SESSION 2008

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE MP

MATHEMATIQUES 1

I. Généralités

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Tout d'abord, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ existe. Ensuite,

• Si $x \leq 0$, $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On en déduit que la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ est grossièrement divergente. Dans ce cas, $F(x)$ n'existe pas.

• Si $x > 0$, la suite $\left(\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right)$ est alternée en signe et sa valeur absolue, à savoir $\dfrac{1}{n^x}$, tend vers 0 en décroissant. On en déduit que la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées et donc que $F(x)$ existe.

$$\boxed{F \text{ est définie sur }]0, +\infty[.}$$

2. Soit $t \in [0, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-t)^k = \frac{1-(-t)^{n+1}}{1-(-t)} = \frac{1}{1+t} - \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}$ (car $t \neq -1$).

Puisque $|-t| < 1$, $g_n(t)$ tend vers $\dfrac{1}{1+t}$ quand n tend vers $+\infty$.

$$\boxed{\text{La suite de fonctions } (g_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge simplement sur } [0,1[\text{ vers la fonction } g\ :\ t \mapsto \frac{1}{1+t}.}$$

• Chaque fonction g_n est continue et intégrable sur $[0, 1]$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^1 g_n(t)\ dt = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^k\ dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

• La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction g qui est continue sur $[0, 1]$.
• Soient $t \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$|g_n(t)| = \left|\frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}\right| \leq \frac{1+|(-t)^{n+1}|}{1+t} \leq \frac{2}{1+t} = \varphi(t),$$

où la fonction φ est continue sur le segment $[0, 1]$ et donc intégrable sur ce segment.

D'après le théorème de convergence dominée, la suite $\left(\displaystyle\int_0^1 g_n(t)\ dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 g_n(t)\ dt = \int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} g_n(t)\right)\ dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\ dt = \ln 2.$$

Maintenant, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^1 g_n(t)\ dt = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 g_n(t)\ dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-1)^{k-1}}{k} = F(1),$$

et donc

$$\boxed{F(1) = \int_0^1 g(t)\ dt = \ln 2.}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x > 0$, posons $f_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

Pour $x \geq 2$, on a $|f_n(x)| = \dfrac{1}{n^x} = \dfrac{1}{n^2}$ et donc $\sup\{|f_n(x)|,\ x \in [2, +\infty[\} \leq \dfrac{1}{n^2}$. Comme la série numérique de terme général $\dfrac{1}{n^2}$, $n \geq 1$, converge, la série de fonctions de terme général f_n, $n \geq 1$, converge normalement vers F sur $[2, +\infty[$.

$$\boxed{\text{La série de fonctions de terme général } x \mapsto \frac{(-1)^{n-1}}{n^x},\ n \geq 1, \text{ converge normalement sur } [2, +\infty[.}$$

La série de fonctions de terme général f_n, $n \geq 1$, converge normalement et donc uniformément vers F sur $[2, +\infty[$. De plus, chaque fonction f_n, $n \geq 1$, a une limite réelle ℓ_n quand x tend vers $+\infty$ à savoir $\ell_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 1 \\ 0 \text{ si } n \geq 2 \end{cases}$.

Le théorème d'interversion des limites permet alors d'affirmer que

- La série numérique de terme général ℓ_n, $n \geq 1$, converge ;
- F a une limite réelle quand x tend vers $+\infty$;
- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n = 1 + 0 + \ldots = 1$.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.}$$

4. ***Dérivabilité de*** F.

(a) Soit $x > 0$. la fonction $u\ :\ t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $t > 0$,

$$u'(t) = \frac{1}{t} \times \frac{1}{t^x} + \ln t \times \frac{-x}{t^{x+1}} = \frac{1 - x \ln t}{t^{x+1}}.$$

$u'(t)$ est du signe de $1 - x \ln t$ sur $]0, +\infty[$ et donc la fonction u est strictement croissante sur $]0, e^{1/x}]$ et strictement décroissante sur $[e^{1/x}, +\infty[$. Mais alors, pour $n \geq n_0 = E(e^{1/x}) + 1$, on a $u(n) \geq u(n+1)$ et donc

$$\boxed{\forall x > 0, \text{ la suite } \left(\frac{\ln n}{n^x}\right)_{n \geq 1} \text{ décroît à partir du rang } n_0 = E(e^{1/x}) + 1.}$$

(b) Soit $a > 0$. Chaque fonction f_n est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et pour $x \geq a$, $f_n'(x) = (-1)^n \dfrac{\ln n}{n^x}$.

Soit $x \geq a$. La suite numérique $(f_n'(x))$ est alternée en signe, tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et la question (a) montre que la suite $(|f_n'(x)|)$ décroît à partir du rang $E(e^{1/x}) + 1$. Ainsi, la série numérique de terme général $f_n'(x)$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées ou encore la série de fonctions de terme général f_n' converge simplement sur $[a, +\infty[$.

Soit $n \geq E(e^{1/a}) + 1 = n_0$. Pour $x \geq a$, on a $E(e^{1/x}) + 1 \leq E(e^{1/a}) + 1$ et donc $n \geq E(e^{1/x}) + 1$. La question (a) montre alors que la suite $\left(\dfrac{\ln n}{n^x}\right)_{n \geq n_0}$ est décroissante. Mais alors, d'après une majoration classique du reste à l'ordre n d'une série alternée

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln k}{k^x}\right| \leq \left|(-1)^{n+1} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x}\right| = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a},$$

et donc, pour $n \geq E(e^{1/a}) + 1$, $\sup\left\{\left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n'(x)\right|,\ x \in [a, +\infty[\right\} \leq \dfrac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}$. Comme $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a} = 0$, on a montré que la série de fonctions de terme général f_n' converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

En résumé,

- La série de fonctions de terme général f_n, $n \geq 1$, converge simplement vers F sur $[a, +\infty[$;
- chaque fonction f_n est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$;
- la série de fonctions de terme général f_n' converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

D'après une théorème de dérivation terme à terme, F est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ et $F' = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n$. Ce résultat étant valable pour tout réel $a > 0$, on a montré que

$$\boxed{F \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]0,+\infty[\text{ et } \forall x > 0,\ F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n^x}.}$$

5. ***Lien avec*** ζ. Soit $x > 1$. Déjà, $\zeta(x)$ est défini.
Ensuite, si n est un entier impair, $(-1)^{n-1} - 1 = 0$ et si n est un entier pair, $(-1)^{n-1} - 1 = -2$ et donc

$$F(x) - \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} - 1}{n^x} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{-2}{(2p)^x} = -2^{1-x} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^x} = -2^{1-x}\zeta(x),$$

et donc, $F(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$.

$$\boxed{\forall x \in]1,+\infty[,\ F(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x).}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{1-x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \zeta(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{1 - 2^{1-x}} = \dfrac{1}{1-0} = 1$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1.}$$

II. Produit de Cauchy de la série alternée par elle-même

6. ***Étude de la convergence***

(a) Soit $x > 1$. La série numérique de terme général $\dfrac{1}{n^x}$ est convergente ou encore la série de terme général $a_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ est absolument convergente. On sait alors que la série produit de CAUCHY de la série de terme général $a_n(x)$ par elle-même est convergente et a pour somme $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)\right)^2$ ou encore $(F(x))^2$.

$$\boxed{\forall x > 1,\ \sum_{n\geq 2} c_n(x) \text{ converge et } \sum_{n=2}^{+\infty} c_n(x) = (F(x))^2.}$$

(b) Soit $x > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } n = 0 \\ \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x} \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$.

Déjà $c_0(x) = a_0(x)^2 = 0$ et $c_1(x) = a_0(x)a_1(x) + a_1(x)a_0(x) = 0$. Ensuite pour $n \geq 2$,

$$c_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)a_{n-k}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k^x}\frac{(-1)^{n-k-1}}{(n-k)^x} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k(n-k))^x}.$$

Maintenant, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, $k(n-k) = -k^2 + kn = -\left(k - \dfrac{n}{2}\right)^2 + \dfrac{n^2}{4} \leq \dfrac{n^2}{4}$ et donc

$$|c_n(x)| = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k(n-k))^x} \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(n^2/4)^x} = \frac{4^x(n-1)}{n^{2x}}.$$

$$\boxed{\forall x > 0,\ \forall n \geq 2,\ |c_n(x)| \geq \frac{4^x(n-1)}{n^{2x}}.}$$

Si de plus $x \in]0, \frac{1}{2}]$, pour $n \geq 2$ on a

$$|c_n(x)| \geq \frac{4^x(n-1)}{n^{2x}} \geq \frac{4^x(n/2)}{n^{2x}} = 2^{2x-1}n^{1-2x} \geq 2^{2x-1}2^{1-2x} = 1 \text{ car } 1-2x \geq 0.$$

Mais alors, $c_n(x)$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et la série numérique de terme général $c_n(x)$ est grossièrement divergente.

$$\boxed{\text{Si } 0 < x \leq \frac{1}{2}, \text{ la série } \sum_{n \geq 2} c_n(x) \text{ est grossièrement divergente.}}$$

7. ***Cas où*** $x = 1$

(a) Soit $n \geq 2$. $\dfrac{1}{X(n-X)} = \dfrac{1}{n}\dfrac{n-X+X}{X(n-X)} = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{X} + \dfrac{1}{n-X}\right)$. Puis

$$c_n(1) = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right) = \frac{2(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \frac{2(-1)^n H_{n-1}}{n}.$$

$$\boxed{\forall n \geq 2,\ c_n(1) = \frac{2(-1)^n H_{n-1}}{n}.}$$

(b) Soit $n \geq 2$.

$$\frac{H_{n-1}}{n} - \frac{H_n}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}\left((n+1)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n(n+1)}\left(\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right) - 1\right) \geq \frac{1}{n(n+1)}(1-1) = 0,$$

et donc

$$\boxed{\text{la suite } \left(\frac{H_{n-1}}{n}\right)_{n \geq 2} \text{ est décroissante.}}$$

(c) Pour $n \geq 2$, on a $H_{n-1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n-1} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\, dt = 1 + \int_1^n \frac{1}{t}\, dt = 1 + \ln n$. Par suite, pour $n \geq 2$

$$|c_n(1)| \leq \frac{2(1+\ln n)}{n}.$$

On en déduit que la suite $|c_n(1)|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. En résumé, la suite $(c_n(1))_{n \geq 2}$ est de signe alterné et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant (d'après (b)). D'après le critère spécial aux séries alternées,

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n \geq 2} c_n(1) \text{ converge.}}$$

III. Calcul de la somme d'une série à l'aide d'une étude de zeta au voisinage de 1

8. ***Développement asymptotique en*** 1

(a) D'après la question 4.(b), F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. En particulier, F est dérivable en 1 et admet donc un développement limité d'ordre 1 en 1 :

$$F(x) \underset{x \to 1}{=} F(1) + F'(1)(x-1) + o(x-1) = \ln 2 + F'(1)(x-1) + o(x-1) \text{ (d'après 2.).}$$

On a aussi

$$1 - 2^{1-x} = 1 - e^{-\ln 2(x-1)} = 1 - 1 + \ln 2(x-1) - \frac{\ln^2}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2) = \ln 2(x-1) - \frac{\ln^2 2}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2).$$

(b) Mais alors quand x tend vers 1 par valeurs supérieures,

$$\begin{aligned}
\zeta(x) &= \frac{F(x)}{1-2^{1-x}} = \frac{\ln 2 + F'(1)(x-1) + o(x-1)}{\ln 2(x-1) - \dfrac{\ln^2 2}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)} = \frac{1}{x-1} \times \frac{1 + (F'(1)/\ln 2)(x-1) + o(x-1)}{1 - \dfrac{\ln 2}{2}(x-1) + o(x-1)} \\
&= \frac{1}{x-1}\left(1 + \frac{F'(1)}{\ln 2}(x-1) + o(x-1)\right)\left(1 + \frac{\ln 2}{2}(x-1) + o(x-1)\right) \\
&= \frac{1}{x-1}\left(1 + \left(\frac{F'(1)}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{2}\right)(x-1) + o(x-1)\right) \\
&= \frac{1}{x-1} + \left(\frac{F'(1)}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{2}\right) + o(1).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\zeta(x) \underset{x \to 1^+}{=} \frac{1}{x-1} + \left(\frac{F'(1)}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{2}\right) + o(1).}$$

9. ***Développement asymptotique en*** 1 ***(bis)***

(a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [1,2]$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^x}$ est décroissante sur $[n, n+1]$ et donc $(n+1-n)\dfrac{1}{(n+1)^x} \leq \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,dt \leq (n+1-n)\frac{1}{n^x}$ puis $0 \leq \dfrac{1}{n^x} - \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,dt \leq \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [1,2],\ 0 \leq v_n(x) \leq \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}.}$$

(b) Soit $x \in [1,2]$. La série de terme général $\dfrac{1}{n^x} - \dfrac{1}{(n+1)^x}$ est de même nature que la suite de terme général $\dfrac{1}{n^x}$ (séries télescopiques) c'est-à-dire convergente. La question (a) permet alors d'affirmer que $dsumn \geq 1 v_n(x)$ converge.

$$\boxed{\forall x \in [1,2],\ \sum_{n \geq 1} v_n(x) \text{ converge.}}$$

(c) Soit $x \in]1,2]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} v_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x} - \int_1^{n+1} \frac{1}{t^x}\,dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x} + \frac{1}{x-1}\left[\frac{1}{t^{x-1}}\right]_1^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x} + \frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{x-1}} - 1\right),$$

et quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \zeta(x) - \frac{1}{x-1}$.

$$\boxed{\forall x \in]1,2],\ \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \zeta(x) - \frac{1}{x-1}.}$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après (a), pour $x \in [1,2]$, on a

$$\begin{aligned}
0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k(x) &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k^x} - \frac{1}{(k+1)^x}\right) = \frac{1}{(n+1)^x} \text{ (série télescopique)} \\
&\leq \frac{1}{n+1},
\end{aligned}$$

et donc $\sup\left\{\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k(x)\right|,\ x\in[1,2]\right\}\leq\dfrac{1}{n+1}$. Comme $\dfrac{1}{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on a montré que la suite des restes de la série de fonctions de terme général v_n converge uniformément vers la fonction nulle sur $[1,2]$ ou encore

$$\boxed{\text{la série de fonctions de terme général } v_n,\ n\geq 1, \text{ converge uniformément sur } [1,2].}$$

(e) Montrons tout d'abord que chaque fonction v_n est continue sur $[1,2]$.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour $x\in[1,2]$, on a

$$v_n(x)=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{n}-\ln(n+1)+\ln n \text{ si } x=1\\ \dfrac{1}{n^x}+\dfrac{1}{x-1}\left(\dfrac{1}{(n+1)^{x-1}}-\dfrac{1}{n^{x-1}}\right) \text{ si } x\in]1,2]\end{array}\right..$$

Déjà la fonction v_n est continue sur $]1,2]$ et quand x tend vers 1,

$$\begin{aligned}v_n(x)&=\frac{1}{n^x}+\frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{x-1}}-\frac{1}{n^{x-1}}\right)=\frac{1}{n^x}+\frac{e^{-(x-1)\ln(n+1)}-e^{-(x-1)\ln(n)}}{x-1}\\&=\frac{1}{n^x}+\frac{(1-(x-1)\ln(n+1))-(1-(x-1)\ln(n))+o(x-1)}{x-1}=\frac{1}{n}-(\ln(n+1)-\ln(n))+o(1)\\&=v_n(1)+o(1).\end{aligned}$$

Ainsi, chaque v_n est continue sur $[1,2]$ et puisque la série de fonctions de terme général v_n converge uniformément sur $[1,2]$, la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ est une fonction continue sur $[1,2]$ et en particulier en 1.

On déduit alors de la question (c) que

$$\lim_{x\to1^+}\left(\zeta(x)-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to1^+}\sum_{n=1}^{+\infty}v_n(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}v_n(1)=\gamma,$$

et donc que

$$\boxed{\zeta(x)\underset{x\to1^+}{=}\frac{1}{x-1}+\gamma+o(1).}$$

10. ***Application*** En comparant les développements obtenus en 8. et 9., on obtient $\dfrac{F'(1)}{\ln 2}+\dfrac{\ln 2}{2}=\gamma$ et donc $F'(1)=\gamma\ln 2-\dfrac{\ln^2 2}{2}$. Mais on a vu que pour $x>0$, $F'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{\ln n}{n^x}$ et donc $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}\ln n}{n}=-F'(1)=\dfrac{\ln^2 2}{2}-\gamma\ln 2$.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}\ln n}{n}=\frac{\ln 2(\ln 2-2\gamma)}{2}.}$$

IV. Calcul des $F(2k)$ à l'aide des polynômes de Bernoulli

11. $B_1'=B_0=1$ et donc $B_1=X+b_1$ avec

$$0=\int_0^1 B_1(t)\ dt=\frac{1}{2}+b_1.$$

Donc $B_1=X-\dfrac{1}{2}$. Ensuite, $B_2'=2B_1=2X-1$ et donc$B_2=X^2-X+b_2$ avec

$$0=\int_0^1 B_2(t)\ dt=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+b_2,$$

et donc $b_2=\dfrac{1}{6}$ puis $B_2=X^2-X+\dfrac{1}{6}$.

$$\boxed{B_1=X-\frac{1}{2}\text{ et }B_2=X^2-X+\frac{1}{6}.}$$

12. Soit $n \geq 2$.

$$B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B_n'(t)\, dt = n\int_0^1 B_{n-1}(t)\, dt = 0 \text{ car } n-1 \geq 1.$$

$$\boxed{\forall n \geq 2,\ B_n(0) = B_n(1).}$$

13. ***Symétrie*** Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $P_n = (-1)^n B_n(1-X)$. On a déjà $P_0 = 1 = B_0$. Ensuite, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P_n'(X) = (-1)^n \times -B_n'(1-X) = (-1)^{n-1} n B_{n-1}(X) = nP_{n-1}(X),$$

et d'autre part en posant $u = 1-t$,

$$\int_0^1 P_n(t)\, dt = (-1)^n \int_0^1 B_n(1-t)\, dt = (-1)^n \int_1^0 B_n(u) \times -du = (-1)^n \int_0^1 B_n(u)\, du = 0.$$

Par unicité de la suite des polynômes de Bernoulli, on en déduit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ B_n(1-X) = (-1)^n B_n(X).}$$

14. ***Développement en série de Fourier***

Soit $k \in \mathbb{N}$. Déjà, g_k est 2π-périodique, de classe C^1 par morceaux et d'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de g_k converge en tout réel x vers $\dfrac{g(x^+) + g(x^-)}{2}$.

Vérifions que g_k est continue sur $\mathbb{R}$. Par 2π-périodicité, il suffit de vérifier que g_k est continue à gauche en 2π. Or, d'après 12., si $k \geq 1$, $B_{2k}(1) = B_{2k}(0)$, ce qui reste vrai quand $k = 0$. Par suite,

$$g_k(2\pi) = g_k(0) = B_{2k}(0) = B_{2k}(1) = \lim_{x \to 2\pi^-} B_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right) = g_k(2\pi^-).$$

Ainsi, g_k est continue à gauche en 2π et donc sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité. Ceci montre que la série de Fourier de g_k a pour somme g_k sur $\mathbb{R}$.

Vérifions que g_k est paire. Par 2π-périodicité, il suffit de vérifier que $g_k(-x) = g_k(x)$ pour $x \in]0, 2\pi[$. Soit donc $x \in]0, 2\pi[$. D'après la question 13., on a

$$g_k(-x) = g_k(-x + 2\pi) = B_{2k}\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) = (-1)^{2k} B_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right) = g_k(x),$$

ce qui montre que g_k est paire. En notant $a_n(k)$ et $b_n(k)$ les coefficients de Fourier de g_k, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(k) = 0$ et donc que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g_k(x) = \frac{a_0(k)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(k)\cos(nx).}$$

15. ***Expression des coefficients***

(a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$, une double intégration par parties fournit

$$\begin{aligned}
a_n(k) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} B_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right)\cos(nx)\, dx = 2\int_0^1 B_{2k}(u)\cos(2n\pi u)\, du = 2\left(\left[B_{2k}(u)\frac{\sin(2n\pi u)}{2n\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 B_{2k}'(u)\frac{\sin(2n\pi u)}{2n\pi}\, du\right)\\
&= 2\left(-\frac{k}{n\pi}\int_0^1 B_{2k-1}(u)\sin(2n\pi u)\, du\right)\\
&= 2\left(\frac{k}{n\pi}\left[B_{2k-1}(u)\frac{\cos(2n\pi u)}{2n\pi}\right]_0^1 - \frac{k}{n\pi}\int_0^1 (2k-1)B_{2k-1}(u)\frac{\cos(2n\pi u)}{2n\pi}\, du\right)\\
&= \frac{k}{(n\pi)^2}(B_{2k-1}(1) - B_{2k-1}(0)) - \frac{(2k)(2k-1)}{(2n\pi)^2} \times 2\int_0^1 B_{2k-1}(u)\cos(2n\pi u)\, du\\
&= \frac{k}{(n\pi)^2}(B_{2k-1}(1) - B_{2k-1}(0)) - \frac{(2k)(2k-1)}{(2n\pi)^2} a_n(k-1).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ a_n(k) = \frac{k}{(n\pi)^2}(B_{2k-1}(1) - B_{2k-1}(0)) - \frac{(2k)(2k-1)}{(2n\pi)^2} a_n(k-1).}$$

(b) On a vu que $B_1 = X - \dfrac{1}{2}$ et donc pour $k = 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient

$$a_n(1) = \frac{1}{(n\pi)^2}(B_1(1) - B_1(0)) - \frac{2}{(2n\pi)^2} a_n(0) = \frac{1}{(n\pi)^2} - \frac{2}{(2n\pi)^2}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(nx)\ dt = \frac{1}{(n\pi)^2}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n(1) = \frac{1}{(n\pi)^2}.}$$

(c) Soit $k \geq 2$. D'après les questions 12. et 13, puisque $2k - 1 \geq 2$, on a $B_{2k-1}(0) = B_{2k-1}(1) = -B_{2k-1}(0)$ et donc $B_{2k-1}(0) = B_{2k-1}(1) = 0$. La relation de la question (a) s'écrit donc pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n(k) = -\dfrac{(2k)(2k-1)}{(2n\pi)^2} a_n(k-1)$. Par suite,

$$a_n(k) = -\frac{(2k)(2k-1)}{(2n\pi)^2} \times -\frac{(2k-2)(2k-3)}{(2n\pi)^2} \times \ldots \times -\frac{(4)(3)}{(2n\pi)^2} a_n(1) = \frac{(-1)^{k-1}(2k)!/2}{(2n\pi)^{2(k-1)}}\frac{1}{(n\pi)^2} = \frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{2^{2k-1}(n\pi)^{2k}}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ a_n(k) = \frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{2^{2k-1}(n\pi)^{2k}}.}$$

16. *Conclusion* Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a aussi

$$a_0(k) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} B_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right)\ dx = 2\int_0^1 B_{2k}(u)\ du = 0.$$

D'après la question 14., pour $k \in \mathbb{N}^*$ on a alors

$$b_{2k} = g_k(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{2^{2k-1}(n\pi)^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{2^{2k-1}\pi^{2k}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{2^{2k-1}\pi^{2k}}\zeta(2k),$$

et donc

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \zeta(2k) = (-1)^{k-1}2^{2k-1}\pi^{2k}b_{2k}(2k)!.}$$

17. *Calcul effectif des* b_n

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule de Taylor

$$B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_n^{(k)}(0)}{k!}X^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n!/(n-k)!)B_{n-k}(0)}{k!}X^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} b_{n-k}X^k.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ B_n(X) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} b_{n-k}X^k.}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En intégrant l'égalité précédente sur $[0, 1]$, on obtient

$$0 = \int_0^1 B_n(t)\ dt = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{b_{n-k}}{k+1},$$

et donc

$$\boxed{b_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = -\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{b_{n-k}}{k+1}.}$$

Algorithme en MAPLE.

```
restart ;
bn:=proc(n)
local j, k, B, S;
      B[0]:=1;
      if n>0 then
            for j from 1 to n do
                  S :=0;
                  for k from 1 to j do
                        S :=S-binomial(j,k)*B[j-k]/(k+1)
                  od ;
                  B[j]: =S
            od;
            print(B[n])
      else print(B[0])
      fi
end ;
```

