

**Concours CCP 2004**  
**Epreuve spécifique - Filière PC**  
**MATHEMATIQUES 2**

**Durée : 4 heures**

*Les calculatrices sont interdites*

\*\*\*\*

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté,  
à la précision et à la concision de la rédaction.*

*Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé,  
il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition  
en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

\*\*\*\*

*La partie II peut être traitée indépendamment des parties I et III.*

**Partie I**

On considère la série entière  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} z^n$  de la variable complexe  $z$ , où  $s$  est un nombre réel donné.

**I.1** Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

**I.2** Dans cette question,  $z = e^{i\theta}$  désigne un nombre complexe de module 1.

**I.2.1** Etudiez la convergence de  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} z^n$  dans le cas où  $s > 1$  ainsi que dans le cas où  $s \leq 0$ .

**I.2.2** Dans le cas où  $0 < s \leq 1$ , étudier la convergence de  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} z^n$  pour  $z = 1$ .

**I.2.3** Toujours dans le cas où  $0 < s \leq 1$ , on suppose que  $z \neq 1$ . On pose  $S_0 = 0$  et pour tout nombre entier  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n z^k$ .

Montrer que  $|S_n| \leq M(\theta)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , avec  $M(\theta) = \frac{1}{\left| \sin \frac{\theta}{2} \right|}$ .

En écrivant  $z^k$  sous la forme  $S_k - S_{k-1}$  pour tout nombre entier  $k \in \mathbb{N}$ , montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n k^{-s} z^k = \sum_{k=1}^{n-1} S_k [k^{-s} - (k+1)^{-s}] + S_n n^{-s}.$$

Montrer que la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} S_n [n^{-s} - (n+1)^{-s}]$  est convergente et en déduire que la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} z^n$  est convergente.

Nous noterons dorénavant  $\varphi(z, s)$  la somme  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} z^n$  pour tout couple  $(z, s) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$  pour lequel cette série est convergente.

**I.3** On note  $I$  l'intervalle ouvert  $] -1, 1 [$  de  $\mathbb{R}$ .

**I.3.1** Montrer que pour tout  $(x, s) \in I \times \mathbb{R}$  on a  $\varphi(x, s+1) = \int_0^x \frac{\varphi(t, s)}{t} dt$ .

**I.3.2** Calculer  $\varphi(x, 0)$  et  $\varphi(x, 1)$  pour tout  $x \in I$ .

**I.4** On suppose dans cete question que  $s > 1$ .

**I.4.1** Soit  $f_n$  la fonction définie sur  $[0, +\infty [$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par  $f_n(t) = e^{-nt} t^{s-1}$ .

Montrer que  $f_n$  est intégrable sur  $[0, +\infty [$  et exprimer  $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$  à l'aide

de  $n, s$  et l'intégrale  $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt = \int_0^{+\infty} f_1(t) dt$ .

**I.4.2** Soit  $z$  un nombre complexe de module inférieur ou égal à 1. Montrer que

la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} z^n f_n(t)$  de fonctions de la variable réelle  $t$  est intégrable terme à terme sur  $]0, +\infty [$ .

En déduire que pour tout  $s > 1$  et pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| \leq 1$ , on a

$$(1) \quad \varphi(z, s) = \frac{z}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - z} dt.$$

## Partie II

Pour tout nombre réel  $s > 1$ , on pose  $\zeta(s) = \varphi(1, s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$ .

**II.1** Montrer que  $\zeta$  est une fonction indéfiniment dérivable de la variable  $s$  sur  $]1, +\infty [$ .

**II.2** Montrer que  $\zeta$  est strictement décroissante sur  $]1, +\infty [$ .

**II.3** Montrer que pour tout  $s \in ]1, +\infty [$ , on a :

$$0 \leq \zeta(s) - 1 \leq \int_1^{+\infty} t^{-s} dt \leq \zeta(s).$$

En déduire la limite de  $\zeta(s)$  lorsque  $s$  tend vers  $+\infty$ . Déterminer un équivalent de  $\zeta(s)$  lorsque  $s$  tend vers 1 par valeurs supérieures à 1.

## Partie III

**III.1** Soit  $g$  la fonction de la variable réelle  $x$  définie par :

- (i)  $g(x) = \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2$  pour tout  $x \in [0, 2\pi[$
- (ii)  $g$  est périodique de période  $2\pi$ .

**III.1.1** Montrer que  $g$  est paire. Développer  $g$  en série de Fourier réelle. Etudier l'égalité entre  $g$  et la somme de sa série de Fourier.

**III.1.2** Calculer les valeurs de  $\zeta(2)$  et  $\zeta(4)$ , où  $\zeta$  est la fonction définie dans la partie précédente.

**III.2** Soit  $\theta$  un nombre réel. On note  $R\varphi(\theta)$  la partie réelle de  $\varphi(e^{i\theta}, 2)$  où  $\varphi$  est la fonction définie à la question I.2.

**III.2.1** Exprimez  $R\varphi(\theta)$  à l'aide de  $g(\theta)$ .

**III.2.2** En déduire que pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t(e^t \cos \theta - 1)}{e^{2t} - 2e^t \cos \theta + 1} dt = g(\theta) - \frac{\pi^2}{12}.$$

**III.2.3** Déduire de ce qui précède la valeur des intégrales :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt \quad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t + 1} dt \quad I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{t}{\operatorname{sh} t} dt$$

**III.3** Soit  $s$  un nombre réel strictement positif.

**III.3.1** Montrer que pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  on a les égalités :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^s (e^t \cos \theta - 1)}{e^{2t} - 2e^t \cos \theta + 1} dt = \Gamma(s+1) \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-(s+1)} \cos n\theta,$$
$$\int_0^{+\infty} \frac{t^s e^t \sin \theta}{e^{2t} - 2e^t \cos \theta + 1} dt = \Gamma(s+1) \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-(s+1)} \sin n\theta.$$

**III.3.2** En déduire des expressions des intégrales :

$$I(s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^s}{\operatorname{ch} t} dt, \quad J(s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^s}{\operatorname{sh} t} dt,$$

en fonction des sommes  $S_1(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1)^{-(s+1)}$ ,  $S_2(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (2k+1)^{-(s+1)}$  et de  $\Gamma(s+1)$ .

**Fin de l'énoncé**