \ln(1-t^2)} \leq e^{a \ln(1-t^2)} = (1-t^2)^a = \varphi(t),$$

où φ est une fonction continue et intégrable sur $[0, 1$ d'après la question précédente.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, β est continue sur $[a, +\infty[$ et ceci pour tout $a > -1$. On en déduit que

$$\boxed{\beta \text{ est continue sur }]-1, +\infty[.}$$

II.3. Soit $x \in]-1, +\infty[$. La fonction $t \mapsto (1-t^2)^x \ln(1-t^2)$ est continue, négative et non nulle sur $[0, 1[$. On en déduit que $\beta'(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^x \ln(1-t^2)\ dt < 0$. Par suite

$$\boxed{\beta \text{ est strictement décroissante sur }]-1, +\infty[.}$$

II.4.

II.4.1. Soit $x \in]-1,+\infty[$.

$$\beta(x+1) = \int_0^1 (1-t^2)^{x+1}\,dt = \int_0^1 (1-t^2)^x(1-t^2)\,dt = \int_0^1 (1-t^2)^x)\,dt - \int_0^1 t^2(1-t^2)^x)\,dt = \beta(x) - \int_0^1 t\times t(1-t^2)^x\,dt.$$

Soit $a \in]0,1[$. Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto -\dfrac{(1-t^2)^{x+1}}{2(x+1)}$ sont de classe C^1 sur $[0,a]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_0^a t\times t(1-t^2)^x\,dt = \left[t\times\left(-\frac{(1-t^2)^{x+1}}{2(x+1)}\right)\right]_0^a - \int_0^a -\frac{(1-t^2)^{x+1}}{2(x+1)}\,dt = -\frac{a(1-a^2)^{x+1}}{2(x+1)} + \frac{1}{2x+2}\int_0^a (1-t^2)^x\,dt.$$

Quand a tend vers 1, $-\dfrac{a(1-a^2)^{x+1}}{2(x+1)}$ tend vers 0 (car $x+1>0$) et donc, quand a tend vers 1 on obtient $\displaystyle\int_0^1 t\times t(1-t^2)^x\,dt = \frac{\beta(x)}{2x+2}$. Finalement,

$$\beta(x+1) = \beta(x) + \frac{\beta(x)}{2x+2} = \frac{2x+3}{2x+2}\beta(x).$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,+\infty[,\ \beta(x+1) = \beta(x) + \frac{\beta(x)}{2x+2} = \frac{2x+3}{2x+2}\beta(x).}$$

II.4.2. $\beta(0) = \displaystyle\int_0^1 1\,dt = 1$. Mais alors, pour continuité de la fonction β en 0, on a

$$\beta(x) = \frac{2x+3}{2x+2}\times\beta(x+1) \underset{x\to-1^+}{\sim} \frac{-2+3}{2(x+1)}\times\beta(0) = \frac{1}{2(x+1)},$$

et en particulier

$$\boxed{\lim_{x\to-1^+}\beta(x) = +\infty.}$$

II.4.3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\beta(n) = \frac{2n}{2n+1}\times\frac{2n-2}{2n-1}\times\ldots\times\frac{2}{3}\beta(0) = \frac{((2n)\times(2n-2)\times\ldots\times 2)^2}{(2n+1)\times(2n)\times(2n-1)\times\ldots\times 3\times 2} = \frac{2^{2n}n!^2}{(2n+1)!},$$

ce qui reste vrai pour $n=0$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \beta(n) = \frac{2^{2n}n!^2}{(2n+1)!},}$$

D'après la formule de Stirling, on a

$$\beta(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n}\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}\times 2\pi n}{(2n+1)\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{2\pi\times 2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}.$$

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty}\beta(n) = 0$. Maintenant, la fonction β est strictement décroissante sur $]-1,+\infty[$ et a donc une limite en $+\infty$, limite réelle ou infinie et de plus

$$\lim_{x\to+\infty}\beta(x) = \lim_{n\to+\infty}\beta(n) = 0.$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\beta(x) = 0.}$$

II.4.4. $\beta\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=[\mathrm{Arcsin}\,t]_0^1=\frac{\pi}{2}$. Puis, pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\beta\left(-\frac{1}{2}+n\right)=\frac{2\left(-\frac{1}{2}+n-1\right)+2}{2\left(-\frac{1}{2}+n-1\right)+3}\beta\left(-\frac{1}{2}+n-1\right)=\frac{2n-1}{2n}\beta\left(-\frac{1}{2}+n-1\right)$$

et donc pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\beta\left(-\frac{1}{2}+n\right)=\frac{2n-1}{2n}\times\frac{2n-3}{2n-2}\times\ldots\times\frac{1}{2}\times\beta\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n)\times(2n-1)\times(2n-2)\times\ldots\times3\times2}{((2n)\times(2n-2)\times\ldots\times2)^2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{(2n)!}{2^{2n}n!^2}\times\frac{\pi}{2},$$

ce qui reste vrai pour $n=0$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \beta\left(-\frac{1}{2}+n\right)=\frac{(2n)!}{2^{2n}n!^2}\times\frac{\pi}{2}.}$$

Partie III

III.1.

III.1.1. φ_γ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}\setminus\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, puisque $\gamma>1$, φ'_γ a une limite réelle à gauche et à droite en tout point où φ_γ s'annule. On en déduit que φ_γ est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ et donc, d'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de φ_γ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers φ_γ.

III.1.2. La fonction φ_γ est paire et donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $b_n(\gamma)=0$. D'autre part, $\forall x\in[0,\pi]$, $\varphi_\gamma(\pi-x)=\varphi_\gamma(x)$ et donc pour $p\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}a_{2p+1}(\gamma)&=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\varphi_\gamma(x)\cos((2p+1)x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_\pi^0\varphi_\gamma(\pi-u)\cos((2p+1)(\pi-u))(-du)\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\varphi_\gamma(u)\cos(\pi-(2p+1)u)\,du=-\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\varphi_\gamma(u)\cos((2p+1)u)\,du\\&=-a_{2p+1}(\gamma),\end{aligned}$$

et donc $a_{2p+1}(\gamma)=0$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ b_n(\gamma)=0\text{ et }\forall p\in\mathbb{N},\ a_{2p+1}(\gamma)=0.}$$

III.2.

III.2.1. Soit $p\in\mathbb{N}$.

$$I_p-I_{p+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^\gamma x(\cos(2px)-\cos((2p+2)x))\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^\gamma x\times\sin x\times\sin((2p+1)x)\,dx.$$

III.2.2. Soit $p\in\mathbb{N}$. Les deux fonctions $x\mapsto-\dfrac{\cos^{\gamma+1}x}{\gamma+1}$ et $x\mapsto\sin((2p+1)x)$ sont de classe C^1 sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}I_p-I_{p+1}&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^\gamma x\times\sin x\times\sin((2p+1)x)\,dx\\&=2\left(\left[-\frac{\cos^{\gamma+1}x}{\gamma+1}\sin((2p+1)x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{2p+1}{\gamma+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\gamma+1}x\cos((2p+1)x)\,dx\right)\\&=2\frac{2p+1}{\gamma+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\gamma+1}x\cos((2p+1)x)\,dx\end{aligned}$$

III.2.3. Mais alors

$$\begin{aligned}
I_p - I_{p+1} &= \frac{2p+1}{\gamma+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\gamma} x \times 2\cos x \cos((2p+1)x)\ dx \\
&= \frac{2p+1}{\gamma+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\gamma} x(\cos(2px) + \cos((2p+2)x)\ dx \\
&= \frac{2p+1}{\gamma+1}(I_p + I_{p+1}).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ I_p - I_{p+1} = \frac{2p+1}{\gamma+1}(I_p + I_{p+1}).}$$

III.2.4. En posant $t = \sin x$ et donc $dt = \cos x\ dx$, on obtient

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\gamma-1} x \cos x\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x)^{(\gamma-1)/2} \cos x\ dx = \int_0^1 (1-t^2)^{(\gamma-1)/2}\ dt = \beta\left(\frac{\gamma-1}{2}\right).$$

$$\boxed{I_0 = \beta\left(\gamma'\right) \text{ où } \gamma' = \frac{\gamma-1}{2} > 0.}$$

III.2.5. Soit $p \in \mathbb{N}$. D'après la question III.2.3., on a $I_p - I_{p+1} = \dfrac{2p+1}{\gamma+1}(I_p + I_{p+1})$ et donc $\dfrac{\gamma+2p+2}{\gamma+1}I_{p+1} = \dfrac{\gamma-2p}{\gamma+1}I_p$ puis $I_{p+1} = \dfrac{\gamma-2p}{\gamma+2p+2}I_p$. Mais alors, pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
I_p &= \frac{\gamma-2(p-1)}{\gamma+2p} \times \frac{\gamma-2(p-2)}{\gamma+2(p-1)} \times \ldots \times \frac{\gamma}{\gamma+2} \times I_0 \\
&= \frac{\gamma}{\gamma+2p} \times \frac{(\gamma-2(p-1))(\gamma-2(p-2)) \times \ldots \times (\gamma-2) \times \gamma}{(\gamma+2(p-1))(\gamma+2(p-2)) \times \ldots \times (\gamma+2) \times \gamma} \times \beta(\gamma') \\
&= \frac{\gamma}{\gamma+2p}\prod_{k=0}^{p-1}\frac{\gamma-2k}{\gamma+2k}\beta(\gamma').
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ I_p = \frac{\gamma}{\gamma+2p}\prod_{k=0}^{p-1}\frac{\gamma-2k}{\gamma+2k} \times \beta\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)}$$

III.3. Soit $p \in \mathbb{N}$.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\cos^{\gamma} x| \cos(2px)\ dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} |\cos^{\gamma}(\pi-u)| \cos(2p(\pi-u))(-du) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\gamma} u \cos(2pu)\ du,$$

et donc

$$a_{2p}(\gamma) = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos^{\gamma} x| \cos(2px)\ dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\cos^{\gamma} x| \cos(2px)\ dx\right) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\gamma} x \cos(2px)\ dx = \frac{4}{\pi}I_p.$$

Par suite,

$$\boxed{a_0(\gamma) = \frac{4}{\pi}\beta\left(\frac{\gamma-1}{2}\right) \text{ et } \forall p \in \mathbb{N}^*,\ a_{2p}(\gamma) = \frac{4}{\pi} \times \frac{\gamma}{\gamma+2p}\prod_{k=0}^{p-1}\frac{\gamma-2k}{\gamma+2k} \times \beta\left(\frac{\gamma-1}{2}\right).}$$

