SESSION 2007

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE

EPREUVE SPECIFIQUE-FILIERE PC

MATHEMATIQUES 1

PARTIE I

I.1 Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$M_a - (1+3a)I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1-4a & -1+4a \\ -3a & -1+2a & 2+a \\ -3a & -2-a & 3+4a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1+3a & 0 & 0 \\ 0 & 1+3a & 0 \\ 0 & 0 & 1+3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a & 1-4a & -1+4a \\ -3a & -2-a & 2+a \\ -3a & -2-a & 2+a \end{pmatrix}.$$

La troisième colonne est l'opposé de la deuxième et les deux dernières lignes sont égales. Donc

$$\text{rg}\begin{pmatrix} -3a & 1-4a & -1+4a \\ -3a & -2-a & 2+a \\ -3a & -2-a & 2+a \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} -3a & 1-4a \\ -3a & -2-a \\ -3a & -2-a \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} -3a & 1-4a \\ -3a & -2-a \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} a & 1-4a \\ a & -2-a \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette dernière matrice vaut $a[(-2-a)-(1-4a)]$ ou encore $3a(a-1)$.

• Si $a \notin \{0,1\}$, la matrice $\begin{pmatrix} a & 1-4a \\ a & -2-a \end{pmatrix}$ est inversible et donc de rang 2. Il en est de même de la matrice $M_a - (1+3a)I_3$.

• Si $a = 0$ ou $a = 1$, la matrice $\begin{pmatrix} a & 1-4a \\ a & -2-a \end{pmatrix}$ est non inversible mais aussi non nulle et donc de rang 1. Il en est de même de la matrice $M_a - (1+3a)I_3$.

$$\boxed{\text{Si } a \notin \{0,1\},\ \text{rg}(M_a - (1+3a)I_3) = 2 \text{ et si } a \in \{0,1\},\ \text{rg}(M_a - (1+3a)I_3) = 1.}$$

Dans tous les cas, la matrice $M_a-(1+3a)I_3$ n'est pas inversible et donc $1+3a$ est valeur propre de M_a. D'après le théorème du rang, la dimension du sous-espace propre associé à $1+3a$ (à savoir $\text{Ker}(M_a-(1+3a)I_3)$) vaut $3-\text{rg}(M_a-(1+3a)I_3)$ ou encore 1 si $a \notin \{0,1\}$ et 2 si $a \in \{0,1\}$.

$$\boxed{1+3a \in \text{Sp}(M_a).\ \dim(\text{Ker}(M_a-(1+3a)I_3)) = 1 \text{ si } a \notin \{0,1\} \text{ et } \dim(\text{Ker}(M_a-(1+3a)I_3)) = 2 \text{ si } a \in \{0,1\}.}$$

I.2 $M_aV = \begin{pmatrix} 1 & 1-4a & -1+4a \\ -3a & -1+2a & 2+a \\ -3a & -2-a & 3+4a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = V$. Donc V est un vecteur propre de M_a associé à la valeur propre 1.

• Si $a \neq 0$, $1+3a$ et 1 sont deux valeurs propres distinctes de la matrice M_a. La dernière valeur propre, que l'on note λ, est fournie par la trace de M_a :

$$\text{Tr}(M_a) = 3+6a \Rightarrow 1+(1+3a)+\lambda = 3+6a \Rightarrow \lambda = 1+3a.$$

Dans ce cas, les valeurs propres de M_a sont 1 d'ordre 1 et $1+3a$ d'ordre 2.

• Si $a = 0$, $\dim(\text{Ker}(M_a-(1+3a)I_3)) = \dim(\text{Ker}(M_0 - I_3) = 2$ et donc 1 est valeur propre d'ordre au moins 2. La dernière valeur propre λ de M_0 est encore une fois fournie par la trace de M_0 :

$$\text{Tr}(M_0) = 3 \Rightarrow 1+1+\lambda = 3 \Rightarrow \lambda = 1.$$

Dans ce cas, 1 est valeur propre d'ordre 3 de M_0.

• Si $a \neq 0$, M_a admet 1 pour valeur propre simple et $1+3a$ pour valeur propre d'ordre 2.
• Si $a =$, M_a admet 1 pour valeur propre d'ordre 3.

I.3 a) D'après ce qui précède, dans tous les cas, $\chi_{M_a} = -(X-1)(X-(1+3a))^2$. Par suite, χ_{M_a} est scindé sur $\mathbb{R}$ et donc M_a est trigonalisable (dans $\mathbb{R}$).

b) • Si $a \notin \{0,1\}$, M_a admet 1 pour valeur propre simple et $1+3a$ pour valeur propre double. Mais d'après la question I.1, $\dim(\mathrm{Ker}(M_a - (1+3a)I_3)) = 1 < 2$. On sait alors que M_a n'est pas diagonalisable.

• Si $a = 0$, $M_a = M_0$ admet 1 pour valeur propre triple. Si M_0 était diagonalisable, M_0 serait semblable à $\mathrm{diag}(1,1,1)$ c'est-à-dire I_3 et donc serait égale à I_3. Ceci n'est pas et dans ce cas aussi M_a n'est pas diagonalisable.

• Si $a = 1$, M_a admet 1 pour valeur propre simple et 4 pour valeur propre double. La dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre simple est de toute façon 1. D'autre part, d'après la question I.1, la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 4 est 2. En résumé, χ_{M_1} est scindé sur $\mathbb{R}$ et l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre correspondant. On en déduit que M_1 est diagonalisable.

$\forall a \in \mathbb{R}$, M_a est diagonalisable si et seulement si $a = 1$.

I.4 On a $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ et on sait déjà que $\mathrm{Sp}(A) = (1,4,4)$ et que $\mathrm{Ker}(M_1 - I_3) = \mathrm{Vect}(e_3)$ où $e_3 = V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On sait enfin que M_1 est diagonalisable.

a) Il reste à déterminer $\mathrm{Ker}(M_1 - 4I_3)$. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(M_1 - 4I_3) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ -3 & -3 & 3 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -3x - 3y + 3z = 0 \Leftrightarrow x + y - z = 0.$$

Une base de $\mathrm{Ker}(M_1 - 4I_3)$ est donc (e_1, e_2) où $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On peut prendre $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminons maintenant P^{-1}. Pour cela, notons $\mathscr{B}$ la base (e_1, e_2, e_3) et notons $\mathscr{B}_0 = (i,j,k)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a $P = \mathscr{P}_{\mathscr{B}_0}^{\mathscr{B}}$ et on sait que $P^{-1} = \mathscr{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}_0}$. Or

$$\begin{cases} e_1 = i + k \\ e_2 = j + k \\ e_3 = i + j + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i = e_1 - k \\ j = e_2 - k \\ e_3 = e_1 - k + e_2 - k + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = e_1 + e_2 - e_3 \\ i = -e_2 + e_3 \\ j = -e_1 + e_3 \end{cases}$$

Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$M_1 = PDP^{-1} \text{ où } D = \mathrm{diag}(4,4,1),\ P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soit $D' = \mathrm{diag}(2,2,1)$ puis $R = PD'P^{-1}$. Alors $R^2 = (PD'P^{-1})^2 = PD'^2P^{-1} = PDP^{-1} = M_1$. R est donc une racine carrée de M_1. Plus précisément

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\text{Une racine carrée de } M_1 \text{ est } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.}$$

b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. $\begin{pmatrix} 2\cos\theta & 2\sin\theta \\ 2\sin\theta & -2\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\cos\theta & 2\sin\theta \\ 2\sin\theta & -2\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Donc la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ admet une infinité de racines carrées dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Pour $\theta \in [0, 2\pi[$, posons alors $\Delta_\theta = \begin{pmatrix} 2\cos\theta & 2\sin\theta & 0 \\ 2\sin\theta & -2\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis $R_\theta = P\Delta_\theta P^{-1}$. Un calcul par blocs montre que $\Delta_\theta^2 = \text{diag}(4, 4, 1) = D$ puis que $R_\theta^2 = M_1$. Quand θ décrit $[0, 2\pi[$, les matrices R_θ constituent une infinité de matrices deux à deux distinctes dont le carré vaut M_1. La matrice M_1 admet donc une infinité de racines carrées dans $\mathbb{R}$.

I.5 $N = M_0 - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Par suite,

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{N^2 = 0.}$$

Soit alors $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Puisque les matrices αI_3 et βN commutent,

$$(\alpha I_3 + \beta N)^2 = \alpha^2 I_3 + 2\alpha\beta N + \beta^2 N^2 = \alpha^2 I_3 + 2\alpha\beta(M - I_3) = 2\alpha\beta M + (\alpha^2 - 2\alpha\beta)I_3.$$

Mais alors

$$(\alpha I_3 + \beta N)^2 = M \Leftarrow \left\{\begin{array}{l} 2\alpha\beta = 1 \\ \alpha^2 - 2\alpha\beta = 0 \end{array}\right. \Leftarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha^2 = 1 \\ 2\alpha\beta = 1 \end{array}\right. \Leftarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. .$$

$$\boxed{\left(I_3 + \frac{1}{2}N\right)^2 = M_0.}$$

I.6 a) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$M_{-\frac{1}{3}}X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 7/3 & -7/3 \\ 1 & -5/3 & 5/3 \\ 1 & -5/3 & 5/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + \frac{7}{3}y - \frac{7}{3}z = 0 \\ x - \frac{5}{3}y + \frac{5}{3}z = 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\frac{7}{3}y + \frac{7}{3}z \\ -\frac{7}{3}y + \frac{7}{3}z - \frac{5}{3}y + \frac{5}{3}z = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\frac{7}{3}y + \frac{7}{3}z \\ -4y + 4z = 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = y + \dfrac{1}{4} \\ x = \dfrac{7}{12} \end{array}\right.$$

Donc, en notant $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation $M_{-\frac{1}{3}}X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\begin{pmatrix} 7/12 \\ y \\ y + 1/4 \end{pmatrix},\ y \in \mathbb{R}\right\}.}$$

b) On cherche une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que $f_{-\frac{1}{3}}(e_1) = 0$, $f_{-\frac{1}{3}}(e_3) = e_3$ et $f_{-\frac{1}{3}}(e_2) = e_1$. D'après la question I.2, on peut prendre $e_3 = (1, 1, 1)$. D'autre part, avec l'idée sous-jacente contenue dans la question précédente

$$M_{-\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7/3 & -7/3 \\ 1 & -5/3 & 5/3 \\ 1 & -5/3 & 5/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On peut donc prendre $e_1 = (0, 1, 1)$. Enfin, d'après la question précédente, on peut prendre $e_2 = (\frac{7}{12}, 0, \frac{1}{4})$. Vérifions alors que la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela calculons le déterminant Δ de cette famille dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 7/12 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1/4 & 1 \end{vmatrix} = -(\frac{7}{12} - \frac{1}{4}) + \frac{7}{12} = \frac{1}{4} \neq 0.$$

La famille (e_1, e_2, e_3) est donc bien une base de $\mathbb{R}^3$ et la matrice de $f_{-\frac{1}{3}}$ dans cette base a bien la forme désirée.

c) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
MU = UM &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & d & f \\ 0 & g & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} d = f = g = 0 \\ a = e \\ f = c \\ g = h \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} d = f = g = c = h = 0 \\ a = e \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Les matrices commutant avec U sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ (en renommant c la lettre i).

Montrons alors que U ne possède pas de racine carrée dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Soit $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une éventuelle racine carrée de U dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Nécessairement

$$RU = RR^2 = R^3 = R^2R = UR.$$

Une éventuelle racine carrée de U doit donc commuter avec U et d'après ce qui précède, R est de la forme $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ où a, b et c sont trois réels. Mais

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}.$$

Si maintenant $R^2 = U$ alors on doit avoir $a^2 = 0$ et $2ab = 1$ ce qui est impossible. Donc

$$\boxed{U \text{ ne possède pas de racine carrée dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).}$$

d) Il existe $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}M_{-\frac{1}{3}}P = U$. Soit alors $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ puis $R' = P^{-1}RP$.

$$R^2 = M_{-\frac{1}{3}} \Leftrightarrow P^{-1}R^2P = P^{-1}M_{-\frac{1}{3}}P \Leftrightarrow (P^{-1}RP)^2 = P^{-1}M_{-\frac{1}{3}}P \Leftrightarrow R'^2 = U.$$

Mais d'après la question c), U ne possède pas de racine carrée dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Donc

$$\boxed{M_{-\frac{1}{3}} \text{ ne possède pas de racine carrée dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).}$$

PARTIE II

II.1 **a)** Soient $(P, Q) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$\varphi(\lambda P+\mu Q) = (\lambda P(a_1)+\mu Q(a_1), \dots, \lambda P(a_n)+\mu Q(a_n)) = \lambda(P(a_1), \dots, P(a_n))+\mu(Q(a_1), \dots, Q(a_n)) = \lambda\varphi(P)+\mu\varphi(Q)$.

Donc, φ est une application linéaire.

Déterminons alors alors $\text{Ker}(\varphi)$. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Si P est dans $\text{Ker}(\varphi)$, P s'annule en les n réels deux à deux distincts $a_1,\dots, a_n$ et puisque $\deg(P) \leq n-1$, on en déduit que $P = 0$. Finalement

$$\boxed{\varphi \text{ est une application linéaire injective.}}$$

b) Comme de plus $\dim(\mathbb{R}_{n-1}[X]) = \dim(\mathbb{R}^n) = n < +\infty$, φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ sur $\mathbb{R}^n$. Par suite, pour tout n-uplet $(b_1, \dots, b_n)$ de réels, il existe un polynôme Q et un seul, de degré au plus $n-1$ tel que $\varphi(Q) = (b_1, \dots, b_n)$ ou encore tel que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ Q(a_i) = b_i$.

II.2 **a)** Soient λ une valeur propre de f puis E_λ le sous-espace propre associé. Soit $x \in E_\lambda$. Montrons que $g(x) \in E_\lambda$.

$$f(g(x)) = g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x).$$

Ainsi, l'image par g d'un vecteur de E_λ est encore un vecteur de E_λ.

$$\boxed{\text{Les sous-espaces propres de } f \text{ sont stables par } g.}$$

b) Soit $i \in [\![1, p]\!]$. La question précédente montre que g_i est effectivement un endomorphisme de E_{λ_i}.
g est diagonalisable. Donc il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples tel que $P(g) = 0$. Mais alors, on a $P(g_i) = 0$ et g_i est diagonalisable. Par suite, il existe $\mathcal{B}_i$ base de E_{λ_i} constituée de vecteurs propres de g. Les vecteurs de $\mathcal{B}_i$ (étant dans E_{λ_i}) sont aussi des vecteurs propres de f.

Puisque f est diagonalisable, on a $E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$. Par suite, la famille $\mathcal{B}$ obtenue en réunissant les bases $\mathcal{B}_i$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Par construction, les vecteurs de $\mathcal{B}$ sont des vecteurs propres de f et g simultanément ou encore les matrices de f et g dans $\mathcal{B}$ sont toutes deux diagonales.

II.3 Soient f (respectivement g) l' endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ est A (respectivement B). f et g sont deux endomorphismes diagonalisables tels que $f \circ g = g \circ f$. On en déduit qu'il existe $\mathcal{B}$ base de $\mathbb{R}^n$ telle que les matrices de f et g soient diagonales. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$. Par construction, les matrices $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ sont diagonales.

II.4 Puisque S est symétrique réelle, on sait que les valeurs propres de S sont toutes réelles.

a) • Supposons S positive. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de S puis X un vecteur propre associé.

$${}^tXSX = {}^tX(\lambda X) = \lambda {}^tXX = \lambda\|X\|_2^2.$$

Par hypothèse, ${}^tXSX \geq 0$ ou encore $\lambda\|X\|_2^2 \geq 0$. Mais $X \neq 0$ et donc $\|X\|_2^2 > 0$. On en déduit que $\lambda \geq 0$.
Ainsi, toute valeur propre de S est un réel positif.

• Supposons que les valeurs propres $\lambda_1,\dots, \lambda_n$ soient toutes des réels positifs. D'après le théorème spectral, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $S = PD{}^tP$ où $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Soient $X = (x_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ puis $X' = {}^tPX = (x'_i)_{1\leq i\leq n}$.

$${}^tXSX = {}^tXPD{}^tPX = {}^t({}^tPX)D{}^tPX = {}^tX'DX' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i'^2 \geq 0.$$

La matrice S est donc positive.

$$\boxed{\forall S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ (S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \text{Sp}(S) \subset \mathbb{R}^+).}$$

b) On affine les démonstrations précédentes.
• Supposons que S est définie positive. Si λ est une valeur propre de S et X est un vecteur propre associé, on a $\lambda\|X\|_2^2 > 0$ avec $\|X\|_2^2 > 0$ et donc $\lambda > 0$.
• Supposons que les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ soient toutes des réels strictement positifs. Si X est un vecteur colonne non nul, $X' = {}^tPX$ est encore non nul puisque P est inversible et donc il existe i_0 tel que $x'_{i_0} \neq 0$. Mais alors

$$ {}^tXSX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i'^2 \geq \lambda_{i_0} x_{i_0}'^2 > 0. $$

La matrice S est donc définie positive.

$$ \boxed{\forall S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ (S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}^{+*}).} $$

II.5 **a)** On applique le résultat de la question II.1.b) au cas $n = p$, $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $a_i = \lambda_i$ et $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $b_i = \sqrt{\lambda_i}$.

b) • On a ${}^t(Q(S)) = Q({}^tS) = Q(S)$ et la matrice $Q(S)$ est symétrique.
• Notons $\mu_1, \ldots, \mu_n$ les n valeurs propres de S non nécessairement deux à deux distinctes. On écrit de nouveau $S = PDP^{-1}$ où $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$. On a

$$ Q(S) = Q(PD{}^tP) = PQ(D){}^tP = P\mathrm{diag}(Q(\mu_1), \ldots, Q(\mu_n)){}^tP = P\mathrm{diag}(\sqrt{\mu_1}, \ldots, \sqrt{\mu_n}){}^tP. $$

Les valeurs propres de $Q(S)$ sont les $\sqrt{\mu_i}$ et sont donc toutes des réels positifs. D'après la question II.4.a), on peut affirmer que

$$ \boxed{Q(S) \text{ est symétrique positive.}} $$

c) Avec les notations de la question précédente,

$$ (Q(S))^2 = (P\mathrm{diag}(\sqrt{\mu_1}, \ldots, \sqrt{\mu_n}){}^tP)^2 = P\mathrm{diag}(\sqrt{\mu_1}, \ldots, \sqrt{\mu_n})^2{}^tP = P\mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n){}^tP = S. $$

$$ \boxed{(Q(S))^2 = S.} $$

d) $TS = TT^2 = T^3 = T^2T = ST$ et donc T commute avec S. Mais alors T commute avec tout polynôme en S et en particulier avec $Q(S)$.
Par suite, T et $Q(S)$ sont deux matrices diagonalisables qui commutent. D'après la question II.3, ces deux matrices sont simultanément diagonalisables. Donc il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$ puis D et D' matrices diagonales, à coefficients diagonaux positifs, telles que $Q(S) = PD{}^tP$ et $T = PD'{}^tP$. Les égalités $T^2 = (Q(S))^2 = S$ fournissent $PD^{2t}PPD'^{2t}P$ puis $D^2 = D'^2$ puis $D = D'$ (car les coefficients diagonaux de D et D' sont positifs) et finalement $T = Q(S)$.

$$ \boxed{\forall S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}),\ \exists! S' \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) /\ S'^2 = S.} $$

e) D'après ce qui précède, $\sqrt{S} = Q(S)$ où Q est le polynôme de degré au plus 1 tel que $Q(\lambda_1) = \sqrt{\lambda_1}$ et $Q(\lambda_2) = \sqrt{\lambda_2}$. En posant $Q = aX + b$, on a d'après les formules de Cramer

$$ \left\{\begin{array}{l} Q(\lambda_1) = \sqrt{\lambda_1} \\ Q(\lambda_2) = \sqrt{\lambda_2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a\lambda_1 + b = \sqrt{\lambda_1} \\ a\lambda_2 + b = \sqrt{\lambda_2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ b = \dfrac{\lambda_1\sqrt{\lambda_2} - \lambda_2\sqrt{\lambda_1}}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2}}{(\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2})(\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2})} \\ b = \dfrac{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}(\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2})}{(\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2})(\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2})} \end{array}\right. $$

$$ \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}} \\ b = \dfrac{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}} \end{array}\right. $$

Donc $Q = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}}(X + \sqrt{\lambda_1\lambda_2})$ et finalement

$$ \boxed{\sqrt{S} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}}(S + \sqrt{\lambda_1\lambda_2}I_n).} $$

II.6 a) S^2 est symétrique. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la famille des valeurs propres de S. Alors la famille des valeurs propres de S^2 est $(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2)$. Ces valeurs propres sont toutes des réels positifs et donc S^2 est positive.

$$\boxed{\forall S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ S^2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}).}$$

b) Posons $S = PD^tP$ où P est une matrice orthogonale et $D = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ est une matrice diagonale réelle. La matrice $S' = P\text{diag}(|\mu_1|, \dots, |\mu_n|)^tP$ est symétrique positive car orthogonalement semblable à une matrice diagonale à coefficients diagonaux positifs. De plus

$$S'^2 = P\text{diag}(|\mu_1|, \dots, |\mu_n|)^{2\,t}P = P\text{diag}(\mu_1^2, \dots, \mu_n^2)^tP = S^2.$$

Par unicité de la racine carrée d'une matrice symétrique positive, on a donc

$$|S| = \sqrt{S^2} = S' = P\text{diag}(|\mu_1|, \dots, |\mu_n|)^tP.$$

mais alors

$$|S| + S = P\text{diag}(|\mu_1| + \mu_1, \dots, |\mu_n| + \mu_n)^tP \text{ et } |S| - S = P\text{diag}(|\mu_1| - \mu_1, \dots, |\mu_n| - \mu_n)^tP.$$

Maintenant les nombres $|\mu_i| + \mu_i$ et $|\mu_i| - \mu_i$ sont tous des réels positifs et donc les matrices $|S| + S$ et $|S| - S$ sont orthogonalement semblables à des matrices diagonales à coefficients diagonaux positifs. On en déduit que ces matrices sont symétriques positives.

$$\boxed{\forall S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ |S| + S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \text{ et } |S| - S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}).}$$

c) $S_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$ et $S_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$. Ces deux matrices ont même trace et même déterminant et donc même polynôme caractérique à savoir $X^2 - 20X + 64$. S_1 et S_2 ont donc les mêmes valeurs propres à savoir $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = 16$. La formule de la question II.5.e) fournit alors

$$|S_1| = \sqrt{S_1^2} = \frac{1}{2+4}(S_1^2 + 8I_3) = \frac{1}{6}\left(\begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 18 & 6 \\ 6 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

et de même

$$|S_2| = \frac{1}{6}\left(\begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{|S_1| = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } |S_2| = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.}$$

PARTIE III

III.1 Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, a_k et b_k existent et sont strictement positifs.

- Le résultat est vrai pour $k = 0$.
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que a_k et b_k existent et sont strictement positifs. Alors $a_{k+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_k + \dfrac{1}{b_k}\right)$ et $b_{k+1} = \dfrac{1}{2}\left(b_k + \dfrac{1}{a_k}\right)$ existent et sont strictement positifs.

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{Les suites } (a_k) \text{ et } (b_k) \text{ sont définies et strictement positives.}}$$

III.2 **a)** Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$v_{k+1} = \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} = \frac{\frac{1}{2}\left(a_k + \frac{1}{b_k}\right)}{\frac{1}{2}\left(b_k + \frac{1}{a_k}\right)} = \frac{a_k}{b_k}.$$

La suite $\left(\frac{a_k}{b_k}\right)$ est donc constante. On en déduit que pour $k \in \mathbb{N}$, $\frac{a_k}{b_k} = \frac{a_0}{b_0} = a$.

$$\boxed{\text{La suite } \left(\frac{a_k}{b_k}\right) \text{ est constante et donc } \forall k \in \mathbb{N},\ a_k = a \times b_k.}$$

b) Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$u_{k+1} = \frac{1}{4}\left(a_k + \frac{1}{b_k}\right)\left(b_k + \frac{1}{a_k}\right) = \frac{1}{4}\left(a_k b_k + 2 + \frac{1}{a_k b_k}\right) = \frac{1}{4}\left(u_k + 2 + \frac{1}{u_k}\right).$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ u_{k+1} = \frac{1}{4}\left(u_k + 2 + \frac{1}{u_k}\right).}$$

c) Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$u_k + \frac{1}{u_k} - 2 = \frac{1}{u_k}(u_k^2 - 2u_k + 1) = \frac{(u_k - 1)^2}{u_k} \geq 0.$$

ce qui montre que $u_k + \frac{1}{u_k} \geq 2$. Par suite,

$$u_{k+1} = \frac{1}{4}\left(u_k + 2 + \frac{1}{u_k}\right) \geq \frac{1}{4}(2+2) = 1.$$

On a montré que pour tout entier k, $u_{k+1} \geq 1$ ou encore que

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k \geq 1.}$$

d) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Puisque $u_k \geq 1$, on a

$$u_{k+1} - u_k = \frac{1}{4}\left(u_k + 2 + \frac{1}{u_k}\right) - u_k = \frac{1}{4}\left(-3u_k + 2 + \frac{1}{u_k}\right) = \frac{1}{4u_k}(-3u_k^2 + 2u_k + 1) = \frac{(u_k - 1)(-3u_k - 1)}{4u_k} \leq 0.$$

Ainsi, la suite (u_k) est décroissante à partir du rang 1. Etant minorée par 1, elle converge vers un réel ℓ supérieur ou égal à 1.

Par passage à la limite quand k tend vers $+\infty$ dans l'égalité $u_{k+1} = \frac{1}{4}\left(u_k + 2 + \frac{1}{u_k}\right)$, on obtient $\ell = \frac{1}{4}\left(\ell + 2 + \frac{1}{\ell}\right)$ puis $3\ell^2 - 2\ell - 1 = 0$ puis $\ell \in \{1, -\frac{1}{3}\}$ et finalement $\ell = 1$ (puisque $\ell \geq 1$).

$$\boxed{\text{La suite } (u_k) \text{ converge et } \lim_{k \to +\infty} u_k = 1.}$$

III.3 On sait que $\forall k \in \mathbb{N},\ a_k = a \times b_k$ et donc $\forall k \in \mathbb{N},\ u_k = a \times b_k^2$ ou encore, puisque la suite (b_k) est positive

$$\forall k \in \mathbb{N},\ b_k = \sqrt{\frac{u_k}{a}} \text{ et } a_k = a \times b_k.$$

Puisque la suite (u_k) converge vers 1, on en déduit que la suite (b_k) converge vers $\frac{1}{\sqrt{a}}$ puis que la suite (a_k) converge vers $\sqrt{a}$.

$$\boxed{\text{Les suites } (a_k) \text{ et } (b_k) \text{ convergent et } \lim_{k\to+\infty} a_k = \sqrt{a} \text{ et } \lim_{k\to+\infty} b_k = \frac{1}{\sqrt{a}}.}$$

III.4 **a)** Si S est une matrice symétrique définie positive, 0 n'est pas valeur propre de S et donc S est inversible.

$$\boxed{\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}).}$$

b) Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. ${}^t(S^{-1}) = ({}^tS)^{-1} = S^{-1}$ et donc S^{-1} est une matrice symétrique. D'autre part, si $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est la famille des valeurs propres de S, on sait que la famille des valeurs propres de S^{-1} est $\left(\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}\right)$. Ainsi, les valeurs propres de S^{-1} sont tous des réels strictement positifs et d'après la question II.4.b), S^{-1} est définie positive.

$$\boxed{\forall S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}),\ S^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}).}$$

c) Soient $(S, S') \in (\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}))^2$. On sait que $S + S'$ est symétrique. D'autre part, pour X vecteur colonne non nul donné,

$${}^tX(S + S')X = {}^tXSX + {}^tXS'X > 0.$$

Par suite, $S + S'$ est une matrice symétrique définie positive.

$$\boxed{\forall (S, S') \in (\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}))^2,\ S + S' \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}).}$$

III.5 Montrons par récurrence que pour tout entier naturel k, les matrices A_k et B_k sont symétriques définies positives.

- Le résultat est vrai pour $k = 0$ puisque les matrices A et I_n sont symétriques définies positives.
- Soit $k \geq 0$. Supposons que les matrices A_k et B_k sont symétriques définies positives. Alors d'après la question III.4.b), les matrices A_k^{-1} et B_k^{-1} sont symétriques définies positives puis d'après la question III.4.c), les matrices $A_k + B_k^{-1}$ et $B_k + A_k^{-1}$ sont symétriques définies positives. Il en est de même des matrices A_{k+1} et B_{k+1}.

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ A_k \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ et } B_k \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}).}$$

III.6 **a)** D est diagonale et donc symétrique. Les valeurs propres de D sont les valeurs propres de A et sont donc des réels strictement positifs. La matrice D est donc une matrice symétrique définie positive.

b) On a déjà $D_0 = P^{-1}AP = D$ et $\Delta_0 = P^{-1}I_nP = I_n$. Ensuite, pour $k \in \mathbb{N}$, les matrices A_k et B_k sont symétriques définies positives et en particulier inversibles d'après la question III.4.a). On en déduit que les matrices D_k et Δ_k sont inversibles. Pour $k \in \mathbb{N}$, on a alors

$$D_{k+1} = P^{-1}A_{k+1}P = P^{-1} \times \frac{1}{2}(A_k + B_k^{-1})P = \frac{1}{2}(P^{-1}A_kP + (P^{-1}B_kP)^{-1}) = \frac{1}{2}(D_k + \Delta_k^{-1}),$$

et de même

$$\Delta_{k+1} = \frac{1}{2}(\Delta_k + D_k^{-1}).$$

Enfin, montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, D_k et Δ_k sont des matrices diagonales.

- C'est vrai pour $k = 0$.
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que les matrices D_k et Δ_k sont diagonales. Alors, D_k^{-1} et Δ_k^{-1} sont diagonales puis $\frac{1}{2}(D_k + \Delta_k^{-1}) = D_{k+1}$ et $\frac{1}{2}(\Delta_k + D_k^{-1}) = \Delta_{k+1}$ sont des matrices diagonales.

Le résultat est démontré par récurrence.

c) Pour $k \in \mathbb{N}$, posons $D_k = \text{diag}(a_1(k), \ldots, a_n(k))$ et $\Delta_k = \text{diag}(b_k(1), \ldots, b_k(n))$. Posons aussi $D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Les suites $(a_k(i))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k(i))_{k\in\mathbb{N}}$ vérifient

$$a_0(i) = \lambda_i \text{ et } b_0(i) = 1,$$
$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_{k+1}(i) = \frac{1}{2}\left(a_k(i) + \frac{1}{b_k(i)}\right) \text{ et } b_{k+1}(i) = \frac{1}{2}\left(b_k(i) + \frac{1}{a_k(i)}\right).$$

D'après la question III.3, la suite $(a_k(i))$ converge vers $\sqrt{a_0(i)} = \sqrt{\lambda_i}$ et la suite $(b_k(i))$ converge vers $\dfrac{1}{\sqrt{a_0(i)}} = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$.

On en déduit que la suite (D_k) converge vers $\text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}) = \sqrt{D}$ et que la suite (Δ_k) converge vers $\text{diag}(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \ldots, \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_n}}) = \left(\sqrt{D}\right)^{-1}$.

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} D_k = \sqrt{D} \text{ et } \lim_{k\to+\infty} \Delta_k = \left(\sqrt{D}\right)^{-1}.}$$

III.7 **a)** L'application $\psi\ :\ M \mapsto PMP^{-1}$ est un endomorphisme de l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie sur $\mathbb{R}$. On sait alors que l'application ψ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Pour $k \in \mathbb{N}$, on a $A_k = PD_kP^{-1} = \psi(D_k)$ et $B_k = \psi(\Delta_k)$. Puisque la suite (D_k) converge et que l'application ψ est continue, la suite (A_k) converge et

$$\lim_{k\to+\infty} A_k = \lim_{k\to+\infty} \psi(D_k) = \psi(\lim_{k\to+\infty} D_k) = \psi(\sqrt{D}) = P\sqrt{D}P^{-1} = \sqrt{A},$$

et de même $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} B_k = \left(\sqrt{A}\right)^{-1}$.

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} A_k = \sqrt{A} \text{ et } \lim_{k\to+\infty} B_k = \left(\sqrt{A}\right)^{-1}.}$$

