ÉPREUVE SPÉCIFIQUE FILIÈRE TSI SESSION 2003

MATHÉMATIQUES 2

Durée : 3 heures

Les calculatrices sont autorisées.

NB. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

$\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ (resp. $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est l'anneau des matrices carrées 3×3 à coefficients dans $\mathbb{C}$ (resp. dans $\mathbb{R}$). On note I la matrice identité, et $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice dite de Frobenius.

L'objet de ce problème est d'étudier le sous-anneau de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ engendré par F, et d'en donner quelques applications. Les parties **II** et **III** sont, dans une large mesure, indépendantes.

Partie I : *Dans toute cette partie, on travaille dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.*

1. Soit $\chi_F(t) = \det(FtI)$ le polynôme caractéristique de F. Donner $\chi_F(t)$ et en déduire que F est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. On posera $j = \exp\left(\dfrac{i2\pi}{3}\right)$.

2. On note :

$$\mathcal{A} = \left\{xI + yF + zF^2, (x,y,z) \in \mathbb{C}^3\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}, (x,y,z) \in \mathbb{C}^3\right\}.$$

a/ Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, dont on donnera une base et la dimension.

b/ Montrer que le produit de deux éléments de $\mathcal{A}$ est commutatif et reste dans $\mathcal{A}$.

3. Montrer que tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont diagonalisables dans une même base.

4. Déterminer alors une expression factorisée du déterminant des matrices $A = xI + yF + zF^2$ en fonction de x, y, z, puis donner une condition d'inversibilité de ces matrices.

5. Soit $A \in \mathcal{A}$, A inversible. On établit dans cette question que $A^{-1} \in \mathcal{A}$. Pour cela, on considère l'application $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, M \mapsto AM$.

a/ Vérifier que Φ est bien un endomorphisme de $\mathcal{A}$.

b/ Montrer que c'est un isomorphisme puis que $A^{-1} \in \mathcal{A}$.

c/ Proposer une méthode pour vérifier cette conclusion ($A^{-1} \in \mathcal{A}$) en utilisant l'outil calcul formel.

Partie II : *Soit ε_3 un espace affine euclidien réel de dimension* 3*, d'espace vectoriel associé E_3.*
On rapporte ε_3 (resp. E_3) à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ *(resp. la base orthonormée directe* $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$*). On note classiquement $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ (resp. $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$) le produit scalaire (resp. vectoriel) de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, et $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}}$ la norme euclidienne d'un vecteur $\overrightarrow{u}$.*
On considère l'ensemble $\mathcal{S}$ des points M de ε_3 défini par :

$$\mathcal{S} = \left\{M(x,y,z) \in \varepsilon_3, \det\left(xI + yF + zF^2\right) = 1 \text{ où } x,y,z \text{ sont réels}\right\}.$$

On étudie quelques propriétés de $\mathcal{S}$ dans cette partie.

1. Écrire une équation cartésienne de $\mathcal{S}$ dans le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. On vérifiera que cette équation peut se factoriser en :

$$(x+y+z)q(x,y,z) = 1,$$

où $q(x,y,z)$ est une quantité à expliciter. En déduire que :

$$M(x,y,z) \in \mathcal{S} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{a}\right)\left\|\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{a}\right\|^2 = 1$$

avec $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.
On obtient ainsi une caractérisation géométrique de $\mathcal{S}$.

2. En déduire que $\mathcal{S}$ est une surface de révolution autour de l'axe Δ passant par O et dirigé par $\overrightarrow{a}$. On pourra introduire le projeté orthogonal H de M sur Δ.

3. **a/** Donner une équation cartésienne de $\mathcal{S}$ dans un repère orthonormé attaché à l'axe de révolution et d'origine O. On posera $\overrightarrow{K} = \dfrac{\overrightarrow{a}}{\|\overrightarrow{a}\|}$ et on choisira par conséquent deux vecteurs $\overrightarrow{I}$ et $\overrightarrow{J}$ (qu'il n'est pas utile d'expliciter). On pourra utiliser la caractérisation géométrique de $\mathcal{S}$ donnée en **1**.

b/ En déduire la nature des méridiennes de $\mathcal{S}$, c'est-à-dire des courbes intersection de $\mathcal{S}$ avec un plan contenant l'axe. En dessiner une, puis représenter $\mathcal{S}$ dans l'espace.

4. Pour $M(x,y,z) \in \mathcal{S}$ et $M'(x',y',z') \in \mathcal{S}$, on définit le point $M''(x'',y'',z'') = M * M'$ par :

$$x'' = xx' + yz' + zy',\ y'' = xy' + yx' + zz',\ z'' = xz' + yy' + zx'.$$

a/ En calculant $\left(xI + yF + zF^2\right)\left(x'I + y'F + z'F^2\right)$, montrer que $M'' \in \mathcal{S}$. On a ainsi muni $\mathcal{S}$ d'une loi interne $*$.

b/ Soit $M(x,y,z) \in \mathcal{S}$. On pose $A = \left(xI + yF + zF^2\right)$. Justifier que A^{-1} existe et peut se décomposer en : $A^{-1} = x'I + y'F + z'F^2$ avec $(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$, et que $M'(x',y',z') \in \mathcal{S}$. Déterminer $M * M'$.

c/ Montrer alors que $(\mathcal{S}, *)$ est un groupe commutatif.

5. Soient $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $x+y+z=1$ et $\mathcal{C} = \mathcal{P} \cap \mathcal{S}$.

a/ Reconnaître $\mathcal{C}$ et en donner les éléments caractéristiques.

b/ Montrer que $\mathcal{C}$ est stable par la loi $*$, puis que c'est un sous-groupe de $(\mathcal{S}, *)$.

Partie III : *Dans cette partie, on se place toujours dans l'espace affine euclidien réel ε_3 rapporté à un repère orthonormé direct* $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.
Soient les points $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ et $C(0,0,1)$. Pour tout point $M(x,y,z)$ de ε_3, on note indifféremment $\varphi(M)$ ou $\varphi(x,y,z)$ la quantité :

$$\varphi(x,y,z) = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| + \left\|\overrightarrow{AM}\right\| + \left\|\overrightarrow{BM}\right\| + \left\|\overrightarrow{CM}\right\|.$$

On souhaite minimiser cette quantité.

1. Calculer $\varphi(O)$. Vérifier que pour tout $M \in \varepsilon_3$ tel que $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| > 3$, $\varphi(x,y,z) > 3$. En déduire que la fonction φ admet un minimum.
2. Montrer que φ n'atteint son minimum en aucun des points O, A, B, C. Pour l'étude en O, on pourra examiner le comportement de φ au voisinage de O, le long de l'axe Δ passant par O et dirigé par $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$; et donc définir pour l'occasion la quantité $\Phi(x) = \varphi(x,x,x)$.
Les questions suivantes précisent en quel(s) point(s) φ est minimale.
3. Soit r l'application affine de ε_3 fixant O et transformant A en C, B en A et C en B. On note $\overrightarrow{r}$ son application linéaire associée. Justifier que r est bien définie, que la matrice de $\overrightarrow{r}$ relativement à la base $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ est F, et montrer que $\overrightarrow{r}$ est une isométrie vectorielle. Quelle est la nature de r ? On précisera ses éléments caractéristiques.
4. Pour tout $M \in \varepsilon_3$, on pose $M' = r(M)$. Montrer que $\varphi(M) = \varphi(M')$.
5. Soit P un point en lequel φ est minimale. On montre dans cette question que P est sur la droite Δ. Pour cela, on procède par l'absurde, *en supposant que P n'est pas sur cette droite.*
   a/ Soit $P' = r(P)$. Pourquoi les vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OP'}$ ne peuvent-ils pas être colinéaires ?
   b/ Soit $P'' = r(P') = r^2(P)$ et soit Q l'isobarycentre de P, P' et P''.
   Montrer que $\varphi(Q) \leqslant \frac{1}{3}\left(\varphi(P) + \varphi(P') + \varphi(P'')\right)$.
   c/ Déduire du **4** que $\varphi(Q) \leqslant \varphi(P)$, et du **5.a.** que cette inégalité est en fait stricte. Conclure.
6. On sait désormais qu'on doit rechercher le minimum sur l'axe Δ. Il s'agit donc de minimiser $\Phi(x) = \varphi(x,x,x)$.
   a/ Montrer que $\Phi(x) > \Phi(0)$ pour tout $x < 0$.
   b/ Étudier le sens de variation de la fonction Φ sur $\mathbb{R}_+$.
   c/ Conclure que φ atteint une seule fois son minimum, au point $P\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$, et que ce minimum vaut $\frac{5}{\sqrt{3}}$.

Fin de l'énoncé