Les calculatrices sont autorisées.

****

N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

Ce problème porte sur l'étude d'une suite double et de différents contextes dans lesquels on retrouve cette suite.

On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble $\mathbb{N}$ privé de 0, par $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs et par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $[|0, n|]$ l'ensemble des entiers naturels k tels que $0 \leqslant k \leqslant n$.

On note $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{Z})$ l'anneau des matrices carrées d'ordre $n+1$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
Pour $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{Z})$, on note $M = (m_{p,q})_{(p,q)\in[|0,n|]^2}$ où $m_{p,q}$ est l'élément de la ligne p et de la colonne q. Par exemple $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ sera noté $M = \begin{pmatrix} m_{0,0} & m_{0,1} \\ m_{1,0} & m_{1,1} \end{pmatrix}$.
Pour $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{Z})$, on note $\det(M)$ le déterminant de M et $com\,(M)$ la comatrice de M.
$\mathbb{R}[X]$ désigne l'espace des polynômes à coefficients réels et, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Les parties **II**, **III** et **IV** de ce problème sont indépendantes entre elles ; seule la suite étudiée dans la partie **I** apparaît dans une question de chacune de ces parties.

PARTIE I

On définit la suite double de nombres réels $(a_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ par :

(i) $a_{0,0} = 1$
(ii) pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $a_{p,0} = 0$
(iii) pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, $a_{0,q} = 0$
(iv) pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $a_{p+1,q+1} = a_{p,q} + (p+1)q_{p+1,q}$.

La considération d'un tableau, dans lequel les $a_{p,q}$ sont disposés avec p indice de ligne et q indice de colonne, pourra se révéler d'une utilité certaine.

I.1. Pour $q \in \mathbb{N}$, calculer $a_{1,q}$.

I.2. Calculer $a_{2,1}$ et $a_{2,2}$.

I.3. Pour $q \geqslant 2$, exprimer $a_{2,q}$ en fonction de $a_{2,q-1}$. En déduire la valeur de $a_{2,q}$.

I.4. Pour $p \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $\mathcal{P}_p$: « pour tout $q \in \mathbb{N}$, on a $a_{p,q} \in \mathbb{N}$ ».
Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}_p$ est vraie.

I.5. Pour $p > q$, calculer $a_{p,q}$.

I.6. Pour $p \in \mathbb{N}$, calculer $a_{p,p}$.

I.7. Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par A_n la matrice carrée d'ordre $n+1$ (c'est-à-dire à $n+1$ lignes et à $n+1$ colonnes), dont le terme de la ligne p et de la colonne q est $a_{p,q}$, pour tout $(p,q) \in [|0,n|]^2$.
Expliciter les matrices A_2, A_3, A_4 et A_5.

PARTIE II

Dans cette partie, n désigne un entier naturel.

II.1. Soit $M = (m_{p,q}) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{Z})$.

II.1.1. Montrer que $\det(M) \in \mathbb{Z}$.

II.1.2. Montrer que $com\,(M) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{Z})$.

II.1.3. On rappelle qu'une matrice M est inversible dans $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{Z})$ si et seulement si M^{-1} existe et appartient à $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{Z})$. Montrer que M est inversible dans $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det(M) = 1$.

II.2. On définit la suite $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ par : $B_0 = 1$ et pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$B_p = \prod_{j=0}^{p-1} (X - j).$$

II.2.1. Montrer que $(B_0, B_1, \ldots, B_n)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$; on notera $(\mathcal{B})$ cette base.

On note $(\mathcal{X})$ la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

On note P_n la matrice de passage de la base $(\mathcal{X})$ à la base $(\mathcal{B})$ et Q_n la matrice de passage de la base $(\mathcal{B})$ à la base $(\mathcal{X})$.

II.2.2. On prend $n = 4$, expliciter les matrices P_4 et Q_4.

II.2.3. Montrer que P_n est une matrice triangulaire supérieure à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

II.2.4. Calculer $\det(P_n)$.

II.2.5. Montrer que Q_n est une matrice triangulaire supérieure à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

On note $Q_n = (\beta_{p,q})_{(p,q)\in[|0,n|]^2}$. Pour tout $q \in [|0,n|]$, on a donc $X^q = \sum\limits_{p=0}^{q} \beta_{p,q} B_p$.

II.2.6. En donnant à X des valeurs particulières, déterminer les coefficients $\beta_{0,q}$, $\beta_{1,q}$, $\beta_{2,q}$ pour $q \in [|0,n|]$.

II.2.7. Montrer que $Q_n = A_n$ où A_n est la matrice définie au **I.7**.

PARTIE III

On note F l'espace vectoriel réel des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ définies sur $]0, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit l'application ϕ de F dans F par :

$$\phi(f) = g \text{ où } g(x) = xf'(x).$$

Pour $q \in \mathbb{N}^*$, on note $\phi^q = \phi \circ \phi^{q-1}$; ainsi $\phi^2 = \phi \circ \phi$ (par convention : $\phi^0 = id_F$).

III.1. Vérifier que ϕ est un endomorphisme de F. Est-il surjectif ? Est-il injectif ? Préciser le noyau de ϕ.

III.2. Déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres de ϕ.

III.3. Pour $f \in F$, expliciter $\phi^2(f)$. Déterminer le noyau de ϕ^2 et en donner une base.

III.4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe des entiers $d_{p,q}$ tels que, pour tout $q \in [|1,n|]$ et tout $f \in F$, on ait la relation : pour tout x dans $]0, +\infty[$, $\phi^q(f)(x) = \sum\limits_{p=1}^{q} d_{p,q} x^p f^{(p)}(x)$, où $f^{(p)}$ est la dérivée p-ième de f.

On admet que cette décomposition est unique.

III.5. On convient que $d_{0,0} = 1$ et que, pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$, $d_{p,0} = d_{0,q} = 0$ et $d_{p,q} = 0$ si $p > q$. Montrer que pour tout $(p,q) \in [|1,n|]^2$, on a $d_{p,q} = a_{p,q}$, où les $a_{p,q}$ sont les termes définis dans la partie **I**.

PARTIE IV

IV.1. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(t) = \exp((\exp t) - 1)$, où exp est la fonction exponentielle.

IV.1.1. Déterminer le développement limité de φ à l'ordre 4 en $t = 0$.

IV.1.2. Pour n variant de 1 à 4, en déduire la valeur de la dérivée n-ième de φ en 0.

Soit E un ensemble de cardinal n , $n \in \mathbb{N}$. On appelle partition de E , tout ensemble de parties non vides de E, deux à deux disjointes, dont la réunion est E. Chaque partie de la partition s'appelle une classe.

IV.2. Pour tout entier $j \in \mathbb{N}^*$, on note P_n^j le nombre de partitions de E en j classes.
Par convention, on note $P_0^0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$, $P_n^0 = P_0^j = 0$.

IV.2.1. Pour $j > n$, calculer P_n^j.

IV.2.2. Calculer P_n^1 et P_n^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

IV.2.3. On suppose $j \geqslant 2$ et $n \geqslant 1$. Soit $a \in E$.
En distinguant parmi les partitions de E en j classes, celles pour lesquelles le singleton $\{a\}$ est une classe de la partition, justifier l'égalité $P_n^j = P_{n-1}^{j-1} + jP_{n-1}^j$.

IV.2.4. En déduire que pour tout $(j, n) \in \mathbb{N}^2$, on a $P_n^j = a_{j,n}$, les $a_{j,n}$ étant les termes définis dans la partie **I**.

IV.3. On note P_n le nombre de partitions de E. Par convention $P_0 = 1$.

IV.3.1. Pour n variant de 1 à 4, calculer P_n et comparer P_n à $\varphi^{(n)}(0)$ où φ est la fonction définie en **IV.1**.

IV.3.2. Exprimer P_n à l'aide des P_n^j . Dans la suite, on admettra la formule

$$\textbf{(1)} \qquad P_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k P_k \text{ où les } C_n^k \text{ sont les coefficients du binôme.}$$

IV.3.3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $P_n \leqslant n!$.

IV.4. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_n}{n!} x^n$ lorsque la série converge.

IV.4.1. Déduire de **IV.3.3.** que le rayon de convergence de la série est supérieur ou égal à 1.

IV.4.2. Montrer à l'aide de **(1)** que pour $|x| < 1$, on a $s'(x) = s(x) \exp x$ (on pourra développer en série entière $\exp x$ et utiliser le produit de Cauchy de deux séries entières).

IV.4.3. En déduire $s(x)$.

IV.4.4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P_n = \varphi^{(n)}(0)$.

Fin de l'énoncé.