SESSION 2006

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE

EPREUVE SPECIFIQUE-FILIERE MP

MATHEMATIQUES 2

QUELQUES APPLICATIONS DES MATRICES DE GRAM A LA GEOMETRIE

I. GENERALITES

1. Résultat préliminaire
a. Soit $Y = (y_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$^tYY = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ y_i = 0 \Leftrightarrow Y = 0.$$

b. Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} X \in \mathrm{Ker}(^tAA) &\Rightarrow {}^tAAX = 0 \Rightarrow {}^tX{}^tAAX = 0 \Rightarrow {}^t(AX)AX = 0 \Rightarrow AX = 0 \text{ (d'après a.)} \\ &\Rightarrow X \in \mathrm{Ker}A. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(^tAA) \subset \mathrm{Ker}A$. On en déduit que $\mathrm{rg}(^tAA) \geq \mathrm{rg}(A)$. Comme d'autre part, $\mathrm{rg}(^tAA) \leq \max\{\mathrm{rg}(^tA), \mathrm{rg}(A)\} = \mathrm{rg}(A)$, on a finalement

$$\boxed{\mathrm{rg}(^tAA) = \mathrm{rg}(A).}$$

2. Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, notons $a_{i,j}$ le coefficient ligne i, colonne j de la matrice A.
Soit $(i,j) \in [[1,n]]^2$. Le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice ^tAA vaut

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}a_{k,j}.$$

Puisque $a_{k,l}$ est la k ème coordonnée de x_l dans la base $\mathscr{B}$ et que la base $\mathscr{B}$ est orthonormée, ce nombre est aussi $x_i|x_j$, c'est-à-dire le coefficient ligne i, colonne j de la matrice $G(x_1,\ldots,x_p)$. Finalement,

$$\boxed{G(x_1,\ldots,x_p) = {}^tAA.}$$

Mais alors, le rang de $G(x_1,\ldots,x_p)$ est le rang de ^tAA et donc est le rang de A d'après 1.b., ou encore le rang de $G(x_1,\ldots,x_p)$ est le rang de la famille $(x_1,\ldots,x_p)$.

3. a.

$$\begin{aligned} (x_1,\ldots,x_n) \text{ liée} &\Leftrightarrow \mathrm{rg}(x_1,\ldots,x_n) < n \Leftrightarrow \mathrm{rg}G(x_1,\ldots,x_n) < n \Leftrightarrow G(x_1,\ldots,x_n) \notin \mathscr{GL}_n(\mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow \Gamma(x_1,\ldots,x_n) = 0 \end{aligned}$$

b. D'après a., la famille $(x_1,\ldots,x_n)$ est libre si et seulement si $\Gamma(x_1,\ldots,x_n)$ est non nul. Mais d'autre part, dans tous les cas, on a

$$\Gamma(x_1,\ldots,x_n) = \det(^tAA) = \det(^tA)\det(A) = (\det(A))^2 \geq 0.$$

En cumulant ces deux résultats, on obtient

$$\boxed{(x,\ldots,x_n) \text{ libre} \Leftrightarrow \Gamma(x_1,\ldots,x_n) > 0.}$$

4. Application

Calculons le déterminant de GRAM de la famille $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$. En développant suivant la première colonne, on obtient :

$$\begin{aligned}\Gamma(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = \begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\gamma \\ \cos\alpha & 1 & \cos\beta \\ \cos\gamma & \cos\beta & 1 \end{vmatrix} &= (1-\cos^2\beta) - \cos\alpha(\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma) + \cos\gamma(\cos\alpha\cos\beta - \cos\gamma) \\ &= 1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma).\end{aligned}$$

Puisque $\Gamma(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \geq 0$, on a donc $1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \geq \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$.

(Ici, il y a une erreur d'énoncé : il faut lire « Que se passe-t-il dans le cas où les points A, B et C sont sur un même **grand** cercle ? »)

Si les points A, B et C sont sur un même grand cercle, les points O, A, B et C sont coplanaires et la famille $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ est donc liée. Dans ce cas, d'après 3.a., on a $1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$.

5. Interprétation géométrique de la matrice de GRAM

a. Soient a, b et y trois vecteurs de E_3 tels que le vecteur a soit orthogonal à la fois au vecteur b et au vecteur y.

$$\begin{aligned}\Gamma(a+b, y) &= \begin{vmatrix} \|a+b\|^2 & (a+b)|y \\ (a+b)|y & \|y\|^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \|a\|^2 + \|b\|^2 & b|y \\ b|y & \|y\|^2 \end{vmatrix} = \|a\|^2\|y\|^2 + (\|b\|^2\|y\|^2 - (b|y)^2) \\ &= \Gamma(a, y) + \Gamma(b, y).\end{aligned}$$

b. Le vecteur $a = x - z = x - p_F(x)$ est orthogonal à la fois au vecteur $b = z$ et au vecteur y. D'après a., on a alors

$$\Gamma(x, y) = \Gamma((x-z) + z, y) = \Gamma(x-z, y) + \Gamma(z, y) = \Gamma(x-z, y) \text{ (puisque la famille } (z, y) \text{ est liée et d'après 3.a.).}$$

c. Soit H le projeté orthogonal de B sur la droite (AC). Le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est alors le projeté orthogonal du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur $F = \text{Vect}(\overrightarrow{AC})$ et donc

$$\frac{1}{2}\sqrt{\Gamma(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} = \frac{1}{2}\sqrt{\Gamma(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AC})} = \frac{1}{2}\sqrt{\Gamma(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{AC})} = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} HB^2 & 0 \\ 0 & AC^2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}BH.AC = \text{aire de } ABC$$

6. **a.** Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont deux à deux orthogonaux et donc

$$\sqrt{\Gamma(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})} = \sqrt{\begin{vmatrix} AB^2 & 0 & 0 \\ 0 & AC^2 & 0 \\ 0 & 0 & AD^2 \end{vmatrix}} = AB.AC.AD,$$

qui est bien le volume du parallélépipède rectangle.

b. Un « bon » algorithme en français semble être :

1) stocker les coordonnées de A, B, C et D,
2) calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$,
3) calculer le déterminant de la famille $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ et stocker sa valeur absolue dans une mémoire V,
4) si $V = 0$, faire afficher « les points A, B, C et D sont coplanaires et si $V \neq 0$, faire afficher « le volume est V ».

c. $V = \text{abs}([\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}])$.

Pour i., $V = \text{abs}\begin{vmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & -4 & -3 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = |3.(6+8)| = 42$.

Pour ii., $V = \text{abs}\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 5 & 4 & 3 \\ -9 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \text{abs}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 13 & 4 & -1 \\ -13 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Les points sont coplanaires.

Pour iii., $V = \text{abs}\begin{vmatrix} -8 & -17/2 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -5/2 & -3/2 & -3/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\text{abs}(-8(3) - 1(21/2) - 5(-31/2)) = \frac{43}{2}$.

II. POINTS EQUIDISTANTS SUR UNE SPHERE EUCLIDIENNE

7. Résultats préliminaires

a. Soit $(i,j) \in [\![1,m]\!]$ tel que $i \neq j$. $\|x_i - x_j\|^2 = \|x_i\|^2 - 2(x_i|x_j) + \|x_j\|^2 = 2 - 2t$ et donc, si $t > 1$ le problème n'a pas de solution et

$$\text{si } t < 1,\ \|x_i - x_j\| = \sqrt{2(1-t)}.$$

b. J est symétrique réelle et est donc diagonalisable (dans $\mathbb{R}$). On en déduit que les valeurs propres de J sont réelles et que l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre de J est exactement la dimension du sous-espace propre correspondant.
J est de rang $1 < m$. Donc, 0 est valeur propre de J et la dimension du sous-espace propre correspondant est $m-1$. J admet donc 0 pour valeur propre d'ordre $m-1$. La valeur propre manquante λ est fournie par la trace de J :

$$m = \mathrm{Tr}(J) = (m-1).0 + \lambda = \lambda,$$

et $m-1$ est valeur propre simple de J.

Le polynôme caractéristique de J est donc le polynôme de degré m, de coefficient dominant $(-1)^m$, dont les racines sont 0 (d'ordre $m-1$) et m (d'ordre 1).

$$\boxed{\chi_J = (-1)^m X^{m-1}(X-m).}$$

c. Si $(x_1, \dots, x_m)$ est solution du problème,

$$\Gamma(x_1,\dots,x_m) = \begin{vmatrix} 1 & t & \dots & \dots & t \\ t & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & t \\ t & \dots & \dots & t & 1 \end{vmatrix} = \det(tJ + (1-t)I).$$

Si $t = 0$, $\Gamma(x_1,\dots,x_m) = 1 = (1-t)^{m-1}(1+(m-1)t)$ et si $t \neq 0$,

$$\begin{aligned}\Gamma(x_1,\dots,x_m) &= \det(tJ+(1-t)I) = t^m\det(J - (1-\frac{1}{t})I) = t^m\chi_J(1-\frac{1}{t}) = t^m(-1)^m(1-\frac{1}{t})^{m-1}(1-\frac{1}{t}-m) \\ &= (-1)^m(t-1)^{m-1}(t-1-mt) = (1-t)^{m-1}((m-1)t+1)\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{1\},\ \Gamma(x_1,\dots,x_m) = (1-t)^{m-1}((m-1)t+1).}$$

8. Conditions nécessaires

a. Puisque $(x_1,\dots,x_m)$ est libre, on a déjà $m = \mathrm{card}(x_1,\dots,x_m) \leq \dim E = n$. 7.a. montre que $t < 1$.
3.b. impose $(1-t)^{m-1}((m-1)t+1) = \Gamma(x_1,\dots,x_m) > 0$ et donc $(m-1)t+1 > 0$ ou enfin $t > \dfrac{-1}{m-1}$.

Ainsi, si $(x_1,\dots,x_m)$ est libre, alors $m \leq n$ et $t \in]\dfrac{-1}{m-1}, 1[$.

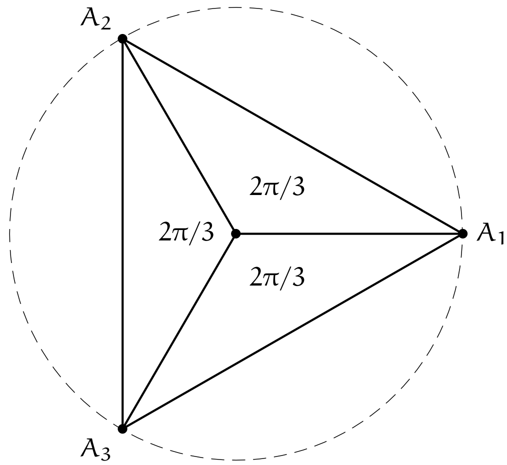
b. Si la famille $(x_1,\dots,x_m)$ est liée, alors d'après 3.a., $\Gamma(x_1,\dots,x_m) = 0$ et donc $t = \frac{-1}{m-1}$ (car $t \neq 1$). Mais alors, la famille $(x_1,\dots,x_{m-1})$ étant solution du problème $P(m-1,t)$, on a $\Gamma(x_1,\dots,x_{m-1}) = (1-t)^{m-2}((m-2)t+1) \neq 0$ (car $t = \frac{-1}{m-1}$) et la famille $(x_1,\dots,x_{m-1})$ est libre. On en déduit que $m-1 \leq n$ et donc que $m \leq n+1$.

c. Supposons que la famille $(y_1,\dots,y_5)$ soit une famille de E_3 de vecteurs tous non nuls formant deux à deux un même angle obtus $\theta \in]\frac{\pi}{2},\pi[$. Alors, la famille $(y_i/\|y_i\|)_{1\leq i\leq 5}$ est solution du problème $P(5,\cos\theta)$. D'après a. et b., on devrait alors avoir $5 \leq 4$ ce qui n'est pas.
Donc, il n'existe pas 5 vecteurs en dimension 3 formant deux à deux un même angle obtus.

9. Exemple du cas $n = 2$

Puisque $m \geq 3$ et que $n = 2$, la famille $(\overrightarrow{OA_1}, \ldots, \overrightarrow{OA_m})$ est nécessairement liée. 8.b. impose alors $t = \frac{-1}{3-1} = -\frac{1}{2}$ et $m \leq 2 + 1 = 3$. Ceci impose donc $(m, t) = (3, -\frac{1}{2})$.

Réciproquement, si $(m, t) = (3, -\frac{1}{2})$, on prend trois points A_1, A_2 et A_3 formant un triangle équilatéral inscrit dans un cercle de centre O et de rayon 1. Les points A_1, A_2 et A_3 sont alors solution du problème $P(m, t)$.



10. Exemple du cas $n = 3$

a. D'après 9., il existe trois points B_1, B_2, B_3 du plan H tels que la famille $(y_1, y_2, y_3) = (\overrightarrow{OB_1}, \overrightarrow{OB_2}, \overrightarrow{OB_3})$ soit solution du problème $P(3, -1/2)$.

b. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$. Alors,

$$a(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3) + b(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)u = 0.$$

On calcule le produit scalaire du vecteur précédent avec les vecteurs y_1, y_2, y_3 et u. En tenant compte du fait que a et b sont non nuls, on obtient le système

$$\begin{cases} \lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2 - \frac{1}{2}\lambda_3 = 0 \quad \text{(I)} \\ -\frac{1}{2}\lambda_1 + \lambda_2 - \frac{1}{2}\lambda_3 = 0 \quad \text{(II)} \\ -\frac{1}{2}\lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad \text{(III)} \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad \text{(IV)} \end{cases}$$

(I) et (IV) fournissent $\lambda_1 - \frac{1}{2}(-\lambda_1) = 0$ et donc $\lambda_1 = 0$. De même, (II) et (IV) fournissent $\lambda_2 = 0$ et (III) et (IV) fournissent $\lambda_3 = 0$. Ainsi, la famille (x_1, x_2, x_3) est libre.

Ensuite, $\|x_1\|^2 = \|ay_1 + bu\|^2 = a^2\|y_1\|^2 + 2ab(y_1|u) + b^2\|u\|^2 = a^2 + b^2 = \frac{2-2t}{3} + \frac{2t+1}{3} = 1$. Donc, $\|x_1\| = 1$, et de même $\|x_2\| = \|x_3\| = 1$.
Enfin, $(x_1|x_2) = a^2(y_1|y_2) + ab(y_1|u) + ab(y_2|u) + b^2\|u\|^2 = -\frac{1}{2}a^2 + b^2 = -\frac{1}{2}\frac{2-2t}{3} + \frac{2t+1}{3} = t$. Donc, $(x_1, x_2) = t$ et de même, $(x_1|x_3) = (x_2|x_3) = t$.

Finalement, (x_1, x_2, x_3) est une famille libre de solution de $P(3, t)$.

c. (Erreur d'énoncé : il faut probablement lire « condition nécessaire et suffisante ») S'il existe trois points A_1, A_2 et A_3 solution du problème, la question 8. fournit une condition nécessaire sur α :
ou bien la famille $(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_3})$ est libre et dans ce cas, nécessairement $-\frac{1}{2} < t = \cos\alpha < 1$, ou encore $0 < \alpha < \frac{2\pi}{3}$,
ou bien la famille $(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_3})$ est liée et nécessairement $t = -\frac{1}{2}$ ou encore $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.
Finalement, nécessairement $\alpha \in]0, \frac{2\pi}{3}]$.

La question 10.b. montre que si $\alpha \in]0, \frac{2\pi}{3}[$, il existe effectivement trois points solutions et si $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, la question 10.a. montre qu'il existe aussi trois points solutions. La condition $\alpha \in]0, \frac{2\pi}{3}]$ est donc suffisante.

(Remarque. La question 4. imposait $1+2\cos^3\alpha \geq 3\cos^2\alpha$ et donc $(\cos\alpha-1)^2(2\cos\alpha+1) \geq 0$ et finalement $\cos\alpha \geq -\frac{1}{2}$.)

III. THEOREMES D'APOLLONIUS

11. Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormale pour le produit scalaire $(\ |\ )$. Soient A et B les matrices des familles (a_i) et (b_i) respectivement dans la base $\mathscr{B}$. La relation de CHASLES pour les matrices de passage s'écrit $B = AP$. Puisque, les bases (a_i) et (b_i) sont orthonormales pour un même produit scalaire, la matrice P est orthogonale, et donc ${}^tP = P^{-1}$. Mais alors,

$$G(b_1, \ldots, b_n) = {}^tBB = {}^t(AP)AP = {}^tP^tAAP = P^{-1}G(a_1, \ldots, a_n)P.$$

Ainsi, les matrices $G(a_1, \ldots, a_n)$ et $G(b_1, \ldots, b_n)$ sont semblables. Ces deux matrices ont en particulier même trace ce qui fournit

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}(a_i|a_i) = \sum_{i=1}^{n}(b_i|b_i).}$$

12. **a.** $<\ ,\ >$ est clairement une forme bilinéaire, symétrique définie positive et donc un produit scalaire sur E_2.

b. Les rayons $U_0 = (a, 0)$ et $V_0 = (0, b)$ fournissent un couple de diamètres conjugués.

c. Dans le repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, orthonormé pour $(\ |\ )$, $\mathcal{C}$ admet pour équation cartésienne $f(x, y) = 0$ où $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$. Puisque f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, on sait que la tangente en un point $M_0(x_0, y_0)$ de $\mathcal{C}$ qui n'est pas un point critique de f admet pour vecteur normal $\overrightarrow{\text{grad}\, f}(M_0)$. Puisque $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est orthonormé, les coordonnées de $\overrightarrow{\text{grad}\, f}(M_0)$ sont les dérivées partielles de f en M_0, ou encore

$$\overrightarrow{\text{grad} f}(M_0)\begin{pmatrix} \frac{2x_0}{a^2} \\ \frac{2y_0}{b^2} \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0} \text{ car } O \notin \mathcal{C} \text{ et donc } M_0 \neq O.$$

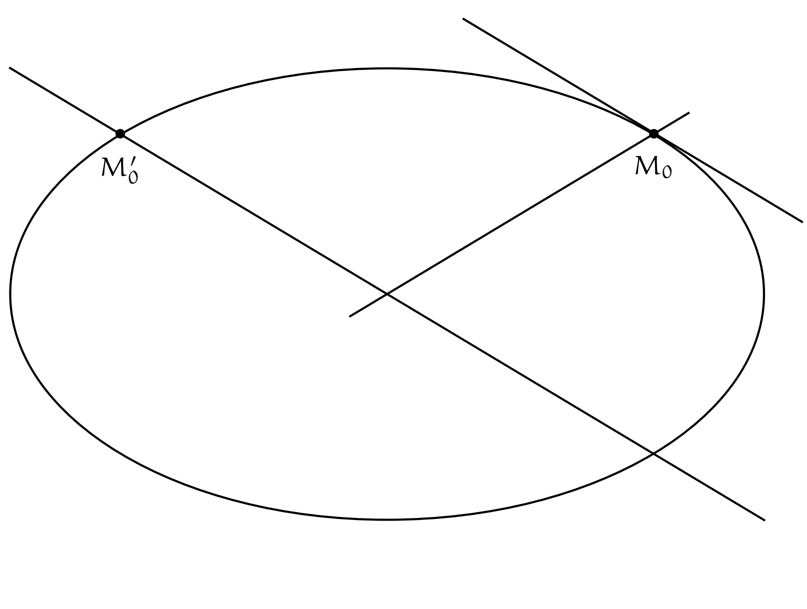
Une équation de la tangente en M_0 à $\mathcal{C}$ est donc $\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) = 1$, ou encore $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}$, ou enfin,

$$\boxed{\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.}$$

La droite D admet alors pour équation cartésienne dans $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$: $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 0$. Ceci se lit :

$$M(x, y) \in (D) \Leftrightarrow < \overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM} >= 0.$$

Si $M_0'(x_0', y_0')$ est un point de $(D) \cap \mathcal{C}$, alors les vecteurs $\overrightarrow{OM_0}$ et $\overrightarrow{OM_0'}$ sont orthogonaux pour $<\ ,\ >$ d'après ce qui précède. D'autre part, puisque M_0 et M_0' sont sur $\mathcal{C}$, on a $\frac{x_0}{a^2} + \frac{y_0}{b^2} = \frac{x_0'}{a^2} + \frac{y_0'}{b^2} = 1$, ce qui signifie que les vecteurs $\overrightarrow{OM_0}$ et $\overrightarrow{OM_0'}$ sont unitaires pour $<\ ,\ >$. Finalement la famille $(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_0'})$ est orthonormée pour $<\ ,\ >$ ou encore les rayons $\overrightarrow{OM_0}$ et $\overrightarrow{OM_0'}$ sont des diamètres conjugués.



d.

i. Soient M et M' deux points de $\mathcal{C}$ tels que les rayons $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ soient des diamètres conjugués et soient A et B les points de coordonnées respectives $(a, 0)$ et $(0, b)$. $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ sont deux couples de diamètres conjugués, ou encore $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ sont deux bases orthonormées pour $<\ ,\ >$. D'après 11., on a

$$OM^2 + OM'^2 = OA^2 + OB^2 = a^2 + b^2.$$

ii. Toujours d'après 11., les matrices $G(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ et $G(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ sont semblables. Elles ont donc même déterminant. D'après 5.c., l'aire du parallélogramme « formé par O, M et M' » vaut

$$\sqrt{\Gamma(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})} = \sqrt{\Gamma(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})} = \sqrt{a^2 b^2} = ab.$$

IV. RECHERCHE D'UNE ISOMETRIE AFFINE

13. a. Pour $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$, $u(x_i)|u(x_j) = y_i|y_j = x_i|x_j$ car $G(x_1, \ldots, x_n) = G(y_1, \ldots, y_n)$.
Pour $(i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![p+1, n]\!]$, $u(x_i)|u(e_j) = y_i|e'_j = 0 = x_i|e_j$.
Pour $(i, j) \in [[p+1, n]]^2$, $u(e_i)|u(e_j) = e'_i|e'_j = 0 = e_i|e_j$.

Soit alors $(x, x') \in E_n^2$. Posons $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i + \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i$ et $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda'_i x_i + \sum_{i=p+1}^{n} \lambda'_i e_i$. On a :

$$\begin{aligned}
u(x)|u(x') &= (\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u(x_i) + \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i u(e_i))|(\sum_{i=1}^{p} \lambda'_i u(x_i) + \sum_{i=p+1}^{n} \lambda'_i u(e_i)) \\
&= \sum_{1\leq i,j\leq p} \lambda_i \lambda'_j u(x_i)|u(x_j) + \sum_{\substack{p+1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \lambda_i \lambda'_j u(e_i)|u(x_j) + \sum_{\substack{1\leq i\leq p \\ p+1\leq j\leq n}} \lambda_i \lambda'_j u(x_i)|u(e_j) + \sum_{p+1\leq i,j\leq n} \lambda_i \lambda'_j u(e_i)|u(e_j) \\
&= \sum_{1\leq i,j\leq p} \lambda_i \lambda'_j x_i|x_j + \sum_{\substack{p+1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \lambda_i \lambda'_j e_i|x_j + \sum_{\substack{1\leq i\leq p \\ p+1\leq j\leq n}} \lambda_i \lambda'_j x_i|e_j + \sum_{p+1\leq i,j\leq n} \lambda_i \lambda'_j e_i|e_j \\
&= x|x'.
\end{aligned}$$

Finalement, u conserve le produit scalaire et donc u est un automorphisme orthogonal.

b. Tout d'abord, $u(V) = u(\text{Vect}(x_1, \ldots, x_p)) = \text{Vect}(u(x_1), \ldots, u(x_p)) = \text{Vect}(y_1, \ldots, y_p) = W$.
Soit $i \in [\![p+1, n]\!]$. x_i est dans V et donc $u(x_i)$ est dans W de même que y_i. Donc, $y_i - u(x_i)$ est dans W.

Soit $j \in [\![1, p]\!]$.

$$y_j|(y_i - u(x_i)) = y_j|y_i - y_j|u(x_i) = y_j|y_i - u(x_j)|u(x_i) = y_j|y_i - u(x_j)|u(x_i) = y_j|y_i - x_j|x_i = 0,$$

car $G(x_1, \ldots, x_n) = G(y_1, \ldots, y_n)$. Ainsi, $y_i - u(x_i) \in \{y_1, \ldots, y_p\}^\perp = W^\perp$.

c. Pour $i \in [\![1, p]\!]$, on a déjà $u(x_i) = y_i$ et si $i \in [\![p+1, n]\!]$, $y_i - u(x_i) \in W \cap W^\perp = \{0\}$ et encore une fois, $u(x_i) = y_i$.

Ainsi, si $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ sont deux familles de vecteurs telles que $G(x_1, \ldots, x_n) = G(y_1, \ldots, y_n)$, alors il existe un automorphisme orthogonal u tel que, pour $i \in [[1, n]]$, $u(x_i) = y_i$.

14. a. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]$.

$$\begin{aligned}
x_i|x_j = \overrightarrow{A_1A_i}|\overrightarrow{A_1A_j} &= \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{A_1A_i}\|^2 + \|\overrightarrow{A_1A_j}\|^2 - \|\overrightarrow{A_1A_j} - \overrightarrow{A_1A_i}\|^2) \\
&= \frac{1}{2}(A_1A_i^2 + A_1A_j^2 - A_iA_j^2) = \frac{1}{2}(B_1B_i^2 + B_1B_j^2 - B_iB_j^2) \\
&= y_i|y_j
\end{aligned}$$

b. D'après 13., il existe un automorphisme orthogonal u tel que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u(\overrightarrow{A_1A_i}) = \overrightarrow{B_1B_i}$. Soit f l'application affine de partie linéaire u telle que $f(A_1) = B_1$. Puisque u est orthogonal, f est une isométrie. D'autre part, pour $i \in [\![1, n]\!]$,

$$f(A_i) = f(A_1) + u(\overrightarrow{A_1A_i}) = B_1 + \overrightarrow{B_1B_i} = B_i.$$

On a donc trouvé une isométrie f telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f(A_i) = B_i$.

