SESSION 2007

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE MP

MATHEMATIQUES 2

I. Description des normes euclidiennes

1. Identité du parallélogramme

a. Soit N une norme euclidienne sur E et φ le produit scalaire associé. Pour $(x,y)\in E^2$,

$$\begin{aligned}(N(x+y))^2+(N(x-y))^2&=\varphi(x+y,x+y)+\varphi(x-y,x-y)\\&=\varphi(x,x)+2\varphi(x,y)+\varphi(y,y)+\varphi(x,x)-2\varphi(x,y)+\varphi(y,y)=2\left[\varphi(x,x)+\varphi(y,y)\right]\\&=2\left[(N(x))^2+(N(y))^2\right].\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si } N \text{ est une norme euclidienne, } N \text{ vérifie l'identité du parallélogramme.}}$$

Notons $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ puis prenons $x=e_1$ et $y=e_2$ (ce qui est possible puisque $n\geq 2$). On a $\|x+y\|_\infty^2+\|x-y\|_\infty^2=\|e_1+e_2\|_\infty^2+\|e_1-e_2\|_\infty^2=1^2+1^2=2$ et $2\left[\|e_1\|_\infty^2+\|e_2\|_\infty^2\right]=2(1^2+1^2)=4$ et en particulier $\|x+y\|_\infty^2+\|x-y\|_\infty^2\neq 2\left[\|e_1\|_\infty^2+\|e_2\|_\infty^2\right]$. Ainsi,

$$\exists (x,y)\in E^2/\ \|x+y\|_\infty^2+\|x-y\|_\infty^2\neq 2\left[\|x\|_\infty^2+\|y\|_\infty^2\right],$$

et donc $\|\ \|_\infty$ ne vérifie pas l'identité du parallélogramme. On en déduit que

$$\boxed{\|\ \|_\infty \text{ n'est pas une norme euclidienne.}}$$

b. $\|\ \|_2$ est la norme associée au produit scalaire canonique $<.,.>$ et est donc une norme euclidienne. Réciproquement, soit p un réel strictement supérieur à 1.

$$\begin{aligned}\|\ \|_p \text{ est une norme euclidienne} &\Rightarrow \|e_1+e_2\|_p^2+\|e_1-e_2\|_p^2=2(\|e_1\|_p^2+\|e_2\|_p^2)\\&\Rightarrow 2\times(1^p+1^p)^{2/p}=2\times(1+1)\Rightarrow 2^{2/p}=2\Rightarrow\frac{2}{p}=1\Rightarrow p=2.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall p\in]1,+\infty],\ \|\ \|_p \text{ est une norme euclidienne si et seulement si } p=2.}$$

2. Soit $S\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
- Pour $(x,y)\in E^2$, la matrice ${}^tYSX$ est de format $(1,1)$ et donc $<y,x>_S={}^tYSX={}^t({}^tYSX)={}^tX{}^tSY={}^tXSY=<x,y>_S$. Donc $<.,.>_S$ est une forme symétrique.
- $<.,.>_S$ est linéaire par rapport à sa deuxième variable et donc bilinéaire par symétrie.
- Pour $x\in E\setminus\{0\}$, $<x,x>_S={}^tXSX>0$ et donc $<.,.>_S$ est définie positive.

En résumé, $<.,.>_S$ est une forme bilinéaire, symétrique, définie et positive sur E et donc

$$\boxed{<.,.>_S \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

3. Soit $(x,y)\in E^2$.

$$\begin{aligned}{}^tXSY&={}^t(x_i)_{1\leq i\leq n}\times(\varphi(e_i,e_j))_{1\leq i,j\leq n}\times(y_j)_{1\leq j\leq n}\\&=\sum_{1\leq i,j\leq n}x_iy_j\varphi(e_i,e_j)=\varphi(\sum_{i=1}^n x_ie_i,\sum_{j=1}^n y_je_j)=\varphi(x,y).\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (x,y)\in E^2,\ \varphi(x,y)={}^tXSY.}$$

Puisque la forme φ est symétrique, pour $(i,j)\in [\![1,n]\!]^2$, $s_{i,j}=\varphi(e_i,e_j)=\varphi(e_j,e_i)=s_{j,i}$ et donc $S\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. De plus, pour $X\in M_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$, ${}^tXSX=\varphi(x,x)>0$ et finalement

$$\boxed{S\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}).}$$

II. Quelques généralités et exemples

4. • Soit $u\in$ ISOM(N). Pour $x\in E$, $u(x)=0\Rightarrow N(u(x))=0\Rightarrow N(x)=0\Rightarrow x=0$. Par suite, $\text{Ker}(u)=\{0\}$ et puisque $\dim(E)<+\infty$, u est un automorphisme de E. On a ainsi vérifié que $\text{ISOM}(N)\subset GL(E)$.
• Pour tout x de E, on a $N(Id_E(x))=N(x)$ ce qui montre que $Id_E\in\text{ISOM}(N)$ et en particulier que $\text{ISOM}(N)\neq\varnothing$.
• Soit $(u,v)\in(\text{ISOM}(N))^2$. Pour $x\in E$, $N(u\circ v-1(x))=N(u(v^{-1}(x)))=N(v^{-1}(x))=N(v(v^{-1}(x)))=N(x)$ et donc $u\circ v^{-1}\in\text{ISOM}(N)$.

On a montré que

$$\boxed{\text{ISOM}(N)\text{ est un sous-groupe de }(GL(E),\circ).}$$

5. Soit $u\in\mathcal{L}(E)$.
• Supposons que $u(\Sigma(N))=\Sigma(N)$. Soit $x\in E$.

Si $x=0$, on a $N(u(x))=0=N(x)$ et si $x\neq 0$, puisque $\dfrac{x}{N(x)}\in\Sigma(N)$ on a aussi $u\left(\dfrac{x}{N(x)}\right)\in\Sigma(N)$. Ceci fournit

$$N(u(x))=N(x)\times N\left(\frac{1}{N(x)}u(x)\right)=N(x)\times N\left(u\left(\frac{x}{N(x)}\right)\right)=N(x)\times 1=N(x).$$

Ainsi, pour tout x de E, $N(u(x))=N(x)$ et donc $u\in\text{ISOM}(N)$.
• Réciproquement, supposons que $u\in\text{ISOM}(N)$. Soit $x\in\Sigma(N)$. $N(u(x))=N(x)=1$. Ainsi, pour tout x de $\Sigma(N)$, $u(x)\in\Sigma(N)$ et donc $u(\Sigma(N))\subset\Sigma(N)$. Mais d'après la question précédente, on a aussi $u^{-1}\in\text{ISOM}(N)$ et donc aussi $u^{-1}(\Sigma(N))\subset\Sigma(N)$. On en déduit que $u(u^{-1}(\Sigma(N)))\subset u(\Sigma(N))$ ou encore $\Sigma(N)\subset u(\Sigma(N))$ et finalement $u(\Sigma(N))=\Sigma(N)$.

$$\boxed{\forall u\in\mathcal{L}(E),\ u\in\text{ISOM}(N)\Leftrightarrow u(\Sigma(N))=\Sigma(N).}$$

6. Pour $(a,b)\in\mathbb{R}^2$,

$$\|s(ae_1+be_2)\|_1=\|-be_1-ae_2\|_1=|-b|+|-a|=|a|+|b|=\|ae_1+be_2\|_1.$$

Par suite, $s\in\text{ISOM}(\|\ \|_1)$.

D'autre part $r(e_1)=\dfrac{1}{2}e_1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}e_2$ et donc $\|r(e_1)\|_1=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\neq 1=\|e_1\|_1$. Donc $r\notin\text{ISOM}(\|\ \|_1)$.

$$\boxed{s\in\text{ISOM}(\|\ \|_1)\text{ et }r\notin\text{ISOM}(\|\ \|_1).}$$

7. a. $S=\begin{pmatrix}3&0&-1\\0&2&0\\-1&0&3\end{pmatrix}$.

b. S est symétrique réelle et donc, d'après le théorème spectral, orthogonalement semblable à une matrice diagonale réelle.
• $\chi_S=\begin{vmatrix}3-X&0&-1\\0&2-X&0\\-1&0&3-X\end{vmatrix}=(3-X)(2-X)(3-X)-(2-X)=(2-X)((X-3)^2-1)=-(X-2)^2(X-4)$. Donc S est orthogonalement semblable à $D=\text{diag}(2,2,4)$.
• $\text{Ker}(S-2I_3)$ est le plan d'équation $x=z$. Une base orthonormée (pour le produit scalaire usuel) de ce plan est $(\dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1+e_3),e_2)$. $\text{Ker}(S-4I_3)$ est l'othogonal du plan précédent et donc la droite vectorielle engendrée par $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1+e_3)\wedge e_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-e_1+e_3)$.

$$\boxed{S = PD{}^tP \text{ avec } D = \mathrm{diag}(2,2,4) \text{ et } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.}$$

c. D'après la question 3., il suffit de vérifier que $S \in \mathcal{S}_n{++}(\mathbb{R})$.
Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ Posons $X' = {}^tPX = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. On a alors

$${}^tXSX = {}^tXPD{}^tP = {}^t({}^tPX)D({}^tPX) = {}^tX'DX' = 2x'^2 + 2y'^2 + 4z'^2 \geq 0.$$

De plus

$${}^tXSX = 0 \Rightarrow 2x'^2 + 2y'^2 + 4z'^2 = 0 \Rightarrow x' = y' = z' = 0 \Rightarrow X' = 0 \Rightarrow X = PX' = 0.$$

Ainsi, si $X \neq 0$, ${}^tXSX > 0$. Ceci montre que $S \in \mathcal{S}_{++}(\mathbb{R})$ et donc que

$$\boxed{N_q \text{ est une norme euclidienne.}}$$

d. Soit $(x,y,z) \in E$. Avec les notations de la question précédente

$$(x,y,z) \in \Sigma(N_q) \Leftrightarrow q(x,y,z) = 1 \Leftrightarrow 2x'^2 + 2y'^2 + 4z'^2 = 1.$$

On reconnaît l'équation réduite d'un ellipsoïde.

$$\boxed{\Sigma(N_q) \text{ est un ellipsoïde.}}$$

e. De plus, puisque les coefficients de x'^2 et y'^2 sont égaux, cet ellipsoïde est un ellipsoïde de révolution d'axe dirigé par $e'_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-e_1 + e_3)$.

$$\boxed{\Sigma(N_q) \text{ est un ellipsoïde de révolution d'axe dirigé par } -e_1 + e_3.}$$

f. Toute rotation d'axe $-e_1 + e_3$ laisse globalement invariante $\Sigma(N_q)$. Mais alors, d'après la question 5., toute rotation d'axe $-e_1 + e_3$ est dans $\mathrm{ISOM}(N_q)$ ce qui montre que

$$\boxed{\mathrm{card}(\mathrm{Isom}(N_q)) = +\infty.}$$

III. Étude de ISOM(N) lorsque N est une norme euclidienne

8. Caractérisation matricielle des isométries euclidiennes

a. • Si $\forall (x,y) \in E^2$, $< u(x), u(y) >_S = < x, y >_S$ alors en particulier $\forall x \in E$, $N_S(u(x)) = \sqrt{< u(x), u(x) >_S} = \sqrt{< x, x >_S} = N_S(x)$ et u est une N_S-isométrie.
• Réciproquement, supposons que u soit une N_S-isométrie. D'après les identités de polarisation, pour $(x,y) \in E^2$ on a

$$< u(x), u(y) >_S = \frac{1}{4}(< u(x+y), u(x+y) >_S - < u(x-y), u(x-y) >_S) = \frac{1}{4}((N_q(u(x+y))^2 - (N_q(u(x-y))^2) = \frac{1}{4}((N_q(x+y)^2 - (N_q(x-y)^2) = \frac{1}{4}(< x+y, x+y >_S - < x-y, x-y >_S) = < x, y >_S.$$

$$\boxed{\forall u \in \mathcal{L}(E),\ u \in \mathrm{ISOM}(N_S) \Leftrightarrow \forall (x,y) \in E^2,\ < u(x), u(y) >_S = < x, y >_S.}$$

b. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

$$\begin{aligned} u \in \mathrm{ISOM}(N_S) &\Leftrightarrow \forall (x,y) \in E^2,\ < u(x), u(y) >_S = < x, y >_S \\ &\Leftrightarrow \forall (X,Y) \in (M_{3,1}(\mathbb{R}),\ {}^t(AX)S(AY) = {}^tXSY \Leftrightarrow \forall (X,Y) \in (M_{3,1}(\mathbb{R}),\ {}^tX({}^tASA)Y = {}^tXSY \Leftrightarrow {}^tASA = S. \end{aligned}$$

La dernière équivalence s'obtient par exemple en appliquant l'égalité ${}^tX({}^tASA)Y = {}^tXAY$ à $X = e_i$ et $Y = e_j$.

$$\boxed{\forall u \in \mathcal{L}(E),\ u \in \text{ISOM}(N_S) \Leftrightarrow {}^tASA = S.}$$

9. La matrice S associée à la norme euclidienne $\|\ \|_2$ est la matrice I_n. L'égalité ${}^tASA = S$ s'écrit plus particulièrement ${}^tAA = I_2$ et signifie que A est une matrice orthogonale. Donc

$$\boxed{\text{ISOM}(\|\ \|_2) = O_n(\mathbb{R}).}$$

On sait que $O_n(\mathbb{R})$ est infini ($O_n(\mathbb{R})$ contient par exemple les matrices de la forme $\begin{pmatrix} R_\theta & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & I_{n-2} \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$ où $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$) et donc

$$\boxed{\text{card}(\text{Isom}(\|\ \|_2)) = +\infty.}$$

10. Une application des polynômes interpolateurs

a. Soit $P \in \mathbb{R}_r[X]$. Si $P \in \text{Ker}(u)$, P est de degré au plus r et s'annule en les $r+1$ réels deux à deux distincts $x_0, \ldots, x_r$ et on sait que $P = 0$.

$$\boxed{\text{Ker}(u) = \{0\}.}$$

Ainsi u est une application linéaire injective de $\mathbb{R}_r[X]$ dans $\mathbb{R}^{r+1}$. Comme de plus $\dim(\mathbb{R}_r[X]) = \dim(\mathbb{R}^{r+1}) = r+1 < +\infty$, on sait que u est un isomorphisme de $\mathbb{R}_r[X]$ sur $\mathbb{R}^{r+1}$. On en déduit que pour tout $(y_0, \ldots, y_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$ il existe un unique polynôme L de degré au plus r tel que $\forall i \in [\![0, r]\!]$, $L(x_i) = y_i$.

b. On applique le résultat précédent aux réels $x_0, \ldots, x_r$ tels que $r \leq n-1$, $x_0 < x_1 < \ldots < x_r$ et $\{x_0, \ldots, x_r\} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ et $\forall i \in [\![0, r]\!]$, $y_i = \sqrt{x_i}$: il existe un unique polynôme L de degré inférieur ou égal à r tel que $\forall i \in [\![0, r]\!]$, $L(x_i) = \sqrt{x_i}$. Ce polynôme L vérifie $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $L(u_i) = \sqrt{u_i}$ (ce polynôme est uniquement défini si les u_i sont deux à deux distincts) et donc $L(U) = V$.

11. Racine carrée dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$

a. • Redémontrons tout d'abord le résultat très classique : $\forall S \in S_n(\mathbb{R})$, $S \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \text{Sp}(S) \subset]0, +\infty[$.

Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Puisque S est symétrique réelle, on sait que toutes les valeurs propres de S sont réelles. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de S et $X \neq 0$ un vecteur propre associé. Alors ${}^tXSX = {}^tX(SX) = \lambda{}^tXX = \lambda\|X\|_2^2$. Puisque S est définie positive et que $\|X\|_2^2 > 0$, on en déduit que $\lambda = \dfrac{{}^tXSX}{\|X\|_2^2} > 0$.

Réciproquement, soit S une matrice symétrique réelle dont les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des réels strictement positifs. Il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $S = PD{}^tP$ où $D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Avec des notations usuelles

$${}^tXSX = {}^tXPD{}^tPX = {}^t({}^tPX)D({}^tPX) = {}^tX'DX' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i'^2 \geq 0.$$

De plus,

$${}^tXSX = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i'^2 = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i x_i'^2 = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i' = 0 \Leftrightarrow X' = 0 \Leftrightarrow {}^tPX = 0 \Leftrightarrow X = 0,$$

ce qui montre que $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

• Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral et d'après ce qui précède, il existe des réels strictement positifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ tels que $S = PD{}^tP$ où $D = \text{diag}(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Posons $A = P\text{diag}(\sqrt{\lambda_i})_{1 \leq i \leq n}{}^tP$. Puisque A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale à coefficients diagonaux réels et strictement positifs, $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. De plus

$$A^2 = P\text{diag}(\sqrt{\lambda_i})_{1 \leq i \leq n}{}^tP \times P\text{diag}(\sqrt{\lambda_i})_{1 \leq i \leq n}{}^tP = P(\text{diag}(\sqrt{\lambda_i})_{1 \leq i \leq n})^2\,{}^tP = P\text{diag}(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}{}^tP = PD{}^tP = S.$$

$$\boxed{\forall S \in S_n^{++}(\mathbb{R}),\ \exists A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) /\ A^2 = S.}$$

b. Avec les notations précédentes, il existe d'après la question 10.b. un polynôme L tel que

$$L(\text{diag}(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}) = \text{diag}(\sqrt{\lambda_i})_{1 \leq i \leq n}.$$

On a alors

$$L(B^2) = L(S) = L(PD{}^tP) = PL(D){}^tP = P\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_i})_{1\leq i\leq n}{}^tP = A.$$

Le polynôme $Q = L(X^2)$ est donc un polynôme tel que $Q(B) = A$. Puisque A est un polynôme en B, on sait que

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ commutent.}}$$

c. Soit $(S_1, S_2) \in (S_n^{++}(\mathbb{R}))^2$. On sait que $S_1 + S_2$ est symétrique et d'autre part pour $X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$,

$${}^tX(S_1 + S_2)X = {}^tXS_1X + {}^tXS_2X > 0.$$

Donc

$$\boxed{\forall (S_1, S_2) \in (S_n^{++}(\mathbb{R}))^2,\ S_1 + S_2 \in S_n^{++}(\mathbb{R}).}$$

En particulier, 0 n'est pas valeur propre de $S_1 + S_2$ et donc

$$\boxed{\forall (S_1, S_2) \in (S_n^{++}(\mathbb{R}))^2,\ S_1 + S_2 \text{ est inversible.}}$$

d. Puisque A et B commutent, $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 = S - S = 0$ et puisque $A+B$ est inversible, $A+B$ est simplifiable et donc $A - B = 0$ ou encore $A = B$.

$$\boxed{\forall S \in S_n^{++}(\mathbb{R}),\ \exists! A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) /\ A^2 = S.}$$

12. a. Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$. Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$${}^t((\sqrt{S})^{-1}M\sqrt{S})S((\sqrt{S})M\sqrt{S}) = \sqrt{S}{}^tM(\sqrt{S})^{-1}(\sqrt{S}\sqrt{S})(\sqrt{S})^{-1}M\sqrt{S} = \sqrt{S}{}^tMM\sqrt{S} = \sqrt{S}I_n\sqrt{S} = \sqrt{S}\sqrt{S} = S.$$

Mais alors, d'après la question 8.b., $(\sqrt{S})^{-1}M\sqrt{S} \in \mathrm{ISOM}(N_S)$.

$$\boxed{\forall M \in O_n(\mathbb{R}),\ (\sqrt{S})^{-1}M\sqrt{S} \in \mathrm{ISOM}(N_S).}$$

b. D'après la question précédente, ψ est bien une application. Soit $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathrm{ISOM}(N_S) & \to & O_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & \sqrt{S}M(\sqrt{S})^{-1} \end{array}$.

Vérifions que φ est bien une application ce qui revient à montrer que $\forall M \in \mathrm{ISOM}(N_S)$, $\sqrt{S}M(\sqrt{S})^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$.
Soit $M \in \mathrm{ISOM}(N_S)$.

$$\begin{aligned} {}^t(\sqrt{S}M(\sqrt{S})^{-1})(\sqrt{S}M(\sqrt{S})^{-1}) &= (\sqrt{S})^{-1}{}^tM\sqrt{S}\sqrt{S}M(\sqrt{S})^{-1} = (\sqrt{S})^{-1}({}^tMSM)(\sqrt{S})^{-1} \\ &= (\sqrt{S})^{-1}S(\sqrt{S})^{-1} \text{ (puisque } M \in \mathrm{ISOM}(N_S) \text{ et d'après 8.b.)} \\ &= (\sqrt{S})^{-1}\sqrt{S}\sqrt{S}(\sqrt{S})^{-1} = I_n, \end{aligned}$$

ce qui montre que $\sqrt{S}M(\sqrt{S})^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$. Ainsi ψ est une application.
Maintenant il est clair que $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathrm{ISOM}(N_S)}$ et que $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{O_n(\mathbb{R})}$. On sait alors que ψ est une bijection et que $\psi^{-1} = \varphi$.

$$\boxed{\text{L'application } \psi : \begin{array}{rcl} O_n(\mathbb{R}) & \to & \mathrm{ISOM}(N_S) \\ M & \mapsto & (\sqrt{S})^{-1}M\sqrt{S} \end{array} \text{ est une bijection.}}$$

On en déduit que les ensembles $\mathrm{ISOM}(N_S)$ et $O_n(\mathbb{R})$ sont équipotents et donc que

$$\boxed{\mathrm{card}(\mathrm{ISOM}(N_S)) = +\infty.}$$

IV. Étude du cardinal de Isom(p)

13. Endomorphismes de permutation signée

a. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$. $u_{\sigma,\varepsilon}(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i e_{\sigma(i)} = \sum_{j=1}^{n} x_{\sigma^{-1}(j)}\varepsilon_{\sigma^{-1}(j)}e_j$ et donc

$$\|u_{\sigma,\varepsilon}(x)\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_{\sigma^{-1}(i)}\varepsilon_{\sigma^{-1}(i)}|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_{\sigma^{-1}(i)}|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} = \|x\|_p.$$

$u_{\sigma,\varepsilon}$ est une p-isométrie.

b. $u_{\sigma,\varepsilon}(e_1) = e_3$, $u_{\sigma,\varepsilon}(e_2) = e_4$, $u_{\sigma,\varepsilon}(e_3) = -e_1$ et $u_{\sigma,\varepsilon}(e_4) = e_2$. Par suite

$$\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3,e_4)}(u_{\sigma,\varepsilon}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

14. Inégalité de Hölder

a. L'inégalité à démontrer est claire quand $a = 0$ ou $b = 0$. Soient a et b deux réels strictement positifs.
On note tout d'abord que $\frac{1}{p} > 0$ puis que $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} > 1 - 1 = 0$.

La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x < 0$, $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. Donc la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est concave sur $]0, +\infty[$. Puisque $\frac{1}{p} > 0$, $\frac{1}{q} > 0$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on en déduit que

$$\ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \geq \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q) = \ln(ab),$$

et donc encore une fois que $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$.

$$\forall (a, b) \in [0, +\infty[^2,\ ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

b. Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, la question précédente permet d'écrire $|x_i| \times |y_i| \leq \frac{1}{p}|x_i|^p + \frac{1}{q}|y_i|^q$. En sommant ces inégalités, on obtient

$$\begin{aligned} | < x, y > | &= \left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{p}|x_i|^p + \frac{1}{q}|y_i|^q\right) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q = \frac{1}{p}\|x\|_p^p + \frac{1}{q}\|y\|_q^q \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned}$$

Soient alors x et y deux éléments quelconques de E. L'inégalité à démontrer est claire quand $x = 0$ ou $y = 0$.
Sinon, le vecteur $\frac{x}{\|x\|_p}$ est unitaire pour $\|\ \|_p$ et le vecteur $\frac{y}{\|y\|_q}$ est unitaire pour $\|\ \|_q$ et d'après ce qui précède, $\left| < \frac{x}{\|x\|_p}, \frac{y}{\|y\|_q} > \right| \leq 1$ ou encore $| < x, y > | \leq \|x\|_p\|y\|_q$.

$$\forall (x, y) \in E^2,\ | < x, y > | \leq \|x\|_p\|y\|_q \text{ (inégalité de Hölder).}$$

c. Quand $p = 2$, l'inégalité écrite est l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

15. Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Puisque u est une p-isométrie, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|^p = \|u(e_j)\|_p^p = \|e_j\|_p^p = 1$. Mais alors

$$\sum_{1 \le i,j \le n} |a_{i,j}|^p = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|^p \right) = \sum_{j=1}^{n} 1 = n.$$

$$\boxed{\sum_{1 \le i,j \le n} |a_{i,j}|^p = n.}$$

16. Une formule clé de dualité

a. Soit $x \in E$. Σ_q est la sphère unité de la norme $\| \ \|_q$ et puisque E est de dimension finie, on sait que Σ_q est un compact de E. D'autre part, l'application $y \mapsto < x, y >$ est une forme linéaire sur l'espace vectoriel E qui est de dimension finie et donc l'application $y \mapsto < x, y >$ est continue sur E. Il en est de même de l'application $y \mapsto | < x, y > |$ qui est en particulier continue sur le compact Σ_q à valeurs dans $\mathbb{R}$. On en déduit l'existence de $\underset{y \in \Sigma_q}{\text{Max}} | < x, y > |$.

b. • Soit $y_0 \in \Sigma_q$ tel que $\underset{y \in \Sigma_q}{\text{Max}} | < x, y > | = | < x, y_0 > |$. L'inégalité de Hölder permet d'écrire

$$\underset{y \in \Sigma_q}{\text{Max}} | < x, y > | = | < x, y_0 > | \le \|x\|_p \|y_0\|_q = \|x\|_p.$$

$$\boxed{\underset{y \in \Sigma_q}{\text{Max}} | < x, y > | \le \|x\|_p.}$$

• y désigne maintenant le vecteur défini dans l'énoncé.

$$| < x, y > | = \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i |x_i]^{p-1} \|x\|_p^{1-p} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i||x_i]^{p-1} \right) \|x\|_p^{1-p} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i]^p \right) \|x\|_p^{1-p} = \|x\|_p^p \|x\|_p^{1-p} = \|x\|_p.$$

On note alors que $\|y\|_q = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{q(p-1)} \|x\|_p^{q(1-p)} \right)^{1/q} = \|x\|_p^{1-p} \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{q(p-1)} \right)^{1/q}$. Or $q(p-1) = \dfrac{p-1}{1 - \dfrac{1}{p}} = p$ et donc

$$\|y\|_q = \|x\|_p^{1-p} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1-1/p} = \|x\|_p^{1-p} (\|x\|_p^p)^{1-1/p} = 1,$$

ce qui montre que $y \in \Sigma_q$.

En résumé $\forall y \in \Sigma_q$, $\underset{y \in \Sigma_q}{\text{Max}} | < x, y > | \le \|x\|_p$ et $\exists y_0 \in \Sigma_q / | < x, y_0 >= \|x\|_p$. Ceci montre que

$$\boxed{\forall x \in E, \ \underset{y \in \Sigma_q}{\text{Max}} | < x, y > | = \|x\|_p.}$$

Il est clair que l'exposant conjugué de q est p et on a donc aussi

$$\boxed{\forall y \in E, \ \underset{x \in \Sigma_p}{\text{Max}} | < x, y > | = \|y\|_q.}$$

17. Soit u une p-isométrie. Soient $y \in \Sigma_q$ puis $x_0 \in \Sigma_p$ tel que $| < x_0, u^*(y) > | = \underset{x \in \Sigma_p}{\text{Max}} | < x, u^*(y) > |$. Alors

$$\begin{aligned} \|u^*(y)\|_q &= \underset{x \in \Sigma_p}{\text{Max}} | < x, u^*(y) > | = | < x_0, u^*(y) > | \\ &= | < u(x_0), y > | \le \underset{z \in \Sigma_q}{\text{Max}} | < u(x_0), z > | = \|u(x_0)\|_p = \|x_0\|_p = 1, \end{aligned}$$

Donc, si $y \in \Sigma_q$, $\|u^*(y)\|_q \leq 1$. Si maintenant y est un vecteur non nul quelconque,

$$\|u^*(y)\|_q = \|y\|_q \times \left\| u\left(\frac{y}{\|y\|_q}\right)\right\|_q \leq \|y\|_q,$$

ce qui reste vrai pour $y = 0$.
On a montré que $\forall y \in E,\ \|u^*(y)\|_q \leq \|y\|_q$. Maintenant d'après la question 4., u^{-1} est aussi une p-isométrie et donc $\forall y \in E,\ \|(u^*)^{-1}(y)\|_q = \|(u^{-1})^*(y)\|_q \leq \|y\|_q$. Par suite, pour $y \in E$, $\|y\|_q = \|(u^*)^{-1}(u^*(y))\|_q \leq \|u^*(y)\|_q$. Finalement, $\forall y \in E,\ \|u^*(y)\|_q = \|y\|_q$.

$$\boxed{\text{Si } u \text{ est une } p\text{-isométrie, alors } u^* \text{ est une } q\text{-isométrie.}}$$

Puisque la base $\mathcal{B}$ est orthonormée, on a $[u^*]_{\mathcal{B}} = {}^tA$ et donc puisque u^* et une q-isométrie, d'après la question 15. on a

$$\boxed{\sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{j,i}|^q = n.}$$

18. a. • On a $q = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{p}} = \dfrac{p}{p-1}$ et donc $p - q = \dfrac{p(p-2)}{p-1}$. Par suite si $1 < p < 2$, on a $q > p$ et si $p > 2$, on a $p > q$.

• Suposons $p \in]1, 2[$ de sorte que $q > p$. Pour $a \in [0, 1]$, on a $a^p \geq a^q$ et pour $a \in]0, 1[$, on a $a^p > a^q$. Donc s'il existe $i \in [\![1, r]\!]$ tel que $0 < \alpha_i < 1$,

$$\sum_{k=1}^{r} \alpha_k^p = \alpha_i^p + \sum_{k\neq i} \alpha_k^p > \alpha_i^q + \sum_{k\neq i} \alpha_k^q = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k^q,$$

et en particulier $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \alpha_k^p \neq \sum_{k=1}^{r} \alpha_k^q$. Par contraposition, $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \alpha_k^p = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k^q \Rightarrow \forall k \in [\![1, r]\!],\ \alpha_k \in \{0, 1\}$.
• Si $p \in]2, +\infty[$ alors $q < p$ et on aboutit au même résultat.

$$\boxed{\forall r \in \mathbb{N}^*,\ \forall (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in [0, 1]^r,\ \left(\sum_{k=1}^{r} \alpha_k^p = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k^q \Rightarrow \forall k \in [\![1, r]\!],\ \alpha_k \in \{0, 1\}\right).}$$

b. D'après la question 15., pour $j \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|^p = 1$ ce qui montre que chaque $|a_{i,j}|$ est dans $[0, 1]$. De plus, d'après les questions 15. et 17.,

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|^p = n = \sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|^q.$$

La question précédente permet alors d'affirmer que chaque $|a_{i,j}|$ est dans $\{0, 1\}$.

$$\boxed{\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ |a_{i,j}| \in \{0, 1\}.}$$

19. Conclusion. Plus précisément, puisque $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|^p = n$, exactement n nombres $|a_{i,j}|$ sont égaux à 1 les autres étant nuls. Ainsi, exactement n coefficients de la matrice A sont l'un des deux nombres 1 ou -1 et les autres sont nuls. Puisque la matrice A est inversible, deux coefficients non nuls ne peuvent pas se retrouver dans une même ligne (car les lignes correspondantes seraient linéairement dépendantes) ou dans une même colonne. Ainsi, l'endomorphisme u est nécessairement du type $u_{\sigma,\varepsilon}$ décrit à la question 13.a. La question 13.a. montre que réciproquement $u_{\sigma,\varepsilon}$ est une p-isométrie et donc les p-isométries sont les endomorphismes $u_{\sigma,\varepsilon}$, $\sigma \in \mathcal{S}_n \times \{-1, 1\}^n$. Il y a $2^n \times n!$ $u_{\sigma,\varepsilon}$ deux à deux distincts et donc

$$\boxed{\forall p \in]1, +\infty[\setminus\{2\},\ \text{card}(\text{ISOM}(\|\ \|_p)) = 2^n \times n!.}$$

