SESSION 2004

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE PC

MATHEMATIQUES 2

Partie I

I.1 Soient $s \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$. Pour $n \geq 1$, $\dfrac{(n+1)^{-s}}{n^{-s}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-s}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. D'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série entière proposée est égal à 1.

$$\boxed{R = 1.}$$

I.2 Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{R}$. Posons $z = e^{i\theta}$.

I.2.1 Si $s > 1$, comme $\left|\dfrac{z^n}{n^s}\right| = \dfrac{1}{n^s}$, la série de terme général $\dfrac{z^n}{n^s}$ converge absolument. Si $s \leq 0$, comme $\left|\dfrac{z^n}{n^s}\right| = \dfrac{1}{n^s}$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$, la série de terme général $\dfrac{z^n}{n^s}$ diverge grossièrement.

I.2.2 Si $0 < s \leq 1$, la série de terme général $\dfrac{1}{n^s}$ diverge.

I.2.3 Soit $s \in]0,1]$. On pose $z = e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
|S_n| &= \left|\sum_{k=1}^{n} z^k\right| = \left|e^{i\theta}\frac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}}\right| \ (\text{car } e^{i\theta} \neq 1) \\
&= \left|e^{i\theta(1-\frac{1}{2}+\frac{n}{2})}\frac{e^{-in\theta/2}-e^{in\theta/2}}{e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2}}\right| = \left|\frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\right| \\
&\leq \frac{1}{|\sin(\theta/2)|} \text{ ce qui reste vrai pour } n = 0.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z},\ |S_n| \leq M(\theta) \text{ où } M(\theta) = \frac{1}{|\sin(\theta/2)|}.}$$

Ensuite, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $z^k = S_k - S_{k-1}$ (y compris quand $k = 1$) et donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^{-s}z^k &= \sum_{k=1}^{n} k^{-s}(S_k - S_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} k^{-s}S_k - \sum_{k=1}^{n} k^{-s}S_{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k^{-s}S_k - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^{-s}S_k \\
&= S_n n^{-s} + \sum_{k=1}^{n-1} k^{-s}S_k - \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)^{-s}S_k = \sum_{k=1}^{n-1} S_k[k^{-s}-(k+1)^{-s}] + S_n n^{-s}
\end{aligned}$$

Montrons alors que la série de terme général $S_k[k^{-s}-(k+1)^{-s}]$ est absolument convergente.
Pour $k \geq 1$, puisque $s > 0$, $k^{-s}-(k+1)^{-s} > 0$ et donc

$$|S_k(k^{-s}-(k+1)^{-s})| = |S_k|(k^{-s}-(k+1)^{-s}) \leq \frac{1}{|\sin(\theta/2)|}(k^{-s}-(k+1)^{-s}),$$

Cette dernière expression est le terme général d'une série telescopique convergente (puisque n^{-s} tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$). Par suite, la série de terme général $S_k[k^{-s}-(k+1)^{-s}]$ est absolument convergente.

Comme d'autre part, la suite $(S_n n^{-s})$ est convergente (de limite nulle puisque la suite (S_n) est bornée et que n^{-s} tend vers 0), la série de terme général $n^{-s}z^n$ est convergente.

I.3 **I.3.1** Soit $(x,s) \in]-1,1[\times\mathbb{R}$. Posons $J = [0,x]$ si $x \geq 0$ et $J = [x,0]$ si $x \leq 0$.

Pour $t \in]-1,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons $g_n(t) = n^{-s}t^{n-1}$, puis $\psi(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(t)$. Cette série entière a encore un rayon de convergence égal à 1 et pour $t \in]-1,1[\setminus\{0\}$, $\psi(t) = \dfrac{\varphi(t,s)}{t}$. Puisque ψ est continue sur $]-1,1[$ (en tant que somme d'une série entière sur $]-1,1[$), la fonction $t \mapsto \frac{\varphi(t,s)}{t}$ est continue sur $J \setminus \{0\}$ et se prolonge par continuité en 0. On en déduit l'existence de $\displaystyle\int_0^x \frac{\varphi(t,s)}{t}\,dt$.

On sait alors que la série entière de terme général g_n converge uniformément sur tout segment contenu dans $]-1,1[$ et en particulier, converge uniformément sur le segment J. On peut donc intégrer terme à terme et on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{\varphi(t,s)}{t}\,dt &= \int_0^x \psi(t)\,dt = \int_0^x \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}t^{n-1}\Big)\,dt \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x n^{-s}t^{n-1}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}\frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-(s+1)}x^n \\ &= \varphi(x,s+1).\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (x,s) \in]-1,1[\times\mathbb{R},\ \varphi(x,s+1) = \int_0^x \frac{\varphi(t,s)}{t}\,dt.}$$

I.3.2 Soit $x \in]-1,1[$. $\varphi(x,0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$ et $\varphi(x,1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \varphi(x,0) = \frac{x}{1-x} \text{ et } \varphi(x,1) = -\ln(1-x).}$$

I.4 Soit s un réel strictement supérieur à 1.

I.4.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $s > 1$, la fonction f_n est continue sur $[0,+\infty[$ et puisque $n > 0$, la fonction f_n est négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$. On en déduit que f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Posons alors $u = nt$ ou encore $t = \dfrac{u}{n}$ et donc $dt = \dfrac{1}{n}du$. On obtient

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-nt}t^{s-1}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-u}u^{s-1}n^{-(s-1)}n^{-1}\,du = n^{-s}\Gamma(s).$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall s \in]1,+\infty[,\ \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = n^{-s}\Gamma(s).}$$

I.4.2) Soit z un complexe de module inférieur ou égal à 1.

- Chaque fonction $h_n\ :\ t \mapsto z^n f_n(t)$ est continue sur $]0,+\infty[$ et intégable sur $]0,+\infty[$ car $|h_n| \leq f_n$.
- Puisque pour $t > 0$, $|ze^{-t}| \leq e^{-t} < 1$, la série de fonction de terme général h_n converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction h telle que, pour tout réel $t > 0$,

$$h(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n e^{-nt}t^{s-1}\,dt = ze^{-t}t^{s-1} \times \frac{1}{1-ze^{-t}} = z\frac{t^{s-1}}{e^t - z}.$$

- Enfin,

$$0 \leq \int_0^{+\infty} |h_n(t)|\, dt \leq \int_0^{+\infty} f_n(t)\, dt = \frac{\Gamma(s)}{n^s},$$

et puisque $s > 1$, la série numérique de terme général $\int_0^{+\infty} |h_n(t)|\, dt$ converge.

On sait alors que l'on peut intégrer terme. On obtient

$$\begin{aligned} z\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - z}\, dt &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} h_n(t)\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n \int_0^{+\infty} f_n(t)\, dt \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} z^n n^{-s}\Gamma(s) = \Gamma(s)\varphi(z, s). \end{aligned}$$

Maintenant, $\Gamma(s)$ est l'intégrale d'une fonction continue, positive et non nulle sur $]0, +\infty[$, et donc, $\Gamma(s) \neq 0$. On a montré que

$$\boxed{\forall s \in]1, +\infty[,\ \forall z \in \mathbb{C},\ |z| \leq 1 \Rightarrow \varphi(z, s) = \frac{z}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - z}\, dt.}$$

Partie II

II.1 Pour $s > 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n(s) = n^{-s}$. Chaque u_n est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $s > 1$,

$$u_n^{(k)}(s) = (-1)^k (\ln(n))^k n^{-s}.$$

Soient alors a un réel strictement supérieur à 1 et k un entier naturel. Pour tout entier non nul n et tout $s \in [a, +\infty[$,

$$|u_n^{(k)}(s)| = \frac{(\ln(n))^k}{n^s} \leq \frac{(\ln(n))^k}{n^a},$$

ou encore

$$\|u_n^{(k)}\|_{\infty,[a,+\infty[} \leq \frac{(\ln(n))^k}{n^a}.$$

Mais d'après les théorèmes de croissances comparées, $\dfrac{(\ln(n))^k}{n^a} \times n^{(1+a)/2} = \dfrac{(\ln(n))^k}{n^{(a-1)/2}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et donc $\dfrac{(\ln(n))^k}{n^a} = o\left(\dfrac{1}{n^{(1+a)/2}}\right)$. Comme $\dfrac{a+1}{2} > \dfrac{1+1}{2} = 1$, la série de terme général $\dfrac{1}{n^{(1+a)/2}}$ est une série de Riemann convergente. On en déduit que la série de terme général $\|u_n^{(k)}\|_{\infty,[a,+\infty[}$ converge. Ainsi, la série de fonctions de terme général $u_n^{(k)}$ converge normalement et donc uniformément sur $[a, +\infty[$.

En résumé, pour tout réel $a > 1$,
- La série de fonctions de terme général u_n converge simplement vers la fonction ζ sur $[a, +\infty[$;
- chaque fonction u_n est de classe C^∞ sur $[a, +\infty[$;
- pour tout entier naturel non nul k, la série de fonctions de terme général $u_n^{(k)}$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

D'après une généralisation du théorème de dérivation terme à terme, ζ et de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$ et,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall s \in]1, +\infty[,\ \zeta^{(k)}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^{(k)}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^k (\ln(n))^k n^{-s}.}$$

II.2 Soit $(s, t) \in]1, +\infty[^2$ tel que $s < t$. Alors

$$\zeta(s) - \zeta(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{n^t}\right) \geq \frac{1}{2^s} - \frac{1}{2^t} > 0.$$

$$\boxed{\text{La fonction } \zeta \text{ est strictement décroissante sur }]1, +\infty[.}$$

II.3 Soit $s \in]1, +\infty[$. Puisque $s > 1$, la fonction $t \mapsto t^{-s}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.
La fonction $t \mapsto t^{-s}$ est décroissante sur $]1, +\infty[$. Par suite, pour $n \geq 1$, on a

$$(n+1)^{-s} \leq \int_n^{n+1} t^{-s}\, dt \leq n^{-s}.$$

On somme alors ces inégalités pour n variant de 1 à $+\infty$ et on obtient

$$0 \leq \zeta(s) - 1 = \sum_{n=2}^{+\infty} n^{-s} = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)^{-s} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} t^{-s}\, dt = \int_1^{+\infty} t^{-s}\, dt \leq \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} = \zeta(s).$$

$$\boxed{\forall s \in]1, +\infty[,\ 0 \leq \zeta(s) - 1 \leq \int_1^{+\infty} t^{-s}\, dt \leq \zeta(s).}$$

Ceci fournit

$$\forall s > 1,\ \frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq \frac{1}{s-1} + 1,$$

ou encore,

$$\forall s > 1,\ 1 \leq (s-1)\zeta(s) \leq 1 + (s-1).$$

Quand s tend vers 1 par valeurs supérieures, $(s-1)\zeta(s)$ tend donc vers 1. On en déduit que

$$\boxed{\zeta(s) \underset{x \to 1,\ x>1}{\sim} \frac{1}{s-1} \text{ et en particulier } \lim_{x \to 1,\ x>1} \zeta(s) = +\infty.}$$

Partie III

III.1 **III.1.1** g est 2π-périodique et donc, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $g(2k\pi) = g(0) = \dfrac{\pi^2}{4}$ et en particulier, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $g(-2k\pi) = g(2k\pi)$, ce qui montre que, pour $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, $g(-x) = g(x)$.
Soit $x \in]2\pi, 0[$. Alors, $-x \in]-2\pi, 0[$ puis $-x + 2\pi \in]0, 2\pi[$ et

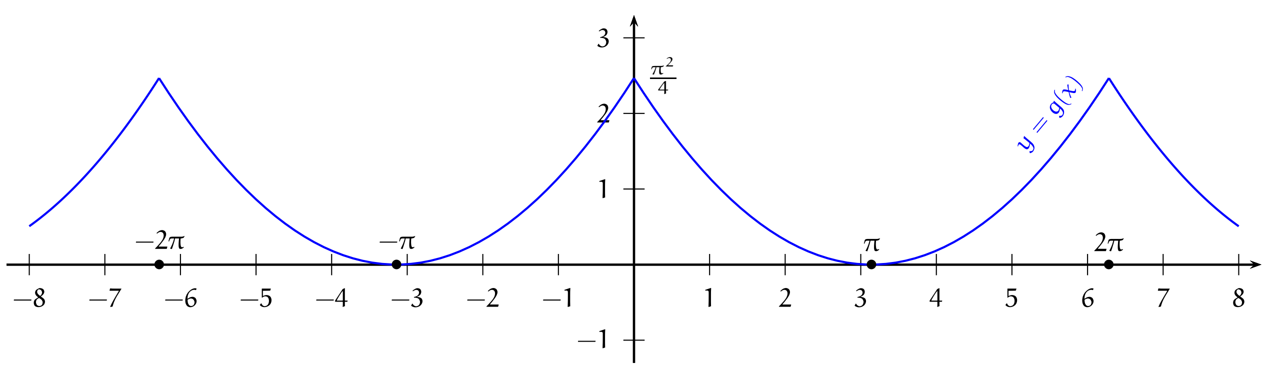
$$g(-x) = g(-x + 2\pi) = \left(\frac{\pi - (-x + 2\pi)}{2}\right)^2 = \left(\frac{x - \pi}{2}\right)^2 = g(x).$$

Soit alors $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Il existe un entier relatif k tel que $0 < x - 2k\pi < 2\pi$ ce qui s'écrit aussi $-2\pi < -x + 2k\pi < 0$ et

$$g(-x) = g(-x + 2k\pi) = g(-(-x + 2k\pi)) = g(x - 2k\pi) = g(x).$$

On a montré que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g(-x) = g(x) \text{ ou encore } g \text{ est paire.}}$$



g est 2π-périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On peut donc calculer les coefficients de Fourier de g. Puisque g est paire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(g) = 0$, puis pour $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n(g) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(t)\cos(nt)\ dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi - t}{2}\right)^2 \cos(nt)\ dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(t-\pi)^2\cos(nt)\ dt.$$

Ainsi,

$$a_0(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(t-\pi)^2\ dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{(t-\pi)^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\times\frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{6},$$

puis, pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}2\pi a_n(g) &= \int_0^{\pi}(t-\pi)^2\cos(nt)\ dt = \left[(t-\pi)^2\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi}(t-\pi)\sin(nt)\ dt = \frac{2}{n}\int_0^{\pi}(t-\pi)(-\sin(nt))\ dt \\ &= \frac{2}{n}\left(\left[(t-\pi)\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\cos(nt)}{n}\ dt\right) = \frac{2\pi}{n^2}\end{aligned}$$

et donc $a_n(g) = \dfrac{1}{n^2}$.

$$\boxed{a_0(g) = \frac{\pi^2}{6},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n(g) = \frac{1}{n^2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n(g) = 0.}$$

g est 2π-périodique, continue sur R ($g(2\pi^-) = \dfrac{\pi^2}{4} = g(2\pi)$), de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ ($g'(2\pi^-) = \dfrac{\pi}{2}$), et d'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de g converge en tout réel x vers $g(x)$. Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{a_0(g)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(g)\cos(nx) + b_n(g)\sin(nx)) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2},}$$

et en particulier,

$$\boxed{\forall x \in [0, 2\pi],\ \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2} = \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2.}$$

III.1.2 Pour $x = 0$, on obtient en particulier,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ensuite, la formule de Parseval (valable puisque g est 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$) s'écrit

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g^2(t)\ dt$$

et fournit ici

$$\frac{\pi^4}{72} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{t-\pi}{2}\right)^4\ dt = \frac{1}{16\pi}\left[\frac{(t-\pi)^5}{5}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{16\pi}\times\frac{2\pi^5}{5} = \frac{\pi^4}{40}.$$

Mais alors,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{40} - \frac{\pi^4}{72} = \frac{(9-5)\pi^4}{5\times 8\times 9} = \frac{\pi^4}{90}.$$

$$\boxed{\zeta(2)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\text{ et }\zeta(4)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}.}$$

III.2 Soit $\theta\in\mathbb{R}$.

III.2.1 $R\varphi(\theta)=\mathrm{Re}\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{in\theta}}{n^2}\right)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n^2}=g(\theta)-\frac{\pi^2}{12}$.

$$\boxed{\forall\theta\in\mathbb{R},\ R\varphi(\theta)=g(\theta)-\tfrac{\pi^2}{12}.}$$

III.2.2 Mais alors, d'après la question I.4.2,

$$\begin{aligned}g(\theta)-\frac{\pi^2}{12}&=\mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\theta}}{\Gamma(2)}\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t-e^{i\theta}}\,dt\right)=\frac{1}{\Gamma(2)}\mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty}\frac{t(\cos\theta+i\sin\theta)(e^t-\cos\theta+i\sin\theta)}{(e^t-e^{i\theta})(e^t-e^{-i\theta})}\,dt\right)\\&=\frac{1}{\Gamma(2)}\int_0^{+\infty}\frac{t(e^t\cos\theta-1)}{e^{2t}-2e^t\cos\theta+1}\,dt.\end{aligned}$$

Maintenant $\Gamma(2)=\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_0^A te^{-t}\,dt=\lim_{A\to+\infty}(\left[-te^{-t}\right]_0^A+\int_0^A e^{-t}\,dt)=\lim_{A\to+\infty}(1-e^{-A}-Ae^{-A})=1$ et on a montré que

$$\boxed{\forall\theta\in\mathbb{R},\ \int_0^{+\infty}\frac{t(e^t\cos\theta-1)}{e^{2t}-2e^t\cos\theta+1}\,dt=g(\theta)-\frac{\pi^2}{12}.}$$

III.2.3 Les trois fonctions considérées sont continues sur $]0,+\infty[$, prolongeables par continuité en 0 et négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$. Par suite, les trois intégrales proposées existent.

Pour $\theta=0$, on obtient $\dfrac{\pi^2}{4}-\dfrac{\pi^2}{12}=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t(e^t-1)}{(e^t-1)^2}\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t-1}\,dt$ et donc,

$$\boxed{I_1=\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t-1}\,dt=\frac{\pi^2}{6}.}$$

Pour $\theta=\pi$, on obtient $-\dfrac{\pi^2}{12}=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t(-e^t-1)}{(e^t+1)^2}\,dt=-\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t+1}\,dt$ et donc,

$$\boxed{I_2=\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t+1}\,dt=\frac{\pi^2}{12}.}$$

Maintenant,

$$I_1+I_2=\int_0^{+\infty}\frac{2te^t}{e^{2t}-1}\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{t}{(e^t-e^{-t})/2}\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{t}{\operatorname{sh}t}\,dt=I_3,$$

et donc

$$\boxed{I_3=\int_0^{+\infty}\frac{t}{\operatorname{sh}t}\,dt=\frac{\pi^2}{4}.}$$

III.3 Soit $s>0$.

III.3.1 D'après la question I.4.2, pour $\theta\in\mathbb{R}$,

$$\varphi(e^{i\theta},s+1)=\frac{e^{i\theta}}{\Gamma(s+1)}\int_0^{+\infty}\frac{t^{s-1}}{e^t-e^{i\theta}}\,dt,$$

et donc,

$$\frac{1}{\Gamma(s+1)}\int_0^{+\infty}\frac{t^s(e^t\cos\theta-1)}{e^{2t}-2t\cos\theta+1}\,dt=\mathrm{Re}(\varphi(e^{i\theta},s+1))=\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{in\theta}}{n^{s+1}}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}n^{-(s+1)}\cos(n\theta),$$

et

$$\frac{1}{\Gamma(s+1)}\int_0^{+\infty}\frac{t^se^t\sin\theta}{e^{2t}-2t\cos\theta+1}\,dt=\mathrm{Im}\left(\varphi(e^{i\theta},s+1)\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}n^{-(s+1)}\sin(n\theta).$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall\theta\in\mathbb{R},\ \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^s(e^t\cos\theta-1)}{e^{2t}-2t\cos\theta+1}\,dt=\Gamma(s+1)\sum_{n=1}^{+\infty}n^{-(s+1)}\cos(n\theta)\\ \forall\theta\in\mathbb{R},\ \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^se^t\sin\theta}{e^{2t}-2t\cos\theta+1}\,dt=\Gamma(s+1)\sum_{n=1}^{+\infty}n^{-(s+1)}\sin(n\theta).\end{array}}$$

III.3.2 On a $I(s)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{2t^se^t}{e^{2t}+1}\,dt$. $\theta=\frac{\pi}{2}$ dans la deuxième formule de la question I.3.1, fournit alors

$$I(s)=2\Gamma(s+1)\sum_{n=1}^{+\infty}n^{-(s+1)}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)=2\Gamma(s+1)\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(2k+1)^{-(s+1)}.$$

Donc,

$$\boxed{\forall s>0,\ I(s)=\int_0^{+\infty}\frac{t^s}{\operatorname{ch}t}\,dt=2\Gamma(s+1)\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(2k+1)^{-(s+1)}=2\Gamma(s+1)S_2(s).}$$

Ensuite, puisque $\displaystyle\frac{1}{e^t-1}+\frac{1}{e^t+1}=\frac{2e^t}{e^{2t}-1}=\frac{1}{\operatorname{sh}t}$, on a $J(s)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^s}{e^t-1}\,dt+\int_0^{+\infty}\frac{t^s}{e^t+1}\,dt$.
Or, $\theta=0$ et $\theta=\pi$ dans la première formule de la question III.3.1, fournissent respectivement

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^s}{e^t-1}\,dt=\Gamma(s+1)\sum_{n=1}^{+\infty}n^{-(s+1)}$$

et

$$-\int_0^{+\infty}\frac{t^s}{e^t+1}\,dt=\Gamma(s+1)\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^nn^{-(s+1)}.$$

Donc,

$$J(s)=\Gamma(s+1)\left(\sum_{n=1}^{+\infty}n^{-(s+1)}-\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^nn^{-(s+1)}\right)=2\Gamma(s+1)\sum_{k=0}^{+\infty}(2k+1)^{-(s+1)}=2\Gamma(s+1)S_1(s).$$

$$\boxed{\forall s>0,\ J(s)=\int_0^{+\infty}\frac{t^s}{\operatorname{sh}t}\,dt=2\Gamma(s+1)\sum_{k=0}^{+\infty}(2k+1)^{-(s+1)}=2\Gamma(s+1)S_1(s).}$$

