
MATHEMATIQUES 2

PARTIE I

I.1 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ puis $\lambda' = -\lambda - 1$. Alors $\lambda'(\lambda' + 1) = (-\lambda - 1)(-\lambda) = \lambda(\lambda + 1)$. Les équations (\mathcal{E}_λ) et $(\mathcal{E}_{-\lambda-1})$ sont donc les mêmes.

I.2 On note R_a le rayon de la série entière $\sum a_n x^n$ et on suppose à priori que $R_a > 0$. Pour $x \in]-R_a, R_a[$, on a alors

$$\begin{aligned} x(x+1)y''(x) + (2x+1)y'(x) - \lambda(\lambda+1)y(x) &= (x^2+x) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + (2x+1) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \lambda(\lambda+1) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \lambda(\lambda+1) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \lambda(\lambda+1) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n(n-1) + 2n - \lambda(\lambda+1))a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (n(n-1) + n)a_n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 + n - \lambda^2 - \lambda)a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n-\lambda)(n+\lambda+1)a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2 a_{n+1} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+1)^2 a_{n+1} - (\lambda-n)(n+\lambda+1)a_n] x^n \end{aligned}$$

Par suite, sous l'hypothèse $R_a > 0$,

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (\mathcal{E}_\lambda) \text{ sur }]-R_a, R_a[&\Leftrightarrow \forall x \in]-R_a, R_a[, \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+1)^2 a_{n+1} - (\lambda-n)(n+\lambda+1)a_n] x^n = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, (n+1)^2 a_{n+1} - (\lambda-n)(n+\lambda+1)a_n \text{ (par unicité des coefficients d'une série entière)} \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{(\lambda-n)(n+\lambda+1)}{(n+1)^2} a_n. \end{aligned}$$

I.3 I.3.1 Soient $\lambda \in [-\frac{1}{2}, +\infty[$ et $d \in \mathbb{N}$. L'équation (\mathcal{E}_λ) admet une solution polynomiale de degré d si et seulement si il est possible de choisir a_0 tel que $a_d \neq 0$ et $\forall n \geq d+1, a_n = 0$. Comme $a_{d+1} = \frac{(\lambda-d)(d+\lambda+1)}{(d+1)^2} a_d$, ceci impose $(\lambda-d)(d+\lambda+1) = 0$ puis $\lambda = d$ ou $\lambda = -1-d$ et finalement $\lambda = d$ (car $\lambda \geq -\frac{1}{2}$ et $-1-d \leq -1$).

Réciproquement, si $\lambda = d$, soit a la suite définie par $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{(d-n)(n+d+1)}{(n+1)^2} a_n$. Pour $n < d$, on a $\frac{(d-n)(n+d+1)}{(n+1)^2} \neq 0$ et donc par récurrence, $a_n \neq 0$ pour $n \leq d$. En particulier, $a_d \neq 0$. Puis $a_{d+1} = \frac{(d-d)(d+d+1)}{(d+1)^2} a_d = 0$ et donc par récurrence $\forall n \geq d+1, a_n = 0$. La fonction y associée est donc un polynôme de degré d . Enfin, $R_a = +\infty$ ce qui valide le calcul de la question précédente et montre que y est solution de (\mathcal{E}_d) sur \mathbb{R} .

$\forall d \in \mathbb{N}, (\mathcal{E}_\lambda)$ admet une solution polynomiale de degré d si et seulement si $\lambda = d$.

I.3.2 Si φ_d existe, on a nécessairement $\alpha_0 = 1$ et réciproquement, la question précédente montre qu'en prenant $\alpha_0 = 1$, on obtient un polynôme de degré d solution de (\mathcal{E}_d) sur \mathbb{R} et prenant la valeur 1 en 0.

I.3.3 Si $d = 1$, on a $\alpha_1 = \frac{(1+1)(1-0)}{1^2} \alpha_0 = 2$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_1(x) = 2x + 1$.

I.3.4 Posons $F = \frac{8X^2 + 8X + 1}{X(X+1)(2X+1)}$ et $G = \frac{1}{X(X+1)(2X+1)^2}$.

• $a = \lim_{x \rightarrow 0} xF(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^2 + 8x + 1}{(x+1)(2x+1)} = 1$, $b = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)F(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{8x^2 + 8x + 1}{x(2x+1)} = 1$ et

$c = \lim_{x \rightarrow -1/2} (2x+1)F(x) = \lim_{x \rightarrow -1/2} \frac{8x^2 + 8x + 1}{x(x+1)} = \frac{2-4+1}{-\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = 4$.

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -\frac{1}{2}\}, \frac{8x^2 + 8x + 1}{x(x+1)(2x+1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{4}{2x+1}$.

• $a' = \lim_{x \rightarrow 0} xG(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x+1)(2x+1)^2} = 1$, $b' = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)G(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x(2x+1)^2} = -1$ puis

$G - \frac{1}{X} + \frac{1}{X+1} = \frac{1}{X(X+1)(2X+1)^2} - \frac{1}{X} + \frac{1}{X+1} = \frac{1 - (X+1)(2X+1)^2 + X(2X+1)^2}{X(X+1)(2X+1)^2} = \frac{1 - (2X+1)^2}{X(X+1)(2X+1)^2}$
 $= \frac{-4X^2 - 4X}{X(X+1)(2X+1)^2} = \frac{-4X(X+1)}{X(X+1)(2X+1)^2} = \frac{-4}{(2X+1)^2}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -\frac{1}{2}\}, \frac{8x^2 + 8x + 1}{x(x+1)(2x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(2x+1)^2}$.

Résolvons alors l'équation (\mathcal{E}_1) sur $]0, +\infty[$. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans \mathbb{R} .

Posons $f = \varphi_1 z$ ou encore pour $x \in]0, +\infty[$, posons $z(x) = \frac{f(x)}{(2x+1)}$. z est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$,

$x(x+1)f''(x) + (2x+1)f'(x) - 2f(x) = x(x+1)[(2x+1)z''(x) + 4z'(x)] + (2x+1)[(2x+1)z'(x) + 2z(x)] - 2(2x+1)z(x)$
 $= x(x+1)(2x+1)z''(x) + [4x(x+1) + (2x+1)^2]z'(x)$
 $= x(x+1)(2x+1)z''(x) + (8x^2 + 8x + 1)z'(x)$.

Ensuite,

f solution de (\mathcal{E}_1) sur $]0, +\infty[\Leftrightarrow \forall x > 0, x(x+1)(2x+1)z''(x) + (8x^2 + 8x + 1)z'(x) = 0$

$\Leftrightarrow \forall x > 0, z''(x) + \frac{8x^2 + 8x + 1}{x(x+1)(2x+1)}z'(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x > 0, z''(x) + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{4}{2x+1}\right)z'(x) = 0$

$\Leftrightarrow \forall x > 0, \exp(\ln x + \ln(x+1) + 2\ln(2x+1))z''(x) +$

$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{4}{2x+1}\right)\exp(\ln x + \ln(x+1) + 2\ln(2x+1))z'(x) = 0$

$\Leftrightarrow \forall x > 0, (x(x+1)(2x+1)^2 z')'(x) = 0 \Leftrightarrow \exists \mu \in \mathbb{R} / \forall x > 0 z'(x) = \frac{\mu}{x(x+1)(2x+1)^2}$

$\Leftrightarrow \exists \mu \in \mathbb{R} / \forall x > 0 z'(x) = \mu \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(2x+1)^2}\right)$

$\Leftrightarrow \exists (\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2 / \forall x > 0 z(x) = \mu(\ln x - \ln(x+1) + \frac{2}{2x+1}) + \nu$

et donc

$$f \text{ solution de } (\mathcal{E}_1) \text{ sur }]0, +\infty[\Leftrightarrow \exists (\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2 / \forall x > 0 \frac{f(x)}{2x+1} = \mu \left(\ln \left(\frac{x}{x+1} \right) + \frac{2}{2x+1} \right) + \nu$$

$$\Leftrightarrow \exists (\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2 / \forall x > 0 f(x) = \mu \left((2x+1) \ln \left(\frac{x}{x+1} \right) + 2 \right) + \nu(2x+1).$$

Les solutions de \mathcal{E}_1 sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \mu \left((2x+1) \ln \left(\frac{x}{x+1} \right) + 2 \right) + \nu(2x+1)$, $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2$.

I.4 I.4.1 Si $a_0 = 0$ alors tous les a_n sont nuls et y est identiquement nulle. Si $a_0 \neq 0$, $y(0) = a_0 \neq 0$ et y n'est pas identiquement nulle. Finalement y n'est pas identiquement nulle si et seulement si $a_0 \neq 0$. Dans ce cas, puisque $\lambda \geq -\frac{1}{2}$ et que $\lambda \notin \mathbb{N}$, aucun des rapports $\frac{(\lambda - n)(n + \lambda + 1)}{(n + 1)^2}$ n'est nul et donc par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$.

Soient $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$\left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n} \right| = \frac{|\lambda - n|(n + \lambda + 1)}{(n + 1)^2} |x|.$$

Quand n tend vers $+\infty$, cette dernière expression tend vers $|x|$. Donc, d'après la règle de d'ALEMBERT, si $|x| < 1$ la série de terme général a_nx^n est absolument convergente et si $|x| > 1$ la série de terme général a_nx^n est grossièrement divergente. On en déduit que

$$R_a = 1.$$

I.4.2 Puisque $R_a > 0$, les calculs faits à la question I.2 sont valides. De plus $y(0) = 1 \Leftrightarrow a_0 = 1$. Il existe donc une et une seule solution de (\mathcal{E}_λ) développable en série entière sur $] -1, 1[$ telle que $y(0) = 1$ à savoir la fonction φ_λ définie par

$$\forall x \in] -1, 1[, \varphi_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n \text{ où } a_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{(\lambda - n)(n + \lambda + 1)}{(n + 1)^2} a_n.$$

I.4.3 Quand $\lambda = -\frac{1}{2}$, on obtient pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$a_{n+1} = \frac{\left(-\frac{1}{2} - n\right) \left(n - \frac{1}{2} + 1\right)}{(n + 1)^2} a_n = -\left(\frac{2n + 1}{2n + 2}\right)^2 a_n,$$

et donc pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} a_n &= -\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2 \times -\left(\frac{2n-3}{2n-2}\right)^2 \times \dots \times -\left(\frac{2 \cdot 1 - 1}{2}\right)^2 \times a_0 \\ &= (-1)^n \left(\frac{(2n) \times (2n-1) \times (2n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1}{((2n) \times (2n-2) \times \dots \times 4 \times 2)^2} \right)^2 \\ &= (-1)^n \left(\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \right)^2 = \frac{(-1)^n (2n)^2}{2^{4n}} \binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

ce qui reste vrai pour $n = 0$.

$$\forall x \in] -1, 1[, \varphi_{-\frac{1}{2}}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)^2}{2^{4n}} \binom{2n}{n} x^n.$$

Quand $\lambda = \frac{1}{2}$, on obtient pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$a_{n+1} = \frac{\left(\frac{1}{2} - n\right) \left(n + \frac{1}{2} + 1\right)}{(n+1)^2} a_n = -\frac{(2n-1)(2n+3)}{(2n+2)^2} a_n,$$

et donc pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{(2n-3)(2n+1)}{(2n)^2} \times -\frac{(2n-5)(2n-1)}{(2n-2)^2} \times \dots \times -\frac{(2 \times 0 - 1)(2 \times 0 + 3)}{(2)^2} \times a_0 \\ &= (-1)^n \frac{((2n-3) \times (2n-5) \times \dots \times 1 \times -1) \times ((2n+1) \times (2n-1) \times \dots \times 3)}{((2n) \times (2n-2) \times \dots \times 4 \times 2)^2} \\ &= (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{2n-1} \frac{((2n-1) \times (2n-3) \times \dots \times 3)^2}{((2n) \times (2n-2) \times \dots \times 4 \times 2)^2} = (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{2n-1} \frac{((2n) \times (2n-1) \times \dots \times 3 \times 2)^2}{((2n) \times (2n-2) \times \dots \times 4 \times 2)^4} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{2^{4n}} \frac{2n+1}{2n-1} \frac{(2n)!^2}{(n!)^4}. \end{aligned}$$

ce qui est reste vrai pour $n = 0$ car $\frac{(-1)^{-1}}{2^0} \frac{1}{-1} \frac{(0)!^2}{(0!)^4} = 1$.

$$\forall x \in]-1, 1[, \varphi_{\frac{1}{2}}(x) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{4n}} \frac{2n+1}{2n-1} \binom{2n}{n}^2 x^n.$$

PARTIE II

II.1 Soient $a > 0$ puis $f : [-1, a] \times [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$.
 $(x, t) \mapsto \sqrt{1 + x \sin^2 t}$

• Soit $x \in [-1, a]$. Pour tout réel $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $1 + x \sin^2 t \geq 1 - \sin^2 t \geq 0$ et donc la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Ainsi, pour tout réel x de $[-1, a]$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

• De même, pour tout réel $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur $[-1, a]$.

• Enfin, pour $(x, t) \in [-1, a] \times [0, \frac{\pi}{2}]$, $|f(x, t)| = \sqrt{1 + x \sin^2 t} \leq \sqrt{1 + a \sin^2 t} = f(a, t) = \varphi(t)$ où φ est continue par morceaux et intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction ψ est définie et continue sur tout segment de $[-1, +\infty[$ et donc

la fonction ψ est continue sur $[-1, +\infty[$.

II.2 On se donne deux réels a et b tels que $-1 < a < b$ et on pose $f : [a, b] \times [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$.
 $(x, t) \mapsto \sqrt{1 + x \sin^2 t}$

• f admet des dérivées partielles à tout ordre par rapport à x et pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $(x, t) \in [a, b] \times [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) &= (\sin^2 t)^k \frac{1}{2} \times -\frac{1}{2} \times \dots \times \left(\frac{1}{2} - (k-2)\right) \times \left(\frac{1}{2} - (k-1)\right) (1 + x \sin^2 t)^{\frac{1}{2}-k} \\ &= \frac{(-1)^{k-1}}{2^k} \times 1 \times 3 \times \dots \times (2k-3) \frac{\sin^{2k} t}{(1 + x \sin^2 t)^{k-\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

• De nouveau, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, pour chaque x de $[a, b]$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et pour chaque t de $[0, \frac{\pi}{2}]$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est continue sur $[a, b]$.

- Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $(x, t) \in [a, b] \times [0, \frac{\pi}{2}]$, on a

$$\left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| = \frac{1}{2^k} \times 1 \times 3 \times \dots \times (2k-3) \frac{\sin^{2k} t}{(1+x \sin^2 t)^{k-\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{2^k} \times 1 \times 3 \times \dots \times (2k-3) \frac{\sin^{2k} t}{(1+a \sin^2 t)^{k-\frac{1}{2}}} = \varphi_k(t),$$

où φ_k est une fonction continue par morceaux sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

D'après une généralisation du théorème de LEIBNIZ, ψ est de classe C^∞ sur tout segment de $] -1, +\infty[$ et donc sur $] -1, +\infty[$ et ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation sous le signe somme.

II.3 II.3.1 On sait que pour $u \in] -1, 1[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$(1+u)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} u^n.$$

On prend en particulier $\alpha = \frac{1}{2}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\begin{aligned} \binom{\frac{1}{2}}{n} &= \frac{\frac{1}{2} \times (\frac{1}{2} - 1) \times \dots \times (\frac{1}{2} - (n-1))}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n!} (2-1) \times (2 \times 2 - 1) \times \dots \times (2(n-1) - 1) \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n!} \times \frac{(1 \times 3 \times \dots \times (2n-5) \times (2n-3)) \times (2 \times 4 \times \dots \times (2n-4) \times (2n-2) \times (2n-1) \times (2n))}{2 \times 4 \times \dots \times (2n-4) \times (2n-2) \times (2n-1) \times (2n)} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n!} \times \frac{(2n)!}{(2n-1) \times 2^n n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2}. \end{aligned}$$

ce qui reste vrai pour $n = 0$.

$$\forall u \in] -1, 1[, \sqrt{1+u} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} u^n.$$

II.3.2 D'après la question précédente, pour $(x, t) \in] -1, 1[\times] 0, \frac{\pi}{2}]$, puisque $x \sin^2 t \in] -1, 1[$, on a

$$\sqrt{1+x \sin^2 t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \sin^{2n} t x^n.$$

Soit $x \in] -1, 1[$. Pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n(t) = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \sin^{2n} t x^n$.

- Chaque fonction f_n est continue sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$|f_n(t)| = \left| \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \sin^{2n} t x^n \right| = \frac{1}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \sin^{2n} t x^n \leq \frac{1}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} x^n.$$

Cette dernière expression est le terme général d'une série numérique convergente (de somme $-\sqrt{1-x}$) et donc la série de fonctions de terme général f_n est normalement et donc uniformément convergente sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$. On peut donc intégrer terme à terme et on obtient :

$$\psi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \sin^{2n} t x^n \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t dt \right) x^n.$$

$$\forall x \in] -1, 1[, \psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t dt \right) x^n.$$

II.3.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une intégration parties fournit

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sin^{2n-1} t \, dt = [-\cos t \sin^{2n-1} t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos t)((2n-1) \cos t \sin^{2n-2} t) \, dt \\ &= (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^{2n-2} t \, dt = (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t) \sin^{2n-2} t \, dt \\ &= (2n-1)(I_{n-1} - I_n). \end{aligned}$$

Par suite, $2nI_n = (2n-1)I_{n-1}$. On a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}.$$

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dt = \frac{\pi}{2} \text{ puis pour } n \in \mathbb{N}^*$$

$$I_n = \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \dots \times \frac{1}{2} \times I_0 = \frac{(2n) \times (2n-1) \times \dots \times 2 \times 1}{((2n) \times (2n-2) \times \dots \times 2)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \times \frac{\pi}{2},$$

ce qui reste vrai pour $n = 0$. On a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \times \frac{\pi}{2}.$$

Mais alors

$$\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t \, dt \right) = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \times \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \right)^2.$$

Par suite,

$$\forall x \in]-1, 1[, \psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \right)^2 x^n.$$

II.3.4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} = \frac{2}{\pi} I_n = \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \dots \times \frac{1}{2} \leq 1 \times 1 \times \dots \times 1 = 1,$$

ce qui reste vrai pour $n = 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \leq 1.$$

II.3.5 Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1, 1[$, posons $\psi_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \right)^2 x^n$. Pour tout réel $x \in]-1, 1[$, on a donc

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \psi_n(x).$$

- Chaque fonction ψ_n est continue et intégrable sur $] - 1, 1[$ car prolongeable par continuité en -1 et en 1 .
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\int_{-1}^1 |\psi_n(x)| \, dx = \frac{1}{2n-1} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \right)^2 \int_{-1}^1 |x|^n \, dx = \frac{2}{(2n-1)(n+1)} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \right)^2 \leq \frac{2}{(2n-1)(n+1)}.$$

Maintenant, puisque $\frac{2}{(2n-1)(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$ quand n tend vers $+\infty$, la série numérique de terme général $\frac{2}{(2n-1)(n+1)}$ converge et on déduit que la série numérique de terme général $\int_{-1}^1 |\psi_n(x)| dx$ converge. On sait alors que l'on peut intégrer terme à terme et on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \psi(x) dx &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-1}^1 \psi_n(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right)^2 \int_{-1}^1 x^n dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right)^2 \frac{1 - (-1)^{n+1}}{n+1} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2p-1}}{2(2p)-1} \left(\frac{(2(2p))!}{2^{2(2p)}((2p)!)^2} \right)^2 \frac{1 - (-1)^{2p+1}}{2p+1} \quad (\text{quand } n \text{ est impair } 1 - (-1)^{n+1} = 1 - 1 = 0) \\ &= - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{4p-1} \left(\frac{(4p)!}{2^{4p}((2p)!)^2} \right)^2 \frac{2}{2p+1} = -2 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(4p-1)(2p+1)} \left(\frac{(4p)!}{2^{4p}((2p)!)^2} \right)^2. \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_{-1}^1 \psi(x) dx = -2 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(4p-1)(2p+1)} \left(\frac{(4p)!}{2^{4p}((2p)!)^2} \right)^2.}$$

II.4 On rappelle que pour $x \in]-1, 1[$,

- $\psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right)^2 x^n.$
- $\varphi_{-\frac{1}{2}}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right)^2 x^n.$
- $\varphi_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{2n-1} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right)^2 x^n.$

Par suite,

$$\varphi_{-\frac{1}{2}}(x) + \varphi_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(-1 + \frac{2n+1}{2n-1} \right) \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right)^2 x^n = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right)^2 x^n = 2\psi(x).$$

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[, \psi(x) = \frac{1}{2}(\varphi_{-\frac{1}{2}}(x) + \varphi_{\frac{1}{2}}(x)).}$$

II.5 On sait que $\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$ et donc

$$\begin{aligned} \ell &= \int_0^{2\pi} \sqrt{b^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t} dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{b^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t} dt \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{b^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t} dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{b^2 \sin^2 t + a^2(1 - \sin^2 t)} dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 + (b^2 - a^2) \sin^2 t} dt \\ &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{b^2 - a^2}{a^2} \sin^2 t} dt. \end{aligned}$$

Maintenant, avec des notations usuelles, on sait que $e^2 = \frac{c^2 a^2 a^2 - b^2}{a^2} = -\frac{b^2 - a^2}{a^2}$ et finalement

$$\ell = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 t} dt = 4a \times \frac{\pi}{2} \psi(-e^2) = 2a\pi\psi(-e^2) = a\pi(\varphi_{-\frac{1}{2}}(-e^2) + \varphi_{\frac{1}{2}}(e^2)).$$

$$\boxed{\ell = a\pi(\varphi_{-\frac{1}{2}}(-e^2) + \varphi_{\frac{1}{2}}(e^2)).}$$

PARTIE III

III.1 Posons $g : \mathbb{R} \times]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$
 $(t, x) \mapsto \sqrt{1 + x \sin^2 t}$.

- Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \sqrt{1 + x \sin^2 t}$ est continue par morceaux sur $]-1, 1[$ (puisque $\forall (t, x) \in \mathbb{R} \times]-1, 1[$, $1 + x \sin^2 t \geq 1 - \sin^2 t \geq 0$) et pour chaque $x \in]-1, 1[$, la fonction $t \mapsto \sqrt{1 + x \sin^2 t}$ est continue sur \mathbb{R} .
- Pour $(t, x) \in \mathbb{R} \times]-1, 1[$, $|g(x, t)| = \sqrt{1 + x \sin^2 t} \leq \sqrt{2} = \varphi_0(x)$ où la fonction φ_0 est continue par morceaux et intégrable sur $]-1, 1[$.

Le théorème de continuité des intégrales à paramètres permet alors d'affirmer que f est définie et continue sur \mathbb{R} , clairement 2π -périodique.

f est définie et continue sur \mathbb{R} et 2π -périodique.

III.2 Pour $(t, x) \in \mathbb{R} \times]-1, 1[$, on a $1 + x \sin^2 t \geq 1 - |x| > 0$. On en déduit que g admet sur $\mathbb{R} \times]-1, 1[$ une dérivée partielle par rapport à t et pour $(t, x) \in \mathbb{R} \times]-1, 1[$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \frac{x \sin t \cos t}{\sqrt{1 + x \sin^2 t}}.$$

Pour $(t, x) \in \mathbb{R} \times]-1, 1[$, on a de plus

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{|x| |\sin t| |\cos t|}{\sqrt{1 + x \sin^2 t}} \leq \frac{|x| |\sin t| |\cos t|}{\sqrt{1 - |x| \sin^2 t}} \leq \frac{|\sin t| |\cos t|}{\sqrt{1 - \sin^2 t}} = |\sin t| \leq 1 = \varphi_1(x),$$

où φ_1 est une fonction continue par morceaux et intégrable sur $]-1, 1[$. Comme de plus pour chaque $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \frac{x \sin t \cos t}{\sqrt{1 + x \sin^2 t}}$ est continue par morceaux sur $]-1, 1[$ et pour chaque $x \in]-1, 1[$, la fonction $t \mapsto \frac{x \sin t \cos t}{\sqrt{1 + x \sin^2 t}}$ est continue sur \mathbb{R} . Le théorème de LEIBNIZ permet alors d'affirmer que

f est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

III.3 f est paire et donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = 0$. Pour tout réel t , on a aussi $f(t + \pi) = f(t)$. Soit alors $n \in \mathbb{N}$. En posant $t = u + \pi$, on obtient

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u + \pi) \cos(n(u + \pi)) du = (-1)^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos(nu) du = (-1)^n a_n(f).$$

En particulier, si n est impair, on a $a_n(f) = -a_n(f)$ et donc $a_n(f) = 0$.

Puisque f est de classe C^1 sur \mathbb{R} et 2π -périodique, le théorème de DIRICHLET permet d'affirmer que la série de FOURIER converge (normalement) sur \mathbb{R} et que f est la somme de sa série de FOURIER.

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n}(f) \cos(2nt).$$

III.4

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_{-1}^1 \sqrt{1 + x \sin^2 t} dx \right) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + x \sin^2 t} dt \right) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \left(4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + x \sin^2 t} dt \right) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 4 \times \frac{\pi}{2} \times \psi(x) dx = \int_{-1}^1 \psi(x) dx \\ &= -2 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(4p-1)(2p+1)} \left(\frac{(4p)!}{2^{4p}((2p)!)^2} \right)^2. \end{aligned}$$

$$\alpha_0 = -2 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(4p-1)(2p+1)} \left(\frac{(4p)!}{2^{4p}((2p)!)^2} \right)^2.$$