SESSION 2008

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE MP

MATHEMATIQUES 2

I. EXEMPLES

1. (a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\chi_{M(\alpha)} = \begin{vmatrix} 1-X & -1 & \alpha \\ 0 & 2-X & -\alpha \\ 1 & 1 & 2-\alpha-X \end{vmatrix} = (1-X)(X^2-(4-\alpha)X+(4-\alpha))+(\alpha X-\alpha) = (1-X)(X^2-(4-\alpha)X+(4-2\alpha))$$
$$= (1-X)(2-X)(2-\alpha-X).$$

Donc, la matrice $M(\alpha)$ est à diagonale propre.

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R},\ M(\alpha) \text{ est à diagonale propre.}}$$

(b) • Si $\alpha \notin \{0,1\}$, alors $2-\alpha \neq 2$ et $2-\alpha \neq 1$. Dans ce cas, $M(\alpha)$ a trois valeurs propres réelles et simples, à savoir 1, 2 et $2-\alpha$. On sait alors que $M(\alpha)$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

• Si $\alpha = 0$, $\text{Sp}(M(\alpha)) = (1,2,2)$. On sait qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$ et la dimension de chaque sous-espace propre est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante.
Ici, $M(0)$ est diagonalisable si et seulement si $\dim(\text{Ker}(M(0)-2I_3)) = 2$ ce qui équivaut à $\text{rg}(M(0)-2I_3) = 1$. Or, $M(0)-2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et en notant C_1, C_2 et C_3 les colonnes de cette matrice,

$$\text{rg}(M(0)-2I_3) = \text{rg}(C_1,C_2,C_3) = \text{rg}(C_1,C_1,0) = \text{rg}(C_1) = 1.$$

Donc, $\text{rg}(M(0)-2I_3) = 1$ et $M(0)$ est diagonalisable.

• De même, si $\alpha = 1$, $\text{Sp}(M(\alpha)) = (1,2,1)$ et $M(1)$ est diagonalisable si et seulement si $\text{rg}(M(1)-I_3) = 1$.
Or, $M(1)-I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Comme $\text{rg}(M(1)-I_3) < 3$ et que C_1 et C_2 ne sont pas colinéaires, on a $\text{rg}(M(1)-I_3) = 2 \neq 1$ et donc $M(1)$ n'est pas diagonalisable.

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R},\ M(\alpha) \text{ est diagonalisable dans } \mathbb{R} \text{ si et seulement si } \alpha \neq 1.}$$

2. $\chi_A = -X(X^2) + (-X) = -X(X^2+1) = -X(X-i)(X+i)$. Donc $\text{Sp}(A) = (0,i,-i) \neq (0,0,0)$ et

$$\boxed{A \text{ n'est pas à diagonale propre.}}$$

3. Soient $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ puis $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On sait que $\chi_A = X^2 - (\text{Tr}(A))X + \det(A) = X^2 - (a+d)X + ad - bc$.
Donc,

$$A \text{ est MDP} \Leftrightarrow \chi_A = (a-X)(d-X) \Leftrightarrow X^2-(a+d)X+ad-bc = X^2-(a+d)X+ad \Leftrightarrow bc = 0.$$

$$\boxed{\mathcal{E}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) /\ bc = 0 \right\}.}$$

L'application $q : \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \mapsto bc$ est une forme quadratique sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On sait que q est continue sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Comme $\mathcal{E}_2 = q^{-1}(\{0\})$, $\mathcal{E}_2$ est l'image réciproque d'un fermé de $\mathbb{R}$ par une application continue sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On en déduit que

$$\boxed{\mathcal{E}_2 \text{ est un fermé de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$$

II. TEST DANS LE CAS $n = 3$

4. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à diagonale propre. On a donc $\mathrm{Sp}(A) = (a_{1,1}, a_{2,2}, a_{3,3})$. Par suite,

$$A \text{ est inversible} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} \neq 0 \Leftrightarrow \forall i \in \{1,2,3\},\ a_{i,i} \neq 0.$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est à diagonale propre (car triangulaire) et inversible.

Son inverse, obtenu en inversant le système $\begin{cases} e'_1 = e_1 \\ e'_2 = e_1 + e_2 \\ e'_3 = e_3 \end{cases}$, est $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et est aussi à diagonale propre.

5. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a d'une part

$$(a_{1,1} - X)(a_{2,2} - X)(a_{3,3} - X) = -X^3 + (a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3})X^2 - (a_{1,1}a_{2,2} + a_{2,2}a_{3,3} + a_{3,3}a_{1,1})X + a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} \quad \text{(I)},$$

et d'autre part,

$$\chi_A = -X^3 + \mathrm{Tr}(A)X^2 - kX + \det(A) \quad \text{(II)},$$

où k est le coefficient de $-X$ dans le développement de $\begin{vmatrix} a_{1,1} - X & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - X & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} - X \end{vmatrix}$. Dans le développement complet de ce déterminant, le facteur $-X$ ligne 1, colonne 1 est multiplié par la constante du déterminant $\begin{vmatrix} a_{2,2} - X & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} - X \end{vmatrix}$ et vaut $a_{2,2}a_{3,3} - a_{3,2}a_{2,3}$. On a un résultat analogue aux ligne 2, colonne 2 et ligne 3, colonne 3 et donc

$$\begin{aligned} k &= (a_{2,2}a_{3,3} - a_{3,2}a_{2,3}) + (a_{1,1}a_{3,3} - a_{3,1}a_{1,3}) + (a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}) \\ &= (a_{1,1}a_{2,2} + a_{2,2}a_{3,3} + a_{3,3}a_{1,1}) - (a_{2,1}a_{1,2} + a_{3,1}a_{1,3} + a_{3,2}a_{2,3}). \end{aligned}$$

Maintenant, A est MDP si et seulement si $\chi_A = (a_{1,1} - X)(a_{2,2} - X)(a_{3,3} - X)$ et en comparant (I) et (II), on obtient

$$\boxed{A \text{ est MDP} \Leftrightarrow (\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} \text{ et } a_{2,1}a_{1,2} + a_{3,1}a_{1,3} + a_{3,2}a_{2,3} = 0).}$$

6. ***Utilisation de la calculatrice***

(a) Algorithme en français.

Entrer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Calculer $\det(A)$.
Si $\det(A) \neq a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}$, afficher « A n'est pas MDP ».
Sinon, calculer $a_{2,1}a_{1,2} + a_{3,1}a_{1,3} + a_{3,2}a_{2,3}$.
Si $a_{2,1}a_{1,2} + a_{3,1}a_{1,3} + a_{3,2}a_{2,3} \neq 0$, afficher « A n'est pas MDP ».
Sinon, afficher « A est MDP ».

(b) Avec une calculatrice, on trouve

$$\boxed{A_1, A_3, A_4, A_5, A_6 \text{ et } A_8 \text{ sont MDP et } A_2 \text{ et } A_7 \text{ ne sont pas MDP.}}$$

(c) Parmi les matrices à diagonales propres A_1, A_3, A_4, A_5, A_6 et A_8, les matrices inversibles sont A_1, A_3, A_4, A_5 et A_6.
On trouve alors $A_1^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3/2 \\ -3/2 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, $A_3^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1 \\ 1 & 3/2 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$, $A_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$,
$A_5^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 2/3 & 4/3 & -1/3 \\ -1/6 & -5/6 & 1/3 \end{pmatrix}$ et $A_6^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Les matrices A_1^{-1} et A_4^{-1} réussissent le test de la question 5. et sont donc à diagonales propres. De plus, dans chacun de ces deux cas, les trois produits $a_{1,2}a_{2,1}$, $a_{1,3}a_{3,1}$ et $a_{2,3}a_{3,2}$ sont nuls.

Les matrices A_3^{-1}, A_5^{-1} et A_6^{-1} ne réussissent pas le test de la question 5. et ne sont donc pas à diagonales propres. De plus, dans chacun de ces trois cas, l'un des trois produits $a_{1,2}a_{2,1}$, $a_{1,3}a_{3,1}$ et $a_{2,3}a_{3,2}$ n'est pas nul.
On peut conjecturer que A^{-1} est à diagonale propre si et seulement si les trois produits sont nuls.

III. EXEMPLES DE MATRICES PAR BLOCS

7. Fixons momentanément B et C et faisons varier A.
Notons $C_1,\ldots, C_r$ les colonnes de la matrice A de format r. L'application $\varphi\ :\ (C_1,\ldots,C_r)\mapsto \det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ est une forme r-linéaire alternée sur $\mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension r. On sait que l'espace des formes r-linéaires alternées sur $\mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$ est de dimension 1 et donc qu'il existe $k\in\mathbb{R}$ telle que $\varphi = k\det$ ou encore

$$\exists k\in\mathbb{R}/\ \forall A\in\mathcal{M}_r(\mathbb{R}),\ \det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = k\det(A).$$

Puisque k ne dépend pas de A (mais dépend de B et C), en évaluant en $A = I_r$, on obtient

$$k = k\det I_r = \det\begin{pmatrix} I_r & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Par suite, $\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = (\det(A)\times\det\begin{pmatrix} I_r & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$.

De même, en notant $L_1,\ldots, L_s$ les lignes de C, l'application $\psi\ :\ (L_1,\ldots,L_s)\mapsto\det\begin{pmatrix} I_p & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ est une forme s-linéaire alternée sur $\mathcal{M}_{1,s}(\mathbb{R})$. On en déduit qu'il existe $k'\in\mathbb{R}$ indépendant de C tel que $\psi(C) = k'\det(C)$ avec

$$k' = k'\det I_s = \det\begin{pmatrix} I_r & B \\ 0 & I_s \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour toutes matrices A, B et C, $\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A)\times\det(C)\times\det\begin{pmatrix} I_r & B \\ 0 & I_s \end{pmatrix} = \det(A)\times\det(C)$ (en supposant acquis la valeur d'un déterminant triangulaire).

$$\boxed{\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A)\times\det(C).}$$

8. La question précédente fournit encore

$$\chi_M = \det\begin{pmatrix} A - XI_r & B \\ 0 & C - XI_s \end{pmatrix} = \det(A - XI_r)\times\det(C - XI_s) = \chi_A\times\chi_C.$$

(a) La question 6. fournit une matrice de format 3 à diagonale propre n'ayant aucun coefficient nul à savoir la matrice A_5. Il suffit alors de border convenablement cette matrice :

$$\boxed{\text{la matrice }\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}\text{ convient.}}$$

(b) La question 3. montre qu'il ne faut pas choisir A et C à diagonale propre car les matrices A et C contiendrait un coefficient nul. On choisit alors de se débrouiller pour que les valeurs propres de A soient les coefficients diagonaux de C et vice-versa. On rappelle que $\chi_A = X^2 - (\text{Tr}A)X + \det A$ et de même pour C. En imposant de plus $\text{Tr}A = \text{Tr}C = 0$, on obtient par exemple

$$\boxed{\text{la matrice } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ convient.}}$$

IV. QUELQUES PROPRIÉTÉS

9. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{E}_n$. On a donc $\text{Sp}A = (a_{i,i})_{1\leq i\leq n}$.
Maintenant, pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $aA + bI_n = P(A)$ où $P = aX + b$ et on sait que

$$\text{Sp}(aA + bI_n) = \text{Sp}(P(A)) = (P(a_{i,i}))_{1\leq i\leq n} = (aa_{i,i} + b)_{1\leq i\leq n}.$$

Mais pour chaque $i \in [\![1,n]\!]$, $aa_{i,i} + b$ est le coefficient ligne i, colonne i de la matrice $aA + bI_n$ et on a montré que la matrice $aA + bI_n$ est à diagonale propre.

En appliquant ce résultat à ${}^tA$ et en tenant compte du fait que A et ${}^tA$ ont à la fois même diagonale principale et même polynôme caractéristique, on a montré également que $a{}^tA + bI_n$ est à diagonale propre.

10. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{E}_n$. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{a_{i,i},\ 1 \leq i \leq n\}$, la matrice $A - xI_n$ est inversible car x n'est pas valeur propre de A.
Soit $m = \text{Min}\{|a_{i,i}|,\ 1 \leq i \leq n,\ a_{i,i} \neq 0\}$. Pour p entier naturel non nul strictement supérieur $\dfrac{1}{m}$, on a $0 < \dfrac{1}{p} < m$ et donc la matrice $A - \dfrac{1}{p}I_n$ est inversible et de plus dans $\mathcal{E}_n$ d'après la question 9..

Comme $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \left(A - \frac{1}{p}I_n\right) = A$, la suite $\left(A - \dfrac{1}{p}I_n\right)_{p>\frac{1}{m}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{E}_n \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ convergeant vers A.
Ainsi, tout élément de $\mathcal{E}_n$ est limite d'une suite d'éléments de $\mathcal{E}_n \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et donc

$$\boxed{\mathcal{E}_n \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ est dense dans } \mathcal{E}_n.}$$

11. ***Matrices trigonalisables***

(a) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a $\chi_A = (X-1)(X+1)$ et donc A n'est pas à diagonale propre. Mais A est trigonalisable dans $\mathbb{R}$ car χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$. Donc

$$\boxed{\text{une matrice trigonalisable n'est pas nécessairement à diagonale propre.}}$$

(b) Par définition, le polynôme caractéristique d'une matrice à diagonale propre est scindé sur $\mathbb{R}$. Donc, une matrice à diagonale propre est trigonalisable.

(c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A est semblable à une matrice à diagonale propre, A est à valeurs propres réelles et son polynôme caractéristique est donc scindé sur $\mathbb{R}$. Réciproquement, si le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{R}$, A est semblable à une matrice triangulaire qui est une matrice à diagonale propre. Donc,

$$\boxed{\text{une matrice est semblable à une matrice MDP si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur } \mathbb{R}.}$$

12. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, toute matrice est somme de deux matrices triangulaires et donc

$$\boxed{\text{toute matrice est somme de deux matrices à diagonale propre.}}$$

Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont dans $\mathcal{E}_2$. Leur somme $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas dans $\mathcal{E}_n$. En effet, la matrice $A + I_n$ est de rang 1 et n'est donc pas inversible (car $n \geq 2$). On en déduit que -1 est valeur propre de A et n'est pas sur la diagonale principale de A. Donc (pour $n \geq 2$)

$$\boxed{\mathcal{E}_n \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

V. MATRICES SYMÉTRIQUES ET ANTISYMÉTRIQUES

13. ***Question préliminaire*** Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\mathrm{Tr}({}^tAA) = \sum_{j=1}^{n} \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \times a_{i,j}}_{\text{coef ligne } j, \text{ colonne } j \text{ de } {}^tAA} \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2.$$

$$\boxed{\forall A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n},\ \mathrm{Tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2.}$$

14. ***Matrices symétriques à diagonale propre***

(a) A est symétrique réelle et donc A est orthogonalement semblable à la matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$. Donc, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1} = PD{}^tP$. D'après 13., on a déjà

$$\mathrm{Tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2.$$

Mais ${}^tAA = A^2$ est semblable à D^2 et puisque deux matrices semblables ont même trace, on a aussi

$$\mathrm{Tr}({}^tAA) = \mathrm{Tr}(D^2) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2.$$

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2.}$$

(b) Si de plus, A est à diagonale propre, on a $\mathrm{Sp}(A) = (a_{1,1}, \dots, a_{n,n})$ et donc

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}^2 + \sum_{i \neq j} a_{i,j}^2.$$

On en déduit que $\displaystyle\sum_{i \neq j} a_{i,j}^2 = 0$ et donc que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $(i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0)$. Ainsi, si une matrice A est symétrique réelle à diagonale propre, alors A est diagonale. La réciproque étant immédiate, on a montré que

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ A \text{ est MDP si et seulement si } A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}).}$$

15. ***Matrices antisymétriques à diagonale propre***

(a) Soit A une matrice antisymétrique réelle à diagonale propre. Les coefficients diagonaux de A sont nuls et donc A admet 0 pour valeur propre d'ordre n ou encore $\chi_A = (-X)^n$.
D'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON, on a $\chi_A(A) = 0$ et donc $A^n = 0$. Mais alors,

$$({}^tAA)^n = (-A^2)^n = (-1)^n(A^n)^2 = 0.$$

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}),\text{ si } A \text{ est MDP alors } ({}^tAA)^n = 0.}$$

(b) ${}^t({}^tAA) = {}^tA\,{}^t({}^tA) = {}^tAA$. Ainsi, ${}^tAA$ est symétrique réelle et par suite diagonalisable. Donc, ${}^tAA$ est semblable à une matrice diagonale réelle D vérifiant $D^n = 0$. On en déduit que $D = 0$ puis que ${}^tAA = 0$.

(c) Mais alors $\text{Tr}({}^tAA) = 0$ ou encore $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 = 0$ et donc $\forall(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} = 0$.

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}),\ A \text{ MDP si et seulement si } A = 0.}$$

VI. DIMENSION MAXIMALE D'UN ESPACE VECTORIEL INCLUS DANS $\mathcal{E}_n$

16. ***Question préliminaire***

$$\boxed{\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}.}$$

17. D'après la question 15.(c),

$$\dim(F + \mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \dim(F) + \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) - \dim(F \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \dim(F) + \frac{n(n-1)}{2} - 0 = \dim(F) + \frac{n(n-1)}{2},$$

et donc

$$\dim(F) = \dim(F + \mathcal{A}_n(\mathbb{R})) - \frac{n(n-1)}{2} \leq \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) - \frac{n(n-1)}{2} = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

D'autre part, $\mathcal{T}_{n,s}(\mathbb{R})$ l'espace des matrices triangulaires supérieures fournit un exemple de sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et contenu dans $\mathcal{E}_n$. Donc

$$\boxed{\text{la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel } F \text{ de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ vérifiant } F \subset \mathcal{E}_n \text{ est } \frac{n(n+1)}{2}.}$$

18. Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$. Alors $\chi_A = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(a_{i,i} - X)$ et donc A est MDP.

L'ensemble F des matrices du type ci-dessus est donc contenu dans $\mathcal{E}_n$. De plus, $F = \text{Vect}\left((E_{i,1})_{1\leq i\leq n} \cup (E_{i,j})_{2\leq i\leq j\leq n}\right)$. Donc F est un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n + \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Enfin F n'est pas constitué uniquement de matrices triangulaires.

