SESSION 2006

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE

EPREUVE SPECIFIQUE-FILIERE PSI

MATHEMATIQUES 1

PARTIE I

Deux exemples

I.1/ Cas d'une suite constante

I.1.1/ Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule du binôme de NEWTON, on a

$$\sum_{k=-0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=-0}^{n} \binom{n}{k} \times 1^k \times 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=-0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.}$$

I.1.2/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=-0}^{n} \left(\binom{n}{k} \alpha \right) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=-0}^{n} \left(\binom{n}{k} \right) \alpha = \frac{1}{2^n} \times 2^n \times \alpha = \alpha.$$

$$\boxed{\text{Si } \forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \alpha \text{ alors } \forall n \in \mathbb{N},\ a_n^* = \alpha.}$$

I.1.3/ a_n (resp. a_n^*) ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc la série de terme général a_n (resp. a_n^*) est grossièrement divergente.

I.2/ Cas d'une suite géométrique

I.2.1/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule du binôme de NEWTON, on a

$$a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k = \frac{1}{2^n} (1+z)^n.$$

$$\boxed{\text{Si } \forall n \in \mathbb{N},\ a_n = z^n \text{ alors } \forall n \in \mathbb{N},\ a_n^* = \left(\frac{1+z}{2}\right)^n.}$$

I.2.2/

I.2.2.1/ Soit z un nombre complexe tel que $|z| < 1$. On sait que la série géométrique de terme général z^n converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

$$\boxed{A(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \frac{1}{1-z}.}$$

I.2.2.2/ Soit z un nombre complexe tel que $|z| < 1$.

$$\left| \frac{1+z}{2} \right| = \frac{1}{2} |1+z| \leq \frac{1}{2}(1+|z|) < \frac{1}{2}(1+1) = 1.$$

On sait que la série géométrique de terme général $\left(\dfrac{1+z}{2}\right)^n$ converge et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1+z}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\dfrac{1+z}{2}} = \frac{2}{1-z}.$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* = \frac{2}{1-z} = 2A(z).}$$

I.2.3/

I.2.3.1/ Si $|z| \geq 1$, a_n ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc la série de terme général a_n est grossièrement divergente.

I.2.3.2/ On suppose $z = -2$. Pour n entier naturel donné, on a

$$a_n^* = \left(\frac{1-2}{2}\right)^n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Comme $\left|-\dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2} < 1$, on sait que la série de terme général a_n^* est absolument convergente.

I.2.3.3/ Soit θ un réel tel que $0 < |\theta| < \pi$.

$$\frac{1+e^{i\theta}}{2} = \frac{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2}+e^{i\theta/2})}{2} = \cos\frac{\theta}{2}\times e^{i\theta/2}.$$

Maintenant, θ est élément de $]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$ et donc $\dfrac{\theta}{2}$ est élément de $]-\dfrac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \dfrac{\pi}{2}[$. Mais alors $0 < \cos\dfrac{\theta}{2} < 1$ puis

$$\left|\cos\frac{\theta}{2}\times e^{i\theta/2}\right| = \cos\frac{\theta}{2} < 1.$$

Ainsi la série géométrique de terme général $\left(\dfrac{1+e^{i\theta}}{2}\right)^n$ est absolument convergente et de plus

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1+e^{i\theta}}{2}\right)^n &= \frac{1}{1-\dfrac{1+e^{i\theta}}{2}} = \frac{2}{1-e^{i\theta}} = \frac{2}{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2})}\\
&= \frac{2e^{-i\theta/2}}{-2i\sin(\dfrac{\theta}{2})} = \frac{ie^{-i\theta/2}}{\sin(\dfrac{\theta}{2})} = \frac{i(\cos(\dfrac{\theta}{2})-i\sin(\dfrac{\theta}{2}))}{\sin(\dfrac{\theta}{2})}\\
&= 1+i\,\mathrm{cotan}(\frac{\theta}{2}).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* = \frac{ie^{-i\theta/2}}{\sin(\dfrac{\theta}{2})},\\ \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*\right) = 1 \text{ et } \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*\right) = \mathrm{cotan}(\frac{\theta}{2}).\end{gathered}}$$

PARTIE II

Etude du procédé de sommation

II.1/ Comparaison des convergences de deux suites

II.1.1/

II.1.1.1/ Soit k un entier naturel fixé. Pour n entier naturel supérieur ou égal à k, on a

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\overbrace{n\times(n-1)\times\ldots\times(n-k+1)}^{\text{k facteurs}}}{k!},$$

et donc quand n tend vers $+\infty$,

$$\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}.$$

II.1.1.2/ Mais alors, quand n tend vers $+\infty$,

$$\frac{1}{2^n}\binom{n}{k} \sim \frac{1}{k!}\frac{n^k}{2^n},$$

et les théorèmes de croissances comparées permettent d'affirmer que

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\binom{n}{k} = 0.}$$

II.1.2/ Pour k fixé tel que $0 \leq k \leq q$, on a d'après la question précédente $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}a_k = 0$. De plus, le nombre de termes de la somme $S_q(n,a)$, à savoir $q+1$, est constant quand n varie. Par suite,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_q(n,a) = 0.}$$

II.1.3/ Soit $\varepsilon > 0$. Puisque a_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, il existe un entier naturel q tel que pour $n \geq q$, on ait $|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $n > q$.

$$\begin{aligned}
|a_n^*| &= \left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k\right| \\
&\leq \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|a_k| = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{q}\binom{n}{k}|a_k| + \frac{1}{2^n}\sum_{k=q+1}^{n}\binom{n}{k}|a_k| = S_q(n,a) + \frac{1}{2^n}\sum_{k=q+1}^{n}\binom{n}{k}|a_k| \\
&\leq S_q(n,a) + \frac{1}{2^n}\sum_{k=q+1}^{n}\binom{n}{k}\frac{\varepsilon}{2} = S_q(n,a) + \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=q+1}^{n}\binom{n}{k}\right)\frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq S_q(n,a) + \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right)\frac{\varepsilon}{2} = S_q(n,a) + \frac{1}{2^n}\times 2^n\frac{\varepsilon}{2} \text{ (d'après la question I.1.1/)} \\
&= S_q(n,a) + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

En résumé, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à q, on a $|a_n^*| \leq S_q(n,a) + \frac{\varepsilon}{2}$. Maintenant, d'après la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_q(n,a) = 0$. Par suite, il existe un entier q' tel que pour $n \geq q'$, on ait $S_q(n,a) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $n_0 = \text{Max}\{q, q'\}$. Pour $n \geq n_0$, on a $|a_n^*| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

On a montré que : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ (n \geq n_0 \Rightarrow |a_n^*| < \varepsilon$. Finalement

$$\boxed{\text{Si } \lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} a_n^* = 0.}$$

II.1.4/ Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$a_n^* = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a_k - l + l) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a_k - l) + \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}l = l + \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a_k - l).$$

Maintenant, puisque la suite $(a_n - l)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, la question précédente permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a_k - l) = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^* = l$.

$$\boxed{\text{Si } \lim_{n\to+\infty} a_n = l \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} a_n^* = l.}$$

II.1.5/ Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = (-1)^n$. La suite (a_n) est divergente car les deux suites extraites (a_{2n}) et (a_{2n+1}) convergent et ont des limites distinctes. Mais, pour $n \geq 1$,

$$a_n^* = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = \frac{1}{2^n}(-1+1)^n = 0.$$

La suite (a_n^*) est donc nulle à partir du rang 1 et en particulier convergente, de limite 0. Il est ainsi possible que la suite (a_n) diverge tandis que la suite (a_n^*) converge et donc la convergence de la suite (a_n) n'est pas équivalente à la convergence de la suite (a_n^*).

II.2/ Comparaison des convergences des séries $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} a_n^*$

II.2.1/ $U_0 = T_0 = a_0^* = a_0 = S_0$. $U_1 = 2T_1 = 2(a_0^* + a_1^*) = 2a_0 + (a_0 + a_1) = 2S_0 + S_1$.
$U_2 = 4T_2 = 4(a_0^*+a_1^*+a_2^*) = 4(a_0+\frac{1}{2}(a_0+a_1)+\frac{1}{4}(a_0+2a_1+a_2)) = 7a_0+4a_1+a_2 = (a_0+a_1+a_2)+3(a_0+a_1)+3a_0 = 3S_0+3S_1+S_2$.
$U_3 = 8T_3 = 8(a_0^*+a_1^*+a_2^*+a_3^*) = 8(a_0+\frac{1}{2}(a_0+a_1)+\frac{1}{4}(a_0+2a_1+a_2)+\frac{1}{8}(a_0+3a_1+3a_2+a_3) = 15a_0+11a_1+5a_2+a_3 = (a_0+a_1+a_2+a_3)+4(a_0+a_1+a_2)+6(a_0+a_1)+4a_0 = 4S_0+6S_1+4S_2+S_3$.

$$\boxed{U_0 = S_0,\ U_1 = 2S_0+S_1,\ U_2 = 3S_0+3S_1+S_2 \text{ et } U_3 = 4S_0+6S_1+4S_2+S_3.}$$

II.2.2/

II.2.2.1/ Il semblerait que $\lambda_{k,n} = \binom{n+1}{k+1}$.

II.2.2.2/ Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{n-k}S_k$.

- Pour $n = 0$, $\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}S_k = \binom{1}{1}S_0 = S_0 = U_0$ et la formule proposée est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $U_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}S_k$. Alors

$$\begin{aligned}
U_{n+1} &= 2^{n+1}T_{n+1} = 2^{n+1}\sum_{k=0}^{n+1}a_k^* = 2^{n+1}(T_n + a_{n+1}^*) = 2\times 2^nT_n + 2^{n+1}a_{n+1}^* = 2\times U_n + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a_k \\
&= 2\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}S_k + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(S_k - S_{k-1}) \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= 2\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}S_k + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}S_k - \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}S_{k-1} = 2\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}S_k + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}S_k - \sum_{k=-1}^{n}\binom{n+1}{k+1}S_k \\
&= 2\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}S_k + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}S_k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}S_k \text{ (car } S_{-1} = 0) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}S_k + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}S_k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k+1}S_k + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}S_k \text{ (car } \binom{n+1}{n+2} = 0) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\left(\binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{k+1}\right)S_k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+2}{k+1}S_k.
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} S_k.}$$

II.2.3/ Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $S'n = S_{n-1}$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k^* = T_n = \frac{1}{2^n} U_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} S_k = 2 \times \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=-1}^{n} \binom{n+1}{k+1} S_k \\ = 2 \times \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} S_{k-1} = 2 \times \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} S'_k \\ = 2S'^*_{n+1}.\end{aligned}$$

Supposons alors que la série de terme général a_n soit convergente et notons S sa somme. Par définition, $\lim_{n \to +\infty} S_n = S$ et donc $\lim_{n \to +\infty} S'_n = S$. La question II.1.4/ permet alors d'affirmer que la suite (S'^*_n) converge et que $\lim_{n \to +\infty} S'^*_n = 2S$. Mais alors la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k^*\right)$ converge et $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k^* = 2S$. Finalement la série de terme général a_n^* converge et a pour somme $2S$.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.}$$

II.2.4/ La question I.2.3.2/ montre qu'il est possible que la série de terme général a_n diverge et que la série de terme général a_n^* converge. La convergence de la série de terme général a_n n'est donc pas équivalente à la convergence de la série de terme général a_n^*.

PARTIE III

Une étude de fonctions

III.1/ Etude de f

III.1.1/ Puisque pour tout entier naturel n, on a $\left|\frac{1}{(n+1)!}\right| \leq \frac{1}{n!}$ et que la série entière $\sum \frac{x^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini, la série entière $\sum \frac{x^n}{(n+1)!}$ a un rayon de convergence infini. On sait alors que f est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et en particulier

$$\boxed{f \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}.}$$

III.1.2/ Soit x un réel. $xf(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ xf(x) = e^x - 1.}$$

III.1.3/ Si $x = 0$, $e^{-0}f(0) = 1 \times \frac{1}{1!} = 1$. Sinon, pour x réel non nul donné

$$e^{-x}f(x) = e^{-x}\frac{e^x - 1}{x} = \frac{1 - e^{-x}}{x}.$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x}f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - e^{-x}}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}.}$$

III.2/ Etude de g

III.2.1/ Pour n entier naturel non nul, on a $0 \leq \sigma_n \leq \overbrace{1+1+\ldots+1}^{n \text{ termes}} = n$ et donc

$$0 \leq \frac{\sigma_n}{n!} \leq \frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}.$$

La série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{(n-1)!}$ a un rayon de convergence infini ($\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} = xe^x$), il en est de même de la série entière de somme g. g est donc définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et en particulier

$$\boxed{g \text{ est définie et de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

III.2.2/ Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma_n}{n!} \times nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma_n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sigma_{n+1}}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\sigma_n + \frac{1}{n+1}) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sigma_n x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} = g(x) + f(x). \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) - g(x) = f(x).}$$

III.2.3/ On note tout d'abord que $g(0) = \dfrac{\sigma_0}{0!} = 0$. Mais alors

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R},\ g'(t) - g(t) = f(t) &\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ e^{-t}g'(t) - e^{-t}g(t) = e^{-t}f(t) \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ (e^{-t}g)'(t) = e^{-t}f(t) \\ &\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x}g(x) = e^{-0}g(0) + \int_0^x e^{-t}f(t)\ dt \\ &\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = e^x \int_0^x e^{-t}f(t)\ dt. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = e^x \int_0^x e^{-t}f(t)\ dt.}$$

III.3/ La fonction F

III.3.1/ D'après la question I.1.3/, pour x réel non nul, on a

$$e^{-x}f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x} = \frac{1}{x}(1 - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}) = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n+1)!}.$$

Puisque $f(0) = 1$, cette égalité reste valable quand $x = 0$ et donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x}f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n+1)!}.$$

Maintenant, puisque la fonction $x \mapsto e^{-x}f(x)$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, on sait que la fonction F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et que son développement développement s'obtient par intégration terme à terme. Ainsi, pour tout réel x on a

$$F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)!} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1).(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n.n!}.$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n.n!}.}$$

III.3.2/ D'après la question III.2.3/, pour tout réel x on a $g(x) = e^x F(x)$ et donc d'après la question précédente pour tout réel x on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sigma_n}{n!} x^n &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n\right) \times \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n.n!} x^n\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k.k!} \frac{1}{(n-k)!}\right) x^n \text{ (produit de CAUCHY de deux séries entières)} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n x^n \text{ (car } (-1)^{k+1} = (-1)^{k-1}).\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'une série entière, on a alors

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \gamma_n = \frac{\sigma_n}{n!}.}$$

III.4/ La série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

III.4.1/

III.4.1.1/ Quand k tend vers $+\infty$,

$$\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{k+1} = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k} \frac{1}{1 + \frac{1}{k}} = \left(\frac{1}{k} + O(\frac{1}{k^2})\right) - \frac{1}{k}\left(1 + O(\frac{1}{k})\right) = O(\frac{1}{k^2}).$$

On en déduit que

$$\boxed{\text{la série de terme général } w_k \text{ est convergente.}}$$

III.4.1.2/ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} w_k &= \sum_{k=1}^{n-1} (\ln(k+1) - \ln(k)) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \\ &= \ln(n) - \ln(1) - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{(somme télescopique)} \\ &= \ln(n) - \sigma_n + 1,\end{aligned}$$

et donc

$$\sigma_n - \ln(n) = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} w_k.$$

Puisque la série de terme général w_k converge, on en déduit que

$$\boxed{\text{la suite } (\sigma_n - \ln(n)) \text{ converge.}}$$

On note dorénavant γ la limite de $\sigma_n - \ln(n)$.

III.4.2/ Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned}\tau_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) - 2 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = \sigma_{2n} - \sigma_n.\end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \tau_{2n} = \sigma_{2n} - \sigma_n.}$$

III.4.3/ D'après la question III.4.1.2/, quand n tend vers $+\infty$ on a $\sigma_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$ et donc

$$\tau_{2n} = (\ln(2n) + \gamma + o(1)) - (\ln(n) + \gamma + o(1)) = \ln(2) + o(1).$$

Ainsi, quand n tend vers vers $+\infty$, τ_{2n} tend vers $\ln(2)$. Ensuite

$$\tau_{2n+1} = \tau 2n + \frac{1}{2n+1} = \ln(2) + o(1).$$

Finalement les deux suites (τ_{2n}) et (τ_{2n+1}) convergent et ont même limite. On sait alors que la suite (τ_n) converge et que

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2).}$$

III.5/ Etude de la fonction φ

III.5.1/ Pour tout entier naturel non nul, on a $1 \leq \sigma_n$ et donc $R \leq 1$ et aussi $\sigma_n \leq n$ et donc $R \geq 1$. Finalement

$$\boxed{R = 1.}$$

III.5.2/ Puisque $R = 1$, on a $]-1,1[\subset \Delta \subset [-1,1]$. Mais si $|x| = 1$, $|\sigma_n x^n| = \sigma_n \geq 1$ et en particulier $\sigma_n x^n$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ainsi, la série de terme général $\sigma_n.1^n$ est grossièrement divergente de même que la série de terme général $\sigma_n.(-1)^n$. Finalement

$$\boxed{\Delta =]-1,1[.}$$

Soient x et y deux réels tels que $0 \leq x \leq y$. Puisque la suite σ est positive, pour tout entier naturel n on a $\sigma_n x^n \leq \sigma_n y^n$ et donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sigma_n x^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n y^n$ ou encore $\varphi(x) \leq \varphi(y)$. On a montré que

$$\boxed{\varphi \text{ est croissante sur } [0,1[.}$$

III.5.3/ $\displaystyle\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma_n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sigma_n}{2^n}$. Posons alors $a_0 = 0$ et pour $n \geq 1$, $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

D'après la question III.3.2/, pour tout entier naturel non nul n, on a

$$\frac{\sigma_n}{2^n} = \frac{1}{2^n} n!\gamma_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k = a_n^*,$$

ce qui reste vrai pour $n = 0$. En résumé

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*.$$

Maintenant, d'après la question III.4.3/, la série de terme général a_n converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \ln(2)$. La question II.2.3/ permet alors d'affirmer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 2\ln(2).$$

$$\boxed{\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = 2\ln(2).}$$

III.5.4/ Soit $x \in]-1,1[$.

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\right) \text{ (produit de Cauchy de deux séries entières)}$$
$$= -\frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \varphi(x) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}.}$$

En particulier, pour $x = \dfrac{1}{2}$, on obtient

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\ln(1-\frac{1}{2})}{1-\frac{1}{2}} = 2\ln(2),$$

et on retrouve bien $\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2\ln(2)$.

