Concours communs polytechniques
Épreuve spécifique filière PSI - Session 2004
Mathématiques I : 4 heures

Calculatrices autorisées.

Notations et but du problème

E_0 est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions f définies sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs réelles, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et vérifiant $f(0)=0$.

E_1 est l'ensemble des fonctions f appartenant à E_0 et telles que la fonction $t \mapsto \left(\dfrac{f(t)}{t}\right)^2$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

E_2 est l'ensemble des fonctions f appartenant à E_0 et telles que la fonction $t \mapsto (f'(t))^2$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On note

$$N_1(f) = \left[\int_{\mathbb{R}_+^*} \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 \ \mathrm{d}t\right]^{1/2} \text{ pour } f \in E_1 \, ; \; N_2(f) = \left[\int_{\mathbb{R}_+^*} \left(f'(t)\right)^2 \ \mathrm{d}t\right]^{1/2} \text{ pour } f \in E_2.$$

Le but du problème est de comparer les ensembles E_1 et E_2 d'une part, les fonctions N_1 et N_2 d'autre part.

Les parties I et II sont consacrées à deux exemples, la partie III aborde le problème de comparaison de façon plus générale.

Partie I - Exemple I

Dans cette partie on suppose que f est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = \operatorname{Arctan} t$.

1. Montrer que f appartient à E_1.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $H_x : t \mapsto \dfrac{1}{(t^2+1)(t^2+x^2)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et qu'en particulier f appartient à E_2.
3. Calcul de $N_2(f)$. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note $\varphi(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^*} H_x(t) \ \mathrm{d}t$.
   - 3.1. Montrer que la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - 3.2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x \neq 1$; décomposer en éléments simples la fraction rationnelle de la variable T, $\dfrac{1}{(T+1)(T+x^2)}$.
   - 3.3. En déduire l'expression explicite de $\varphi(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x \neq 1$.
   - 3.4. Quelle est la valeur de $N_2(f)$?
4. Étudier le signe de $u - \operatorname{Arctan} u$ pour $u \in \mathbb{R}_+$.
5. Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $G_x : t \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t\,(t^2+1)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
6. Calcul de $N_1(f)$. Pour $x \in \mathbb{R}_+$ on pose $\theta(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^*} G_x(t) \ \mathrm{d}t$.
   - 6.1. Montrer que la fonction θ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   - 6.2. Montrer que la fonction θ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
   - 6.3. Expliciter $\theta'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.
   - 6.4. Expliciter $\theta(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.
   - 6.5. Établir une relation entre $[N_1(f)]^2$ et $\theta(1)$.
   - 6.6. En déduire la valeur de $N_1(f)$ et celle de $\dfrac{N_1(f)}{N_2(f)}$.

Partie II - Exemple 2

Dans cette partie on suppose que f est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(t) = \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right).$$

1. Calculer $f'(t)$ pour $t \in \mathbb{R}_+$.
   En déduire que f est élément de E_2. Quelle est la valeur de $N_2(f)$?
2. Déterminer un équivalent (simple !) de $f(t)$ lorsque $t \to 0^+$ (respectivement lorsque $t \to +\infty$).
3. Montrer que f appartient à E_1.
4. **Calcul d'une intégrale.**
   4.1. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{-\ln t}{1-t^2}$ est intégrable sur l'intervalle $]0,1[$.
   On note désormais $J = \displaystyle\int_{]0,1[} \frac{-\ln t}{1-t^2}\ \mathrm{d}t$.
   4.2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto -t^{2k}\ln t$ est intégrable sur l'intervalle $]0,1[$; expliciter la valeur de $J_k = \displaystyle\int_{]0,1[} \left(-t^{2k}\ln t\right)\ \mathrm{d}t$.
   4.3. Justifier avec soin l'égalité $J = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} J_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{]0,1[} \left(-t^{2k} lnt\right)\ \mathrm{d}t$.
   4.4. Déduire de ce qui précède la valeur de l'intégrale J, sachant que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
5. **Calcul de $N_1(f)$.**
   Pour simplifier on note $I = [N_1(f)]^2 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^*} \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2\ \mathrm{d}t$.
   On rappelle que $\operatorname{sh} u = \dfrac{e^u - e^{-u}}{2}$, $\operatorname{ch} u = \dfrac{e^u + e^{-u}}{2}$ pour $u \in \mathbb{R}$, et la relation $\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1$.
   5.1. Montrer que $I = 2\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}}\ \mathrm{d}t$.
   5.2. Justifier le changement de variable $u = f(t) = \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)$ dans l'intégrale obtenue dans la question II.5.1 ; que devient I quand on effectue ce changement ?
   Même question pour le changement de variable $v = e^u$.
   5.3. En déduire la valeur de $N_1(f)$, puis celle de $\dfrac{N_1(f)}{N_2(f)}$.

Partie III

Le but de cette partie est de comparer, d'une part les ensembles E_1 et E_2, d'autre part les fonctions N_1 et N_2.

1. Soit f une fonction quelconque appartenant à E_0 (donc de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que $f(0) = 0$). On associe à f deux fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(t) = \dfrac{f(t)}{\sqrt{t}}$ et $h(t) = \dfrac{f(t)}{t}$ pour tout $t > 0$.
   On pose $\alpha = f'(0)$.
   1.1. Quelle est la limite de $h(t)$ (respectivement de $g(t)$) quand $t \to 0^+$?
   1.2. Exprimer $f'(t) - \sqrt{t}g'(t)$ en fonction de $h(t)$ lorsque $t \in \mathbb{R}_+^*$.

1.3. Quelle est la limite de $\sqrt{t}g'(t)$ (respectivement de $g(t) \times g'(t)$) lorsque $t \to 0^+$?
(on exprimera les résultats en fonction de $\alpha = f'(0)$).

1.4. Établir, pour $x > 0$, la relation :

$$(R)\ :\quad \int_{]0,x]} \left(f'(t)\right)^2 \ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(g(x)\right)^2 + \int_{]0,x]} \left(\sqrt{t}g'(t)\right)^2 \ \mathrm{d}t + \frac{1}{4}\int_{]0,x]} \left(h(t)\right)^2 \ \mathrm{d}t$$

(après avoir justifié l'intégrabilité sur $]0,x]$ de chacune des fonctions qui interviennent).

2. **Comparaison de E_1 et E_2.**

2.1. Déduire de la relation (R) l'inclusion $E_2 \subset E_1$.

2.2. Les ensembles E_1 et E_2 sont-ils égaux ? (On pourra considérer la fonction $t \mapsto \sin t$)

3. **Comparaison de N_1 et N_2.**

3.1. Montrer que E_2 est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E_0.
On admettra sans justification que N_1 et N_2 sont des normes sur l'espace vectoriel E_2.

3.2. Justifier l'inégalité $N_1(f) \leqslant 2N_2(f)$, pour $f \in E_2$.

3.3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}_+$ la fonction f_n par $f_n(t) = e^{-t}\sin(nt)$.
Vérifier que $f_n \in E_2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et calculer $N_2(f_n)$.

3.4. Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes sur E_2 ?

4. Soit f appartenant à E_2 ; en utilisant la relation (R) montrer que $g(t)$ admet une limite lorsque $t \to +\infty$; quelle est cette limite ?

Fin de l'énoncé