SESSION 2005

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE MP

MATHEMATIQUES 2

I - Détermination de Rac(A) dans quelques exemples

Exemple 1 : Cas où A possède n valeurs propres distinctes

1. Le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples. On sait alors que A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Par suite, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Soient $R \in M_n(\mathbb{R})$ puis $S = P^{-1}RP$ de sorte que $R = PSP^{-1}$. Puisque les matrices P et P^{-1} sont inversibles, les matrices P et P^{-1} sont simplifiables à gauche et à droite et on a

$$R \in \text{Rac}(A) \Leftrightarrow R^2 = A \Leftrightarrow (PSP^{-1})^2 = PDP^{-1} \Leftrightarrow PS^2P^{-1} = PDP^{-1} \Leftrightarrow S^2 = D \Leftrightarrow S \in \text{Rac}(D).$$

$$\boxed{\forall R \in M_n(\mathbb{R}),\ R \in \text{Rac}(A) \Leftrightarrow P^{-1}RP \in \text{Rac}(D).}$$

2. a. Soit S une racine carrée de D.

$$SD = S \times S^2 = S^3 = S^2 \times S = DS.$$

b. Posons $S = (s_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Le coefficient ligne i colonne j de la matrice SD vaut $s_{i,j}\lambda_j$ et celui de la matrice DS vaut $\lambda_i s_{i,j}$. Puisque $SD = DS$, pour tout couple (i,j), on a $s_{i,j}\lambda_j = \lambda_i s_{i,j}$ ou encore $s_{i,j}(\lambda_j - \lambda_i) = 0$. Quand $i \neq j$, on a $\lambda_j - \lambda_i \neq 0$ et donc $s_{i,j} = 0$.
Ainsi, si S est une racine carrée de D, alors : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ (i \neq j \Rightarrow s_{i,j} = 0$. Ceci montre que la matrice S est une matrice diagonale.

$$\boxed{\forall S \in M_n(\mathbb{R}),\ S^2 = D \Rightarrow S \in D_n(\mathbb{R}).}$$

c. L'égalité $S^2 = D$ se traduit par $\forall i \in [\![1,n]\!],\ s_i^2 = \lambda_i$.
d. Soit $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $\lambda_i < 0$. L'équation s_i^2 d'inconnue s_i n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ et donc l'équation $S^2 = D$ n'a pas de solution dans $D_n(\mathbb{R})$ ou finalement l'équation $R^2 = A$ n'a pas de solution dans $M_n(\mathbb{R})$. Dans ce cas, $\text{Rac}(A) = \varnothing$.
e. $S^2 = D \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ s_i^2 = \lambda_i \Leftrightarrow \exists (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n} \in \{-1,1\}^n / \ \forall i \in [\![1,n]\!],\ s_i = \varepsilon_i\sqrt{\lambda_i}$.

$$\boxed{\text{Les racines carrées de } D \text{ sont les matrices de la forme } S = \text{diag}(\varepsilon_i\sqrt{\lambda_i})_{1 \leq i \leq n} \text{ où } (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n} \in \{-1,1\}^n.}$$

3. D'après ce qui précède, si $\lambda_1 < 0$ (de sorte que $\exists i \in [\![1,n]\!] / \ \lambda_i < 0$), Rac($A$) est vide.
Si $\lambda_1 \geq 0$ (de sorte que $\forall i \in [\![1,n]\!] / \ \lambda_i \geq 0$),

$$\boxed{\text{les racines carrées de } A \text{ sont les matrices de la forme } R = PSP^{-1} \text{ où } S = \text{diag}(\varepsilon_i\sqrt{\lambda_i})_{1 \leq i \leq n},\ (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n} \in \{-1,1\}^n.}$$

Il y a au plus 2^n telles matrices.

Notons alors que si S et S' sont deux matrices diagonales, $PSP^{-1} = PS'P^{-1} \Leftrightarrow S = S'$ ce qui montre déjà que $\text{card}(\text{Rac}(A)) = \text{card}(\text{Rac}(D))$. Ensuite, pour $((\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}, (\varepsilon_i')_{1 \leq i \leq n}) \in (\{-1,1\}^n)^2$,

$$\begin{aligned}\text{diag}(\varepsilon_i\sqrt{\lambda_i})_{1 \leq i \leq n} = \text{diag}(\varepsilon_i'\sqrt{\lambda_i})_{1 \leq i \leq n} &\Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ \varepsilon_i\sqrt{\lambda_i} = \varepsilon_i'\sqrt{\lambda_i} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\lambda_1}(\varepsilon_1 - \varepsilon_1') = 0 \text{ et } \forall i \geq 2,\ \varepsilon_i = \varepsilon_i' \text{ (car } \forall i \geq 2,\ \sqrt{\lambda_i} \neq 0).\end{aligned}$$

Si $\lambda_1 > 0$, l'égalité $\sqrt{\lambda_1}(\varepsilon_1 - \varepsilon'_1) = 0$ est équivalente à $\varepsilon_1 = \varepsilon'_1$. Dans ce cas, $S = S' \Leftrightarrow (\varepsilon_i)_{1\leq i\leq n} = (\varepsilon'_i)_{1\leq i\leq n}$. Dans ce cas, il y a 2^n matrices deux à deux distinctes de la forme $\text{diag}(\varepsilon_i\sqrt{\lambda_i})_{1\leq i\leq n}$ et donc 2^n racines carrées deux à deux distinctes de A dans $M_n(\mathbb{R})$.
Si $\lambda_1 = 0$, les racines carrées de D sont les matrices de la forme $\text{diag}(0, \varepsilon_2\sqrt{\lambda_2}, \ldots, \varepsilon_n\sqrt{\lambda_n})$, $(\varepsilon_i)_{2\leq i\leq n}$. Deux telles matrices S et S' sont égales si et seulement si $(\varepsilon_i)_{2\leq i\leq n} = (\varepsilon'_i)_{2\leq i\leq n}$. Dans ce cas, il y a 2^{n-1} telles matrices deux à deux distinctes et donc 2^{n-1} racines carrées deux à deux distinctes de A dans $M_n(\mathbb{R})$.

- Si $\lambda_1 < 0$, $\text{card}(\text{Rac}(A)) = 0$.
- Si $\lambda_1 = 0$, $\text{card}(\text{Rac}(A)) = 2^{n-1}$.
- Si $\lambda_1 > 0$, $\text{card}(\text{Rac}(A)) = 2^n$.

4. Déterminons le polynôme caractéristique de A.

$$\begin{aligned}
\chi_A &= \begin{vmatrix} 11-X & -5 & 5 \\ -5 & 3-X & -3 \\ 5 & -3 & 3-X \end{vmatrix} \\
&= (11-X)\begin{vmatrix} 3-X & -3 \\ -3 & 3-X \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} -5 & 5 \\ -3 & 3-X \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} -5 & 5 \\ 3-X & -3 \end{vmatrix} \\
&= (11-X)(X^2-6X) + 5(5X) + 5(5X) = X[(11-X)(X-6)+50] = X(-X^2+17X-16) \\
&= -X(X-1)(X-16)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\chi_A = -X(X-1)(X-16).}$$

La matrice A admet 3 valeurs propres réelles deux à deux distinctes à savoir 0, 1 et 16. D'après la question précédente, A admet exactement 4 racines carrées à savoir les matrices de la forme $P\text{diag}(0, \pm1, \pm4)P^{-1}$ où P est une matrice carrée inversible telle que $P^{-1}SP$ soit une matrice diagonale.

Déterminons une matrice P. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in \text{Ker}(A) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 11x-5y+5z=0 \\ -5x+3y-3z=0 \\ 5x-3y+3z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 11x-5y+5z=0 \\ 5x-3y+3z=0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y-z=\dfrac{11x}{5} \\ y-z=\dfrac{5x}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y-z=\dfrac{11x}{5} \\ \dfrac{11x}{5}=\dfrac{5x}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y-z=0 \end{array}\right..$$

$\text{Ker}(A)$ est la droite vectorielle $\text{Vect}(e_1)$ où $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$X \in \text{Ker}(A-I) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 10x-5y+5z=0 \\ -5x+2y-3z=0 \\ 5x-3y+2z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=-2x+y \\ -5x+2y-3(-2x+y)=0 \\ 5x-3y+2(-2x+y)=0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=-2x+y \\ x-y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=x \\ z=-x \end{array}\right..$$

$\text{Ker}(A-I_3)$ est la droite vectorielle $\text{Vect}(e_2)$ où $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

La matrice A est symétrique réelle et on sait en particulier que les sous-espaces propres de A sont orthogonaux. Ainsi, $\text{Ker}(A-16I_3)$ est la droite vectorielle $\text{Vect}(e_3)$ où

$$e_3 = e_1 \wedge e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

Une matrice P convenable est la matrice

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.}$$

Exemple 2 : Cas où A est la matrice nulle de $M_n(\mathbb{R})$
5. a.

$$R^2 = 0_n \Rightarrow f \circ f = 0 \Rightarrow \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f) \Rightarrow \dim(\text{Im}(f)) \leq \dim(\text{Ker}(f)) \Rightarrow r \leq n - r \Rightarrow r \leq \frac{n}{2}.$$

$$\boxed{\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f) \text{ et } r \leq \frac{n}{2}.}$$

b. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r}, \mu_1, \ldots, \mu_r) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{n-r} e_{n-r} + \mu_1 u_1 + \ldots + \mu_r u_r = 0 &\Rightarrow f(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{n-r} e_{n-r} + \mu_1 u_1 + \ldots + \mu_r u_r) = 0 \\
&\Rightarrow \mu_1 e_1 + \ldots + \mu_r e_r = 0 \\
&\Rightarrow \mu_1 = \ldots = \mu_r = 0 \text{ (car la famille } (e_1, \ldots, e_r) \text{ est libre).}
\end{aligned}$$

Il reste $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{n-r} e_{n-r} = 0$ ce qui impose $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-r} = 0$ car la famille $(e_1, \ldots, e_{n-r})$ est libre.

Ainsi, la famille $(e_1, \ldots, e_{n-r}, u_1, \ldots, u_r)$ est libre. De plus $\text{card}(e_1, \ldots, e_{n-r}, u_1, \ldots, u_r) = n = \dim(\mathbb{R}^n) < +\infty$ et donc

$$\boxed{\text{la famille } (e_1, \ldots, e_{n-r}, u_1, \ldots, u_r) \text{ est une base de } \mathbb{R}^n.}$$

On a alors immédiatement

$$\boxed{M_r = \begin{pmatrix} 0_{r,n-r} & I_r \\ 0_{n-r,n-r} & 0_{n-r,r} \end{pmatrix},}$$

où $0_{p,q}$ désigne la matrice nulle à p lignes et q colonnes.

6. a. Réciproquement, pour $i \in [\![1, n-r]\!]$, $f(f(e_i)) = f(0) = 0$ et pour $i \in [\![1, r]\!]$ $f(f(u_i)) = f(e_i) = 0$. Ainsi l'endomorphisme f^2 s'annule sur une base de $\mathbb{R}^n$ et donc $f^2 = 0$ ou encore $M_r^2 = 0$.
Ainsi, A est une racine carrée de 0 dans $M_n(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de f est une matrice M_r ou encore

$$\boxed{\begin{array}{c} A \text{ est une racine carrée de } 0 \text{ dans } M_n(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si } A \text{ est semblable à une matrice} \\ \text{de la forme } \begin{pmatrix} 0_{r,n-r} & I_r \\ 0_{n-r,n-r} & 0_{n-r,r} \end{pmatrix}, 0 \leq r \leq \dfrac{n}{2}. \end{array}}$$

b. Les racines carrées de la matrice nulle dans $M_4(\mathbb{R})$ sont 0 et les matrices semblables à l'une des deux matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple 3 : Cas où $A = I_n$
7. a. Puisque $R^2 = I_n$, on a $1 = \det(I_n) = \det(R^2) = (\det(R))^2$ et en particulier, $\det(R) \neq 0$. Ceci montre que R est inversible.
b. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice R dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On sait que

$$\begin{aligned}R^2 = I_n &\Leftrightarrow f^2 = \mathrm{Id}\\ &\Leftrightarrow \text{f est une symétrie}\\ &\Leftrightarrow \text{il existe une base de } \mathbb{R}^n \text{ dans laquelle la matrice de f est de la forme } \mathrm{diag}(1,\dots,1,-1,\dots,-1)\\ &\Leftrightarrow \text{R est semblable à une matrice de la forme } \mathrm{diag}(1,\dots,1,-1,\dots,-1).\end{aligned}$$

8. $\mathrm{Rac}(I_n)$ est l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathbb{R}$ dont le spectre est contenu dans $\{-1,1\}$.

Exemple 4 : Cas où A est une matrice symétrique réelle

9. La matrice $\mathrm{diag}(-n,-(n-1),\dots,-1)$ est symétrique réelle et n'admet pas de racine carrée dans $M_n(\mathbb{R})$ d'après 2.d. Donc, une matrice symétrique réelle n'admet pas nécessairement de racine carrée dans $M_(\mathbb{R})$.

10. Soit A une matrice symétrique réelle positive. Puisque A est symétrique réelle, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale réelle $D = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ telle que $A = PDP^{-1}$.

Montrons alors que les valeurs propres de A, c'est-à-dire les λ_i, sont des réels positifs.
Soient $i \in [\![1,n]\!]$ puis X un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i.

$$^tXAX = {}^tX(AX) = {}^tX(\lambda_i X) = \lambda_i {}^tXX = \lambda_i \|X\|^2,$$

où $\|X\|$ désigne la norme euclidienne usuelle du vecteur colonne X. Par hypothèse, $^tXAX \geq 0$ ou encore $\lambda_i\|X\|^2 \geq 0$ $(*)$. Mais X est un vecteur propre et est en particulier non nul. On en déduit que $\|X\|^2 > 0$ et l'inégalité $(*)$ fournit $\lambda_i \geq 0$.

Soit alors $D' = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_i})_{1\leq i\leq n}$ puis $R = PD'P^{-1} = PD'{}^tP$ (puisque P est orthogonale).

- $R^2 = (PD'P^{-1})^2 = PD'^2P^{-1} = PDP^{-1} = A$ et donc R est une racine carrée de A dans $M_n(\mathbb{R})$.
- R est orthogonalement semblable à une matrice diagonale réelle et donc R est une matrice symétrique réelle.
- Vérifions enfin que la matrice R est positive. Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ puis $X' = P^{-1}X = {}^tPX$. Posons $X' = (x'_i)_{1\leq i\leq n}$.

$$^tXRX = {}^tXPD'{}^tPX = {}^t({}^tPX)D'({}^tPX) = {}^tX'D'X' = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{\lambda_i}x_i'^2 \geq 0.$$

$R = PD'{}^tP$ est donc une matrice symétrique positive telle que $R^2 = A$.

II - Etude topologique de Rac(A)

11. La fonction $f : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \to & (M_n(\mathbb{R})^2 \\ M & \longmapsto & (M,M)\end{array}$ est linéaire et $M_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie. f est donc continue sur $M_n(\mathbb{R})$. La fonction $g : \begin{array}{ccc} (M_n(\mathbb{R}))^2 & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ (M,N) & \longmapsto & MN\end{array}$ est bilinéaire et $(M_n(\mathbb{R}))^2$ est de dimension finie. g est donc continue sur $(M_n(\mathbb{R}))^2$. Mais alors, la fonction $g\circ f : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M^2\end{array}$ est continue sur $M_n(\mathbb{R})$. Posons $h = g\circ f$.

Le singleton $\{A\}$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$. Par suite, $\mathrm{Rac}(A) = h^{-1}(\{A\})$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

$$\boxed{\mathrm{Rac}(A) \text{ est un fermé de } M_n(\mathbb{R}).}$$

12. a. Soit $q \in \mathbb{N}$.

$$S_q^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Ainsi, $\forall q \in \mathbb{N},\ S_q \in \mathrm{Rac}(I_2)$. Mais, pour $q \in \mathbb{N}^*$, $N(S_q) = q$. Par suite, $\{N(R),\ R \in \mathrm{Rac}(I_2)\}$ n'est pas majoré ou encore

$$\boxed{\mathrm{Rac}(I_2) \text{ n'est pas une partie bornée de } M_2(\mathbb{R}).}$$

b. Soit $q \in \mathbb{N}^*$. La matrice $S_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ q & -1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est dans $\mathrm{Rac}(I_n)$ et vérifie $N(S_q) = q$. Donc

$$\boxed{\mathrm{Rac}(I_n) \text{ n'est pas une partie bornée de } M_n(\mathbb{R}).}$$

c. Supposons qu'il existe une norme surmultiplicative $\| \ \|$ sur $GL_n(\mathbb{R})$. Pour $R \in \mathrm{Rac}(I_n)$, on a en particulier $R \in GL_n(\mathbb{R})$ et $\|R\| \times \|R\| \leq \|R \times R\| = \|I_n\|$. Ainsi

$$\forall R \in \mathrm{Rac}(I_n),\ \|R\| \leq \sqrt{\|I_n\|}.$$

On en déduit que $\mathrm{Rac}(I_n)$ est une partie bornée $GL_n(\mathbb{R})$ pour la norme $\| \ \|$. Mais $M_n(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace de dimension finie. On en déduit que la norme N est équivalente à la norme $\| \ \|$ et donc que $\mathrm{Rac}(I_n)$ est aussi une partie bornée de $M_n(\mathbb{R})$ pour la norme N (il existe un réel K tel que $N \leq K\| \ \|$ et donc, $\forall R \in \mathrm{Rac}(I_n),\ N(R) \leq K\sqrt{\|I_n\|}$). Ceci n'est pas et donc

$$\boxed{\text{il n'existe pas de norme surmultiplicative sur } GL_n(\mathbb{R}).}$$

I II - Zéros de fonctions polynomiales. Application à la détermination de l'intérieur de Rac($\mathcal{A}$)

13. a. Soit $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$.

$x \in B_\infty(a, r) \Leftrightarrow \|x - a\|_\infty < r \Leftrightarrow \mathrm{Max}\{|x_i - a_i|,\ i \in [\![1, p]\!]\} < r \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!],\ |x - a_i| < r \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!],\ a_i - r < x_i < a_i + r$.

Par suite,

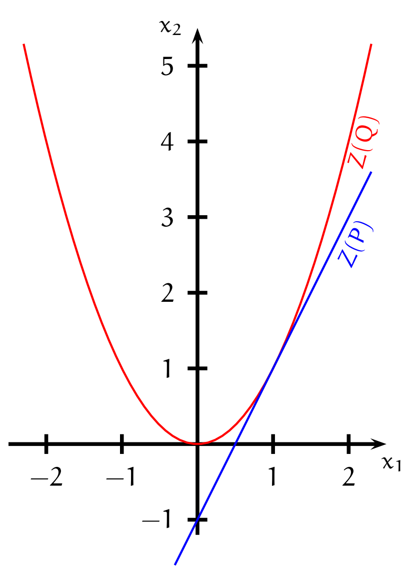
$$\boxed{B_\infty(a, r) = \prod_{k=1}^{p}]a_i - r, a_i + r[.}$$

b. Soient F et G deux parties de $\mathbb{R}^p$ d'intérieur vide. Puisque $F \cap G \subset F$, on a $(F \overset{\circ}{\cap} G) \subset \overset{\circ}{F} = \varnothing$ et donc $(F \overset{\circ}{\cap} G) = \varnothing$.

14. a. Le polynôme nul a une infinité de racines et un polynôme non nul (d'une variable) a un nombre fini de racines. Donc

$$\boxed{\forall P \in \Gamma_1,\ (Z(P) \text{ est infini} \Leftrightarrow P = 0).}$$

b. $Z(P)$ est la droite d'équation $x_2 = 2x_1 - 1$ et $Z(Q)$ est la parabole d'équation $x_2 = x_1^2$. $Z(P)$ et $Z(Q)$ sont infinis.



15. a. Démontrons le résultat par récurrence sur p.

• Si $p = 1$, on sait qu'un polynôme d'une variable qui s'annule sur une partie infinie I_1 de $\mathbb{R}$ est nécessairement le polynôme nul.

• Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Supposons qu'un polynôme $P \in \Gamma_p$ qui s'annule sur une partie de $\mathbb{R}^p$ de la forme $I_1 \times \ldots \times I_p$ où $I_1, \ldots, I_p$ sont des parties infinies de $\mathbb{R}$ soit nécessairement le polynôme nul.

Soit alors $I_1, \ldots, I_p$, I_{p+1}, $p+1$ parties infinies de $\mathbb{R}$ puis soit $P \in \Gamma_{p+1}$ un polynôme qui s'annule sur $I_1 \times \ldots \times I_p \times I_{p+1}$. Le polynôme P peut se décrire sous la forme :

$$\forall (x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}) \in \mathbb{R}^{p+1},\ P = x_{p+1}^q \lambda_q(x_1, \ldots, x_p) + x_{p+1}^{q-1} \lambda_{q-1}(x_1, \ldots, x_p) + \ldots + x_{p+1} \lambda_1(x_1, \ldots, x_p) + \lambda_0(x_1, \ldots, x_p),$$

où $\lambda_0, \ldots, \lambda_q$ sont des éléments de Γ_p.
Soit $(x_1, \ldots, x_p)$ un élément **fixé** de $I_1 \times \ldots \times I_p$. Le polynôme d'une variable $x_{p+1} \mapsto P(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1})$ s'annule sur I_{p+1} qui est une partie infinie de $\mathbb{R}$. On en déduit que ces coefficients à savoir $\lambda_q(x_1, \ldots, x_p), \ldots, \lambda_1(x_1, \ldots, x_p)$, $\lambda_0(x_1, \ldots, x_p)$ sont nuls.

Ainsi, $\forall (x_1, \ldots, x_p) \in I_1 \times \ldots \times I_p$, $\lambda_0(x_1, \ldots, x_p) = \lambda_1(x_1, \ldots, x_p) = \ldots = \lambda_q(x_1, \ldots, x_p) = 0$. $\lambda_0, \ldots, \lambda_q$ sont donc $q+1$ polynômes éléments de Γ_p qui s'annulent sur $I_1 \times \ldots \times I_p$ où $I_1, \ldots, I_p$ sont des parties infinies de $\mathbb{R}$. L'hypothèse de récurrence permet alors d'affirmer que les polynômes $\lambda_0, \ldots, \lambda_q$ sont nuls et donc que P est le polynôme nul.

Le résultat est démontré par récurrence.

b. Soit P un élément de Γ_p s'annulant sur une partie A de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. A contient une boule $B_\infty(a, r)$, $r > 0$. D'après la question 13.a., cette boule est de la forme $I_1 \times \ldots \times I_p$ où $I_1, \ldots, I_p$ sont des parties infinies de $\mathbb{R}$. La question précédente montre alors que P est nul.

c. Par contraposition, on a

$$\boxed{\forall P \in \Gamma_p,\ (P \neq 0 \Rightarrow (\overset{\circ}{Z(P)}) = \varnothing).}$$

16. a. Posons $R = (r_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

$$R^2 = A \Leftrightarrow \forall (i, j) \in [\![1, n]\!],\ \sum_{k=1}^{n} r_{i,k} r_{k,j} - a_{i,j} = 0.$$

Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]$, posons

$$\forall (x_{u,v})_{1 \leq u,v \leq n} \in \mathbb{R}^{n^2},\ P_{i,j}((x_{u,v})_{1 \leq u,v \leq n}) = \sum_{k=1}^{n} x_{i,k} x_{k,j} - a_{i,j}.$$

On a alors :

$$\forall R \in M_n(\mathbb{R}),\ R \in \mathrm{Rac}(A) \Leftrightarrow \forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ P_{i,j}(R) = 0 \Leftrightarrow R \in \bigcap_{1 \leq i,j \leq n} Z(P_{i,j}).$$

b. Aucun des polynômes $P_{i,j}$ n'est nul et donc, d'après la question 15.c., chaque $Z(P_{i,j})$ est d'intérieur vide. La question 13.b. permet alors d'affirmer que $\displaystyle\bigcap_{1 \leq i,j \leq n} Z(P_{i,j})$ et donc $\mathrm{Rac}(A)$ est d'intérieur vide.

$$\boxed{\forall A \in M_n(\mathbb{R}),\ (\overset{\circ}{\mathrm{Rac}(A)}) = \varnothing.}$$

