SESSION 2008

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE PC

MATHEMATIQUES 1

Partie I

I.1. La matrice $S = \text{diag}(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ est une matrice carrée réelle positive et symétrique dont la famille des valeurs propres est $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$

I.2. **a)** Puisque M est d'ordre 2, $\chi_M = X^2 - \text{Tr}(M)X + \det(M) = X^2 - (-1+1)X + (-1)\times 1 = X^2 - 1$.

b) La matrice $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est positive et symétrique. De plus, $\chi_S = X^2 - 1$ et donc les deux valeurs propres de S sont -1 et 1.

I.3. La matrice $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est positive et symétrique. De plus, $\chi_S = -X(X^2-1)$ et donc les trois valeurs propres de S sont -1, 0 et 1.

I.4. La matrice $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est positive et symétrique. De plus, un calcul par blocs montre que $\chi_S = (X^2-1)^2$ et donc les quatre valeurs propres de S sont -1, -1, 1 et 1.

I.5. La trace de S est positive et est égale à la somme des valeurs propres de S.
Comme $(-1)+(-1)+0 = -2 < 0$, S ne peut admettre $(-1,-1,0)$ pour famille de valeurs propres.

I.6. **a)** Soit $n \geq 2$. H est symétrique réelle et donc diagonalisable. On en déduit que toutes les valeurs propres de H sont réelles et que l'ordre de multiplicité de multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre correspondant.

• Si $b = 0$, $H = aI_n$ et donc H admet a pour valeur propre d'ordre n.
• Si $b \neq 0$, $H - (a-b)I_n$ est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à b. Par suite, $\text{rg}(H-(a-b)I_n) = 1$ ou encore $\dim(\text{Ker}(H-(a-b)I_n)) = n-1$. H admet donc $a-b$ pour valeur propre d'ordre $n-1$.
La dernière valeur propre λ est fournie par la trace de H : $na = \text{Tr}(H) = \lambda + (n-1)(a-b)$ et donc $\lambda = a + (n-1)b$.

En résumé, si $n \geq 2$, H admet $a-b$ pour valeur propre d'ordre $n-1$ et $a+(n-1)b$ pour valeur propre simple et si $n = 1$, H admet a pour valeur propre simple.

b) Pour $n \geq 2$, on prend $b = -1$ et $a = n$. Les valeurs propres de H sont $n+1$ d'ordre $n-1$ et 1 d'ordre 1. Les valeurs propres de H sont donc toutes positives mais H n'est pas positive puisque $b < 0$.
Donc, si $n \geq 2$, une matrice symétrique réelle d'ordre n dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles n'est pas nécessairement positive.
Par contre, si $n = 1$, le résultat devient vrai car l'unique valeur propre de la matrice est son unique coefficient.

Partie II

II.1. **a)** Soit $(X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$. En identifiant une matrice carrée de format 1 et son unique coefficient, on a

$$^tXY = {}^tYX = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = (X|Y)_n.$$

b) Soient $(X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. D'après a), $(X|SY)_n = {}^tXSY$ et aussi $(SX|Y)_n = {}^t(SX)Y = {}^tX{}^tSY = {}^tXSY$.

c) Soient $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On a donc ${}^tPP = I_n$ puis

$$\|PX\|_n = \sqrt{{}^t(PX)(PX)} = \sqrt{{}^tX{}^tPPX} = \sqrt{{}^tXX} = \|X\|_n.$$

II.2. **a)** $(Z|T)_{n+p} = \sum_{i=1}^{n} z_i t_i + \sum_{i=n+1}^{n+p} z_i t_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{p} u_i v_i = (X|Y)_n + (U|V)_p$.

b) Si X et Y sont orthogonaux dans $\mathbb{R}^n$ et U et V sont orthogonaux dans $\mathbb{R}^p$, alors $(Z|T)_{n+p} = (X|Y)_n + (U|V)_p = 0+0 = 0$ et Z et T sont orthogonaux dans $\mathbb{R}^{n+p}$.

c) On prend $X = (-1, 0, \dots, 0)$, $Y = (1, 0, \dots, 0)$, $U = (1, 0, \dots, 0)$ et $V = (1, 0, \dots, 0)$. On a alors $(X|Y)_n = -1 \neq 0$ et $(U|V)_p = 1 \neq 0$ mais $(Z|T)_{n+p} = -1 + 1 = 0$. La réciproque du b) est donc fausse.

II.3. **a)** Soit $Y = (y_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$(DY|Y)_n = ((\lambda_i y_i)_{1 \leq i \leq n} | (y_i)_{1 \leq i \leq n})_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \leq \alpha \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \alpha \|Y\|_n^2.$$

b) D'après le théorème spectral, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = PD{}^tP$. En posant $Y = PX$ pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donné, on a

$$(SX|X)_n = {}^tXSX = {}^tXPD{}^tPX = {}^t(PX)D(PX) = {}^tYDY = (DY|Y)_n \leq \alpha \|Y\|_n^2 = \alpha \|PX\|_n^2 = \alpha \|X\|_n^2.$$

Si de plus $X \neq 0$, $\|X\|_n^2 > 0$ et donc $\dfrac{(SX|X)_n}{\|X\|_n^2} \leq \alpha$.

$$\boxed{\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ \frac{(SX|X)_n}{\|X\|_n^2} \leq \alpha.}$$

c) Notons $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormée de vecteurs propres de S associée à la famille de valeurs propres $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$. Notons encore I l'ensemble des indices i tels que $\lambda_i < \alpha$ (pour les indices restants, on a $\lambda_i = \alpha$).

Soit X un vecteur colonne non nul. Posons $X = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

On a $SX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i$ puis, comme $\mathcal{B}$ est orthonormée, $(SX|X)_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$ et $\|X\|_n^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. On a alors

$$(SX|X)_n = \alpha \|X\|_n^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} (\alpha - \lambda_i) x_i^2 = 0 \Leftrightarrow \sum_{i \in I} (\alpha - \lambda_i) x_i^2 = 0.$$

Dans cette dernière somme, tous les $\alpha - \lambda_i$ sont strictement positifs. Donc, ou bien l'un des x_i, $i \in I$, est non nul et dans ce cas, $\sum_{i=1}^{n} (\alpha - \lambda_i) x_i^2 > 0$ ou bien tous les x_i, $i \in I$, sont nuls et dans ce cas $\sum_{i=1}^{n} (\alpha - \lambda_i) x_i^2 = 0$. En résumé,

$$\begin{aligned} \frac{(SX|X)_n}{\|X\|_n^2} = \alpha &\Leftrightarrow (SX|X)_n = \alpha \|X\|_n^2 \Leftrightarrow \sum_{i \in I} (\alpha - \lambda_i) x_i^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i \in I,\ x_i = 0 \Leftrightarrow X \in \mathrm{Vect}(e_i)_{i \in [\![1,n]\!] \setminus I} \Leftrightarrow X \text{ vecteur propre de } S \text{ associé à } \alpha. \end{aligned}$$

II.4. **a)** Pour $j \in [\![1, n]\!]$, notons E_j l'ensemble des vecteurs colonnes X dont la j-ème composante x_j est positive.
Pour $j \in [\![1, n]\!]$, l'application $f_j : X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \mapsto x_j$ est continue sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ car linéaire de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ étant de dimension finie sur $\mathbb{R}$.
Comme $E_j = f_j^{-1}([0, +\infty[)$ et que $[0, +\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$ (car son complémentaire $]-\infty, 0[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$), E_j est un fermé de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue. Mais alors, E est un fermé de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ en tant qu'intersection de fermés de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\boxed{E \text{ est un fermé de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).}$$

b) Σ est bien sûr borné. Σ est aussi fermé en tant qu'image réciproque du fermé $\{1\}$ par l'application continue $X \mapsto \|X\|_n$. Mais alors C est fermé en tant qu'intersection de fermés et borné car contenu dans Σ qui est borné.

$$\boxed{C \text{ est un fermé borné de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).}$$

c) Posons $S = (s_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$.

$$\varphi(X) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} s_{i,j}x_i\right)x_j = \sum_{1\leq i,j\leq n} s_{i,j}x_ix_j.$$

Maintenant, chaque application $X \mapsto x_ix_j$ est continue sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ en tant que produit d'applications continues sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et donc φ est continue sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ en tant que combinaison linéaire d'applications continues sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\varphi \text{ est continue sur } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).}$$

d) φ est continue sur le compact C à valeurs dans $\mathbb{R}$. φ admet donc un maximum sur C. On en déduit l'existence de μ puis l'existence d'un vecteur X_0 de C tel que $\varphi(X_0) = \mu$.

e) D'après la question II.3.b), α est un majorant de $\{\varphi(X),\ X \in C\}$. Puisque μ est le plus petit des majorants de $\{\varphi(X),\ X \in C\}$, on a donc

$$\boxed{\mu \leq \alpha.}$$

II.5. a)

i) W est positif et d'autre part $\|W\|_n = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2} = \|X\|_n = 1$ et donc $W \in C$.

ii) Puisque S est positive

$$|\varphi(X)| \leq \sum_{1\leq i,j\leq n}|s_{i,j}||x_i||x_j| = \sum_{1\leq i,j\leq n} s_{i,j}|x_i| \times |x_j| = \varphi(W).$$

iii) Puisque X est un vecteur propre unitaire de S associé à la valeur propre α, $|\varphi(X)| = |(SX|X)_n| = |\alpha|(X|X)_n = |\alpha|$. On en déduit que $|\alpha| = |\varphi(X)| \leq \varphi(W) \leq \mu$ et donc

$$\boxed{|\alpha| \leq \mu.}$$

b) Ceci montre déjà que $\mu \geq 0$ et donc, puisque $\alpha \geq \mu$, on a aussi $\alpha \geq 0$. Mais alors, $|\alpha| = \alpha$ et les questions II.4.e) et II.5.a)iii) fournissent $\alpha \leq \mu \leq \alpha$ et donc $\alpha = \mu \geq 0$.

Le vecteur X_0 défini à la question II.4.d) est donc un vecteur positif vérifiant $\dfrac{(SX_0|X_0)_n}{\|X_0\|_n^2} = (SX_0|X_0)_n = \alpha$ et la question II.3.c) montre que X_0 est un vecteur propre associé à la valeur propre α.

$$\boxed{\alpha \geq 0 \text{ et il existe un vecteur propre de } S \text{ associé à } \alpha \text{ qui est positif.}}$$

c) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Le travail de la question II.5. peut être appliqué sur un vecteur propre unitaire X associé à la valeur propre λ_i et comme en II.5.a)iii), on obtient $|\lambda_i| \leq \mu = \alpha$.

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!],\ |\lambda_i| \leq \alpha.}$$

Partie III

III.1. Soit $2 \in [\![1,n]\!]$. Puisque $(X_1,\ldots,X_n)$ est orthonormée, on a ${}^tX_1X_i = (X_1|X_i)_n = 0$. Un calcul par blocs fournit alors

$$M_sZ_i = \begin{pmatrix} AX_i \\ sY_1{}^tX_1X_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_iX_i \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_i\begin{pmatrix} X_i \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_iZ_i.$$

De même, pour $j \in [\![1,p]\!]$,

$$M_sT_j = \begin{pmatrix} sX_1{}^tY_1Y_j \\ BY_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_jX_j \end{pmatrix} = \beta_j\begin{pmatrix} 0 \\ Y_j \end{pmatrix} = \beta_jT_j.$$

$$\boxed{\forall i \in [\![2,n]\!] \text{ (resp. } \forall j \in [\![1,p]\!]),\ Z_i \text{ (resp. } T_j) \text{ est vecteur propre de } M_s \text{ associé à } \alpha_i \text{ (resp. } \beta_j).}$$

III.2. a) D'après II.2.a)

$$\begin{aligned}\|V(\theta)\|_n^2 &= (V(\theta)|V(\theta))_{n+p} = (\cos\theta X_1|\cos\theta X_1)_n + (\sin\theta Y_1|\sin\theta Y_1)_p = \cos^2\theta\|X_1\|_n^2 + \sin^2\theta\|Y_1\|_p^2 \\ &= \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.\end{aligned}$$

$$\boxed{V(\theta) \text{ est unitaire dans } \mathbb{R}^{n+p}.}$$

b) Un calcul par blocs fournit

$$\chi_{M_0} = \chi_A \times \chi_B = (-1)^{n+p}\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)\prod_{j=1}^{n}(X-\beta_j).$$

$$\boxed{\mathrm{Sp}(M_0) = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\ldots,\beta_p).}$$

c) i) Puisque $s \neq 0$,

$$\sqrt{(\alpha_1-\beta_1)^2+4s^2} > \sqrt{(\alpha_1-\beta_1)^2} = |\alpha_1-\beta_1| \geq \alpha_1-\beta_1,$$

et donc $\beta_1 - \alpha_1 + \sqrt{(\alpha_1-\beta_1)^2+4s^2} > 0$. En particulier, $\tan\theta_1 \neq 0$ et donc

$$\boxed{\theta_1 \neq 0.}$$

(ii) On en déduit que $\theta_2 \in]0,\pi[\setminus\{\frac{\pi}{2}\}$ et donc $\tan\theta_2$ existe puis

$$(\tan\theta_1)(\tan\theta_2) = (\tan\theta_1)\left(-\frac{1}{\tan\theta_1}\right) = -1.$$

iii) $\tan\theta_1$ est solution de l'équation du second degré $sX^2+(\alpha_1-\beta_1)X-s=0$. Le produit des solutions de cette équation vaut -1 et donc l'autre solution est $-\frac{1}{\tan\theta_1} = \tan\theta_2$. Ainsi θ_1 et θ_2 sont solutions de l'équation $s\tan^2\theta+(\alpha_1-\beta_1)\tan\theta-s=0$ ou aussi de l'équation $\alpha_1\tan\theta + s\tan^2\theta = \beta_1\tan\theta + s$ ou enfin de l'équation $\alpha_1 + s\tan\theta = \beta_1 + \frac{s}{\tan\theta}$ (puisque $\tan\theta_1$ et $\tan\theta_2$ ne sont pas nuls).

iv) D'après la question précédente, pour $i \in \{1,2\}$, $\alpha_1 + s\tan\theta_i = \beta_1 + \frac{s}{\tan\theta_i}$ et donc

$$\begin{aligned}M_sV(\theta_i) &= \begin{pmatrix} \cos\theta_iAX_1 + s\sin\theta_iX_1{}^tY_1Y_1 \\ s\cos\theta_iY_1{}^tX_1X_1 + \sin\theta_iBY_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\cos\theta_iX_1 + s\sin\theta_iX_1 \\ s\cos\theta_iY_1 + \beta_1\sin\theta_iY_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\alpha_1+s\tan\theta_i)\cos\theta_iX_1 \\ (\frac{s}{\tan\theta_i}+\beta_1)\sin\theta_iY_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha_1+s\tan\theta_i)\cos\theta_iX_1 \\ (\alpha_1+s\tan\theta_i)\sin\theta_iY_1 \end{pmatrix} = (\alpha_1+s\tan\theta_i)V(\theta_i),\end{aligned}$$

et donc $M_s V(\theta_i) = (\alpha_1 + s\tan\theta_i)V(\theta_i)$. De plus, $V(\theta_i)$ est unitaire et donc $V(\theta_i)$ n'est pas nul. Finalement

$\boxed{V(\theta_1) \text{ (resp. } V(\theta_2)) \text{ est vecteur propre de } M_s \text{ associé à la valeur propre } \mu_1 = \alpha_1 + s\tan\theta_i \text{ (resp. } \mu_= \alpha_1 + s\tan\theta_2).}$

v) • Pour $i \in [\![2, n]\!]$, $\|Z_i\|_{n+p} = \|X_i\|_n = 1$ et de même pour $j \in [\![2, p]\!]$, $\|T_j\|_{n+p} = \|Y_j\|_p = 1$. Enfin, $V(\theta_1)$ et $V(\theta_2)$ sont unitaires d'après la question II.2.a).
• D'après la question II.2.b), les Z_i sont deux à deux orthogonaux, les T_j sont deux à deux orthogonaux et chaque Z_i est orthogonal à chaque T_j.
• Pour $i \in [\![2, n]\!]$, X_1 est orthogonal à X_i et 0 est orthogonal à Y_1. Donc, toujours d'après la question III.2.b), tout vecteur $V(\theta)$ est orthogonal à tout Z_i, $2 \leq i \leq n$, et de même est orthogonal à tout T_j, $2 \leq j \leq p$.

Finalement, les vecteurs $V(\theta_1)$, $V(\theta_2, Z_2, \ldots, Z_n, T_2, \ldots, T_p$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^{n+p}$.

D'après les questions III.1 et III.2.c)iv), tous ces vecteurs sont des vecteurs propres de M_s et on a donc trouvé toutes les valeurs de M_s.

$\boxed{\text{La famille des valeurs propres de } M_s \text{ est } (\mu_1, \mu_2, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_2, \ldots, \beta_p).}$

vi) Quand $s = 0$, μ_1 s'écrit formellement $\alpha_1 + 0 \times \tan\theta_1 = \alpha_1$ (bien que $\tan\theta_1$ ne soit pas défini). De même pour μ_2.

Partie IV

IV.1. La matrice de format 1 $A = (\lambda_1)$ est un élément de $\mathcal{S}_1(\mathbb{R}^+)$ admettant λ_1 pour valeur propre.

IV.2. a) $a = \lambda_1 + \lambda_{n+1} \geq -\lambda_2 - \ldots - \lambda_n \geq 0$. D'autre part, $a + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n \geq 0$.
En résumé, $a \geq 0 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ et $a + \lambda_2 + \lambda_n \geq 0$. Par hypothèse de récurrence, il existe $A \in \mathcal{S}_(\mathbb{R}_+)$ tel que a, λ_2, $\ldots$,λ_n soient les valeurs propres de A.

b) a est la plus grande valeur propre de A qui est symétrique réelle et positive. D'après la question II.5.b), A admet un vecteur propre positif associé à la valeur propre a. En normant ce vecteur, on obtient un vecteur propre unitaire positif X_1 de A associé à la valeur propre a.

c) i) Soit B la matrice nulle de format 1 et Y_1 le vecteur de $\mathbb{R}^1$ égal à 1. On a $BY_1 = 0$ et donc Y_1 est un vecteur propre de B associé à la valeur propre $\beta_1 = 0$.
Ainsi, M_s est de la forme (1) avec $p = 1$, $B = (0) \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ et $Y_1 = (1) \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$.

ii) Les valeurs propres de A sont a, λ_2, $\ldots$, λ_n et 0 est l'unique valeur propre de B. D'après la question III.2.c)v), les valeurs propres de M_s sont $\mu_1 = a + s\tan\theta_1$, $\mu_2 = a + s\tan\theta_2$, λ_2, $\ldots$, λ_n.

iii) Si $s = \sqrt{-\lambda_1\lambda_{n+1}}$, alors

$$\sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + 4s^2} = \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_{n+1} - 0)^2 - 4\lambda_1\lambda_{n+1}} = \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_{n+1})^2} = \lambda_1 - \lambda_{n+1} \text{ (car } \lambda_1 \geq \lambda_{n+1}),$$

et donc

$$s\tan\theta_1 = \frac{1}{2}(0 - a + \lambda_1 \geq \lambda_{n+1}) = \frac{1}{2}(-\lambda_1 - \lambda_{n+1} + \lambda_1 - \lambda_{n+1}) = -\lambda_{n+1}$$

puis $\mu_1 = a + s\tan\theta_1 = \lambda_1 + \lambda_{n+1} - \lambda_{n+1} = \lambda_1$. Ensuite, d'après la question III.2.c)iii)

$$\mu_2 = a + s\tan\theta_2 = a - \frac{s}{\tan\theta_1} = a - (a + s\tan\theta_1) = -s\tan\theta_1 = \lambda_{n+1}.$$

Les valeurs propres de M_s sont donc λ_1, $\ldots$, λ_n, λ_{n+1} quand $s = \sqrt{-\lambda_1\lambda_{n+1}}$. Maintenant, pour ce choix de S, la matrice M_s est une matrice clairement symétrique et positive ce qui démontre que (P_{n+1}) est vraie.

On a ainsi montré par récurrence que la propriété (P_n) est vraie pour tout entier naturel non nul n.

IV.3. Exemple a) En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\chi_A = \begin{vmatrix} 1-X & 2 & 3 \\ 2 & 1-X & 3 \\ 3 & 3 & -X \end{vmatrix} = (1-X)(X^2 - X - 9) - 2(-2X - 9) + 3(3X + 3) = -X^3 + 2X^2 + 21X + 18 =$$
$$(X+1)(-X^2 + 3X + 18) = -(X+1)(X+3)(X-6).$$

Les valeurs propres de A sont $a = 6$, $\lambda_2 = -1$ et $\lambda_3 = -3$.

b) A est une matrice positive et symétrique et ses valeurs propres de A vérifient $a \geq 0 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ et $a + \lambda_2 + \lambda_3 \geq 0$. D'autre part, $\lambda_1 + \lambda_4 = 6 = a$.
On a même $\lambda_1 \geq 0 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \lambda_4$ et $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \geq 0$. Le nombre s de la question c)iii) est $\sqrt{-9(-3)} = 3\sqrt{3}$.

Déterminons un vecteur propre X_1 de A associé à la valeur propre 6, unitaire et positif.
Posons $X = (x, y, z)$.

$$X \in \mathrm{Ker}(A - 6I_3) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -5x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - 5y + 3z = 0 \\ 3x + 3y - 6z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -x + 2z \\ -5x + 2(-x + 2z) + 3z = 0 \\ 2x - 5(-x + 2z) + 3z = 0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -x + 2z \\ x = z \end{array}\right. \Leftrightarrow x = y = z.$$

Le vecteur $X_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ convient. La matrice M_s de la question précédente s'écrit alors $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{La matrice } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ convient.}}$$

