SESSION 2006

**CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE**

EPREUVE SPECIFIQUE-FILIERE PSI

**MATHEMATIQUES 2**

# PARTIE I

## I.1

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

## I.2

$$M^2 + M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = I_5 + J_5.$$

## I.3

$$J_5^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} = 5J_5.$$

$$\boxed{J_5^2 = 5J_5.}$$

**I.4** Notons $0_5$ la matrice carrée de format 5 dont tous les coefficients sont nuls.

$$\begin{aligned} J_5^2 = 5J_5 &\Rightarrow (M^2 + M - I_5)^2 = 5(M^2 + M - I_5) \Rightarrow (M^2 + M - I_5)^2 - 5(M^2 + M - I_5) = 0_5 \\ &\Rightarrow (M^2 + M - I_5)((M^2 + M - I_5) - 5I_5) = 0_5 \Rightarrow (M^2 + M - I_5)(M^2 + M - 6I_5) = 0_5. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Le polynôme } (X^2 + X - 1)(X^2 + X - 6) \text{ est un polynôme annulateur de } M.}$$

**I.5** On sait que les valeurs propres d'une matrice sont à choisir parmi les racines d'un polynôme annulateur de cette matrice. Les racines du polynôme $(X^2 + X - 1)(X^2 + X - 6)$ sont $2$, $-3$, $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Donc

$$\boxed{\mathrm{Sp}(M) \subset \left\{2, -3, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}.}$$

 

**I.6** Les seuls entiers pouvant être valeurs propres de $M$ sont 2 et $-3$. Déterminons si 2 est effectivement valeur propre de $M$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{5,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in \mathrm{Ker}(M - 2I_5) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_4 = 2x_1 - x_2 \\ x_3 = -x_1 + 2x_2 \\ x_2 - 2(-x_1 + 2x_2) + x_5 = 0 \\ x_1 - 2(2x_1 - x_2) + x_5 = 0 \\ (-x_1 + 2x_2) + (2x_1 - x_2) - 2x_5 = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_4 = 2x_1 - x_2 \\ x_3 = -x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_5 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_5 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_4 = 2x_1 - x_2 \\ x_3 = -x_1 + 2x_2 \\ x_5 = -2x_1 + 3x_2 \\ -3x_1 + 2x_2 + (-2x_1 + 3x_2) = 0 \\ x_1 + x_2 - 2(-2x_1 + 3x_2) = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_4 = 2x_1 - x_2 \\ x_3 = -x_1 + 2x_2 \\ x_5 = -2x_1 + 3x_2 \\ -5x_1 + 5x_2 = 0 \\ 5x_1 - 5x_2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_2 = x_1 \\ x_4 = x_1 \\ x_3 = x_1 \\ x_5 = x_1 \end{array} \right.$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(M - 2I_5)$ est constitué des vecteurs colonnes de la forme $x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ou encore $\mathrm{Ker}(M - 2I_5) = \mathrm{Vect}(K_5)$.

Puisque $\mathrm{Ker}(M - 2I_5)$ n'est pas réduit à $\{0\}$, le nombre entier 2 est effectivement valeur propre de $M$ et le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est $\mathrm{Vect}(K_5)$.

$$\boxed{2 \text{ est valeur propre de } M \text{ et le sous-espace propre associé est } \mathrm{Vect}(K_5).}$$

D'autre part,

$$\det(M + 3I_5) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad (C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5)$$

$$= 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad (\forall j \in [\![2, 5]\!],\ L_j \leftarrow L_j - L_1)$$

$$= 5 \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad (\text{développement suivant la première colonne})$$

$$= 5 \times [2 \times (18 - 3) + (-1) \times (-3 + 9 - 1) + (-3 + 3)] = 125 \neq 0.$$

Ceci montre que $-3$ n'est pas valeur propre de $M$ et donc que 2 est l'unique valeur propre entière de la matrice $M$.

 

# PARTIE II

**II.1** **II.1.1** Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

$$\begin{aligned}
a_{i,i} &= \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} m_{j,i} \\
&= \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}^2 \text{ (car } M \text{ est symétrique)} \\
&= \delta \text{ (dans la ligne } i, \ \delta \text{ coefficients sont égaux à } 1 \text{ et les autres sont nuls).}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!], \ a_{i,i} = \delta.}$$

**II.1.2** Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k} m_{k,j} = \sum_{j=1}^{n} m_{i,k} m_{j,k}.$$

- Si $m_{i,j} = 1$, alors $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $m_{i,k} m_{j,k} = 0$ et donc $a_{i,j} = 0$.
- Si $m_{i,j} = 0$, alors il existe un et un seul entier $k_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $m_{i,k_0} m_{j,k_0} = 1$ et pour $k \in [\![1, n]\!] \setminus \{k_0\}$, on a $m_{i,k} m_{j,k} = 0$. Dans ce cas, $a_{i,j} = 1$.

En résumé, dans tous les cas $a_{i,j} = 1 - m_{i,j}$.

$$\boxed{\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \ (i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 1 - m_{i,j}).}$$

**II.1.3** Ainsi, si $i \neq j$, $a_{i,j} = 1 - m_{i,j}$. D'autre part, puisque pour tout $i$, on a $m_{i,i} = 0$, on a aussi $a_{i,i} = \delta = \delta - m_{i,i} = (\delta - 1) + 1 - m_{i,i}$. En résumé,

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!], \ a_{i,j} = \begin{cases} 1 - m_{i,j} \text{ si } i \neq j \\ (\delta - 1) + 1 - m_{i,i} \text{ si } i = j \end{cases}.$$

La matrice dont le coefficient ligne $i$, colonne $j$ est $1 - m_{i,j}$ est la matrice $J_n - M$ et la matrice dont le coefficient ligne $i$, colonne $j$, vaut $\delta - 1$ si $i = j$ et $0$ sinon est la matrice $(\delta - 1)I_n$. Donc

$$\boxed{M^2 = J_n - M + (\delta - 1)I_n.}$$

**II.2** **II.2.1** On sait que $\mathrm{Im}(\varphi)$ est le sous-espace engendré par la famille $(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$. Mais pour $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\varphi(e_i) = e_1 + \ldots + e_n = \nu$$

et donc

$$\boxed{\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(\nu).}$$

**II.2.2** L'endomorphisme $f$ vérifie l'égalité

$$f^2 = \varphi - f + (\delta - 1)\mathrm{Id} \ (*).$$

Puisque $u \in \mathrm{Ker}(f - \delta \mathrm{Id})$, on a $f(u) = \delta u$ puis $(f \circ f)(u) = \delta^2 u$. L'égalité $(*)$ fournit alors $\delta^2 u = \varphi(u) - \delta u + (\delta - 1)u$ ou encore $(\delta^2 + 1)u = \varphi(u)$ et finalement

$$u = \varphi\left(\frac{1}{\delta^2 + 1}.u\right) \in \mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(\nu).$$

On a montré que

$$\boxed{\text{tout vecteur du noyau de } f - \delta \mathrm{Id} \text{ est colinéaire à } \nu.}$$

 

**II.2.3** D'après ce qui précède, Ker$(f - \delta \mathrm{Id})$ est contenu dans la droite vectorielle Vect$(v)$. Réciproquement, par définition de $M$, la somme des coefficients d'une ligne de $M$ vaut $\delta$. Ceci signifie que $M \times K_n = \delta K_n$ ou encore que $f(v) = \delta v$. $v$ étant non nul, $\delta$ est donc effectivement une valeur propre de $f$ et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle Vect$(v)$.

$$\boxed{\delta \in \mathrm{Sp}(f) \text{ et } \mathrm{Ker}(f - \delta \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(v).}$$

**II.2.4** On utilise de nouveau l'égalité $(*)$. Puisque $f(v) = \delta v$ et que $\varphi(v) = nv$, on a $\delta^2 v = nv - \delta v + (\delta - 1)v$ ou encore $(\delta^2 + 1 - n)v = 0$. Puisque le vecteur $v$ n'est pas nul, on a encore $\delta^2 + 1 - n = 0$ ou enfin

$$\boxed{n = \delta^2 + 1.}$$

**II.3** **II.3.1** On munit l'espace $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique de sorte que la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée. La matrice de $f$ dans $\mathscr{B}$ est $M$ et est symétrique. Puisque $\mathscr{B}$ est orthonormée, on en déduit que l'endomorphisme $f$ est auto-adjoint. Le théorème spectral permet alors d'affirmer que $f$ diagonalise dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. En particulier,

$$\boxed{\text{il existe une base de } \mathbb{R}^n \text{ formée de vecteurs propres de } f.}$$

**II.3.2** Puisque $f$ est auto-adjoint, on sait que les sous-espaces propres de $f$ sont orthogonaux. En particulier, les vecteurs $u$ et $v$ sont des vecteurs propres de $f$ associés à des valeurs propres distinctes, on a $u.v = 0$. Cette dernière égalité s'écrit $x_1 + \dots x_n = 0$. Mais alors

$$\varphi(u) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) v = 0.$$

**II.3.3** L'égalité $(*)$ fournit alors $\lambda^2 u = 0 - \lambda u + (\delta - 1)u$ ou encore $(\lambda^2 + \lambda + 1 - \delta)u = 0$ et puisque $u$ n'est pas nul, $\lambda^2 + \lambda + 1 - \delta = 0$. Finalement

$$\boxed{\lambda \text{ est racine de l'équation } (E) : x^2 + x + 1 - \delta = 0.}$$

**II.3.4** D'après les questions précédentes, les valeurs propres de $f$ sont à choisir parmi $\delta$, $a$ et $b$, le nombre $\delta$ étant effectivement valeur propre de $f$.

$\delta$ ne peut être la seule valeur propre de $f$ car dans ce cas, $f$ étant diagonalisable, $f$ serait $\delta \mathrm{Id}$ ce qui n'est pas. Donc l'un au moins des deux réels $a$ ou $b$ est valeur propre de $f$. Supposons que $a$ soit valeur propre de $f$ et pas $b$.

La trace de $f$ est la trace de $M$ c'est-à-dire $0$. Mais la trace de $f$ est aussi la somme des valeurs propres (distinctes ou confondues) de $f$. On sait déjà que $\delta$ est valeur propre de $f$ d'ordre $1$ ($f$ étant diagonalisable, l'ordre de multiplicité d'une valeur propre est la dimension du sous-espace propre correspondant) et donc $a$ est valeur propre de $f$ d'ordre $n - 1$. Mais alors

$$\delta + (n - 1)a = 0.$$

Ainsi,

$$a = -\frac{\delta}{n - 1} = -\frac{\delta}{\delta^2 + 1 - 1} = -\frac{1}{\delta} \in [-\frac{1}{2}, 0[ \text{ (car } \delta \geq 2).$$

D'autre part, $a$ étant solution de l'équation $(E)$, $a$ doit être l'un des deux réels $\dfrac{-1 \pm \sqrt{4\delta - 3}}{2}$. Comme $\dfrac{-1 + \sqrt{4\delta - 3}}{2} \geq \dfrac{-1 + \sqrt{4 \times 2 - 3}}{2} = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2} > 0$, $a$ ne peut être $\dfrac{-1 + \sqrt{4\delta - 3}}{2}$ et comme $\dfrac{-1 - \sqrt{4\delta - 3}}{2} \leq \dfrac{-1 - \sqrt{4 \times 2 - 3}}{2} = -1 - \sqrt{5}2 = -1,6\ldots < -\dfrac{1}{2}$, $a$ ne peut être $\dfrac{-1 - \sqrt{4\delta - 3}}{2}$. Ceci est impossible et donc

$$\boxed{\text{les deux racines } a \text{ et } b \text{ de l'équation } (E) \text{ sont des valeurs propres de } f.}$$

**II.4** **II.4.1** On a $a = \dfrac{-1 + \sqrt{4\delta - 3}}{2}$ et $b = \dfrac{-1 - \sqrt{4\delta - 3}}{2}$. Donc $a - b = \sqrt{4\delta - 3}$ puis

$$\boxed{(a - b)^2 = 4\delta - 3.}$$

 

**II.4.2** Puisque $f$ est diagonalisable, l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre de $f$ est la dimension du sous-espace propre correspondant.
Donc, les valeurs propres de $f$ sont $\delta$ d'ordre $1$, $a$ d'ordre $r$ et $b$ d'ordre $s$. Mais alors $1+r+s=n$ ou encore

$$r+s=n-1=\delta^2,$$

et aussi $\delta+ra+sb=\mathrm{Tr}(f)=0$ ou encore

$$ra+sb=-\delta.$$

On en déduit que

$$\begin{pmatrix} r & s \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ra+sb & r+s \\ a+b & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\delta & \delta^2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} r & s \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\delta & \delta^2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.}$$

**II.4.3** En passant aux déterminants, on obtient

$$(r-s)(a-b)=\begin{vmatrix} -\delta & \delta^2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=\delta^2-2\delta.$$

$$\boxed{(r-s)(a-b)=\delta^2-2\delta.}$$

**II.4.4** Puisque $a-b\neq 0$,

$$r=s\Leftrightarrow (r-s)(a-b)=0\Leftrightarrow \delta^2-2\delta=0\Leftrightarrow \delta=2\ (\text{car }\delta\geq 2).$$

$$\boxed{r=s\Leftrightarrow \delta=2.}$$

Dans ce cas, $r=s=\dfrac{1}{2}(r+s)=\dfrac{1}{2}\delta^2=2$ (et $n=\delta^2+1=5$).

$$\boxed{\text{Si }\delta=2,\ r=s=2.}$$

**II.5** On suppose que $a-b\notin\mathbb{Q}$.
**II.5.1** Si $r-s\neq 0$, comme $r-s$ est un entier, le réel $(r-s)(a-b)=\delta^2-2\delta$ est aussi un irrationnel. Ceci est impossible car $\delta^2-2\delta$ est un entier. Donc $\delta=2$, $n=5$ et $r=s=2$.
**II.5.2** Dans ce cas, $a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $b=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $M$ est (orthogoanlement) semblable à la matrice $\mathrm{diag}(\delta,a,a,b,b)=\mathrm{diag}(2,\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2})$.
**II.6** **II.6.1** D'après la question, II.4.1, on a $(a-b)^2=4\delta-3$ ce qui s'écrit encore

$$q^2(4\delta-3)=m^2\ (**).$$

L'entier $4\delta-3$ est supérieur ou égal à 2 et se décompose donc en produit de facteurs premiers. L'égalité $(**)$ montre alors que dans cette décomposition, l'exposant de tout facteur premier de $4\delta-3$ est un nombre pair ou encore que $4\delta-3$ est un carré parfait. Ainsi, il existe un entier naturel $K$ tel que $4\delta-3=K^2$ ce qui fournit $m^2=(Kq)^2$ ou encore $m=Kq$. Finalement, l'entier $q$ divise l'entier $m$ ou encore

$$\boxed{a-b\in\mathbb{N}.}$$

**II.6.2** D'après la question II.5, $\delta\neq 2$. Par suite, $\delta\geq 3$ et donc $a-b=\sqrt{4\delta-3}\geq\sqrt{4\times 3-3}=3$.
D'autre part, $(a-b)^2$ est l'entier $4\delta-3$ qui est un entier impair. Le nombre premier 2 n'est donc pas un facteur premier de $(a-b)^2$ et donc pas davantage de $a-b$. L'entier $a-b$ est donc impair.

$$\boxed{a-b\text{ est un entier impair supérieur ou égal à }3.}$$

 

On pose donc $a-b=2p+1$ où $p$ est un entier naturel non nul. On a $a+b=-1$ (puisque $a$ et $b$ sont les solutions de l'équation $(E)$) et $a-b=2p+1$. En additionnant et en retranchant membre à membre ces deux égalités, on obtient

$$\boxed{a=p \text{ et } b=-(p+1).}$$

On a aussi

$$\delta=\frac{1}{4}((a-b)^2+3)=\frac{1}{4}((2p+1)^2+3)=\frac{1}{4}(4p^2+4p+4)=p^2+p+1.$$

$$\boxed{\delta=p^2+p+1.}$$

**II.6.3** D'après les questions II.4.1 et II.4.3, on a

$$(c^2+3)(c^2-5)=((a-b)^2+3)((a-b)^2-5)=4\delta\times(4\delta-8)=16\delta(\delta-2)=16(r-s)(a-b)=16c(r-s).$$

Mais l'entier $c$ divise l'entier $16c(r-s)$ et donc l'entier $c$ divise l'entier $(c^2+3)(c^2-5)$.

$$\boxed{c \text{ divise } (c^2+3)(c^2-5).}$$

L'entier $c$ divise l'entier $(c^2+3)(c^2-5)=c^4-2c^2-15=c(c^3_2c)-15$ et comme l'entier $c$ divise l'entier $c(c^3_2c)$, l'entier $c$ divise encore l'entier $c(c^3_2c)-(c^2+3)(c^2-5)=15$. Comme $c$ est un entier supérieur ou égal à 3, on a montré que

$$\boxed{c\in\{3,5,15\}.}$$

**II.6.4** On rappelle que $c=2p+1$ et donc que $p=\dfrac{c-1}{2}$. Puis $\delta=\dfrac{c^2+3}{4}$, $n=\delta^2+1$, $a=\dfrac{-1+\sqrt{4\delta-3}}{2}=\dfrac{-1+c}{2}=p$ et $b=\dfrac{-1-c}{2}=-(p+1)$. Enfin, $r+s=n-1=\delta^2$ et $r-s=\dfrac{\delta^2-2\delta}{a-b}=\dfrac{\delta^2-2\delta}{c}=\dfrac{\delta^2-2\delta}{2p+1}$ ce qui fournit en additionnant $r=\dfrac{1}{2}\left(\delta^2+\dfrac{\delta^2-2\delta}{2p+1}\right)$ et en retranchant $s=\dfrac{1}{2}\left(\delta^2-\dfrac{\delta^2-2\delta}{2p+1}\right)$. On obtient le tableau suivant :

| $c$ | $p$ | $\delta$ | $n$ | $a$ | $b$ | $r$ | $s$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 3 | 10 | 1 | $-2$ | 5 | 4 |
| 5 | 2 | 7 | 50 | 2 | $-3$ | 28 | 21 |
| 15 | 7 | 57 | 3250 | 7 | $-8$ | 1729 | 1520 |

# PARTIE III

**III.1** Le nombre de parties à deux éléments de l'ensemble $\{1,2,3,4,5\}$ est $\dbinom{5}{2}=\dfrac{5\times 4}{2}=10$.

**III.2** $\psi$ transforme une base orthonormée de $\mathbb{R}^5$ en une base orthonormée de $\mathbb{R}^5$. On en déduit que $\psi$ est un automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^5$ et donc que $\psi$ conserve le produit scalaire. Finalement

$$\boxed{\forall (i,j)\in[\![1,10]\!],\ (\psi(u_i)|\psi(u_j))=(u_i|u_j).}$$

**III.3 III.3.1** Soit $i\in[\![1,10]\!]$. Il existe $(\alpha,\beta)\in[\![1,5]\!]^2$ tel que $u_i=e_\alpha+e_\beta$. Puisque la base $\mathscr{B}$ est orthonormée, on a

$$(u_i|u_i)=(e_\alpha+e_\beta|e_\alpha+e_\beta)=1^2+1^2=2.$$

$$\boxed{\forall i\in[\![1,10]\!],\ (u_i|u_i)=2.}$$

**III.3.2** Soient $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ trois éléments deux à deux distincts de $[\![1,5]\!]$.

$$(e_\alpha+e_\beta|e_\alpha+e_\gamma)=(e_\alpha|e_\alpha)+(e_\alpha|e_\gamma)+(e_\beta|e_\alpha)+(e_\beta|e_\gamma)=1+0+0+0=1.$$

**III.3.3** Soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et $\varepsilon$ quatre éléments deux à deux distincts de $[\![1,5]\!]$. On a immédiatement $(e_\alpha+e_\beta|e_\gamma+e_\varepsilon)=0$.

 

**III.4** **III.4.1** Ici, $n = 10$ et la partie II montre que l'on a nécessairement $\delta = 3$.

Soit $i \in [\![1, 10]\!]$. Posons $u_i = e_\alpha + e_\beta$ où $\alpha$ et $\beta$ sont deux éléments distincts de $[\![1, 5]\!]$. Tout d'abord $(u_i|u_i) = 2$. Ensuite, il y a trois vecteurs $u_j$ de la forme $e_\alpha + e_\gamma$, $\gamma \notin \{\alpha, \beta\}$ et trois vecteurs $u_j$ de la forme $e_\gamma + e_\beta$, $\gamma \notin \{\alpha, \beta\}$ soit au total six vecteurs $u_j$ tels que $(u_i|u_j) = 1$ (d'après la question III.3.2). Il reste $10 - 1 - 6 = 3$ vecteurs $u_j$ tels que $(u_i|u_j) = 0$.

Chaque ligne de $A$ est constituée d'un $2$ (sur la diagonale), de six $1$ et de trois $0$.

La matrice $A - I_{10}$ est donc constituée de $1$ et de $0$ uniquement. Plus précisément, chaque ligne de la matrice $A - I_{10}$ est constituée de sept $1$ et de trois zéros. Mais alors chaque ligne de la matrice $J_{10} - (A - I_{10}) = J_{10} + I_{10} - A$ est constituée de trois $1$ et de sept $0$.

On pose $M = J_{10} + I_{10} - A$.

**III.4.2** Les matrices $J_{10}$, $I_{10}$ et $A$ sont symétriques et il en est de même de la matrice $A$. De plus les coefficients diagonaux de $M$ sont nuls. Ensuite chaque ligne de $M$ contient $3 = \delta$ coefficients égaux à $1$ et $7 = n - \delta$ coefficients égaux à $0$. Il ne reste plus qu'à vérifier la propriété (4).

Pour $(i, j) \in [\![1, 10]\!]$ tel que $i \neq j$,

$$m_{i,j} = 1 + 0 - a_{i,j} = 1 - (u_i|u_j).$$

Soit $(i, j) \in [\![1, 10]\!]$ tel que $i \neq j$. La question III.3 permet d'affirmer que

$$m_{i,j} = 0 \Leftrightarrow (u_i|u_j) = 1 \Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta, \gamma) \in [\![1, 5]\!]^2 /\ \alpha \neq \beta,\ \alpha \neq \gamma,\ \beta \neq \gamma,\ u_i = e_\alpha + e_\beta,\ e_j = e_\alpha + e_\gamma.$$

• Supposons qu'il existe un entier $k \in [\![1, 5]\!]$ tel que $m_{i,k} = m_{j,k} = 1$. Puisque les coefficients diagonaux de $M$ sont nuls, $k \neq i$ et $k \neq j$ et donc $m_{i,k} = m_{j,k} = 1$ s'écrit encore $(u_i|u_k) = (u_j|u_k) = 0$. Puisque $(u_i|u_k) = 0$ et que $i \neq k$, $u_i$ et $u_k$ sont respectivement de la forme $e_\alpha + e_\beta$ et $e_\gamma + e_\varepsilon$ où $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et $\varepsilon$ sont quatre éléments deux à deux distincts de $[\![1, 5]\!]$. Il reste un élément non utilisé que l'on note $\mu$ de sorte que $[\![1, 5]\!] = \{\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \mu\}$. Le vecteur $u_j$ est aussi orthogonal à $u_k$ et est donc de la forme $e_{\alpha'} + e_{\beta'}$ où $\alpha'$ et $\beta'$ sont deux éléments distincts de $\{\alpha, \beta, \mu\}$. Comme $i \neq j$, la paire $\{\alpha', \beta'\}$ est soit la paire $\{\alpha, \mu\}$ soit la paire $\{\beta, \mu\}$ et en particulier dans tous les cas, $\{\alpha, \beta\} \cap \{\alpha', \beta'\}$ est un singleton et la question III.2 montre que $(u_i|u_j) = 1$ ou encore que $m_{i,j} = 0$.

• Réciproquement, supposons que $m_{i,j} = 0$. $u_i$ et $u_j$ sont alors respectivement de la forme $e_\alpha + e_\beta$ et $e_\alpha + e_\gamma$ où $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ sont trois éléments deux à deux distincts de $[\![1, 5]\!]$. Il en reste deux non utilisés que l'on note $\varepsilon$ et $\mu$ de sorte $[\![1, 5]\!] = \{\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \mu\}$. Soit $u_k = e_\varepsilon + e_\mu$. On a $k \neq i$, $k \neq j$ et de plus, d'après la question III.2, on a $(u_i|u_k) = (u_j|u_k) = 0$ ou encore $m_{i,k} = m_{j,k} = 1$ (l'unicité de $k$ est claire car les indices utilisés ne doivent pas appartenir à $\{\alpha, \beta, \gamma\}$).

On a montré que $\forall i \neq j,\ (m_{i,j} = 0 \Leftrightarrow \exists k \in [\![1, 10]\!] /\ m_{i,k} = m_{j,k} = 1)$ l'entier $k$ étant alors unique, c'est-à-dire la propriété (4).

$\boxed{\text{La matrice } M = J_{10} + I_{10} - A \text{ vérifie la propriété } (\mathscr{P}).}$

 