SESSION 2003

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE

EPREUVE SPECIFIQUE-FILIERE PC

MATHEMATIQUES 2

PARTIE I

I.1 Soit $u \in]0,1[$. φ_u est continue sur $[-\pi,\pi[$. De plus, φ_u étant 2π-périodique,

$$\varphi_u(\pi) = \varphi_u(-\pi) = \cos(-\pi u) = \cos(\pi u) = \varphi_u(\pi^-).$$

Par suite, φ_u est continue sur $[-\pi,\pi]$ et donc sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité.

Montrons que φ_u est paire. Déjà, pour $x \in [-\pi,\pi] \cup 2\pi\mathbb{Z}$, on a $\varphi_u(-x) = \varphi_u(x)$.
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Il existe un entier relatif k tel que $-\pi < x - 2k\pi < \pi$. En effet

$$-\pi < x - 2k\pi < \pi \Leftrightarrow (2k-1)\pi < x < (2k+1)\pi \Leftrightarrow 2k+1 < \frac{x}{\pi} < 2k-1 \Leftrightarrow k < \frac{1}{2}(\frac{x}{\pi} - 1) < k+1 \Leftrightarrow x = E(\frac{x-\pi}{2\pi}).$$

Mais alors $-x + 2k\pi \in]-\pi,\pi[$ et donc

$$\varphi_u(-x) = \varphi_u(-x+2k\pi) = \varphi_u(-(-x+2k\pi)) = \varphi_u(x-2k\pi) = \varphi_u(x).$$

φ_u est donc paire.

Puisque φ_u est paire, pour tout entier naturel non nul, on a $b_n = 0$ puis, pour $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} a_n(u) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(ut)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\cos((u+n)t) + \cos((u-n)t))\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin((u+n)t)}{u+n} + \frac{\sin((u-n)t}{u-n}\right]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n\sin(\pi u)}{u+n} + \frac{(-1)^n\sin(\pi u)}{u-n}\right) = \frac{2u\sin(\pi u)}{\pi} \times \frac{(-1)^n}{u^2-n^2}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{2u\sin(\pi u)}{\pi} \times \frac{(-1)^n}{u^2-n^2}.}$$

φ_u est continue sur $\mathbb{R}$, clairement de classe C^1 par morceaux, et 2π-périodique. Le théorème de Dirichlet permet d'affirmer que la série de Fourier de φ_u converge en tout réel et que φ_u est égale en tout point de $\mathbb{R}$ à la somme de sa série de Fourier.

I.2 D'après la question I.1., pour $u \in]0,1[$ et $t \in [-\pi,\pi]$, on a $\cos(\pi t) = \dfrac{\sin(\pi u)}{\pi u} + \dfrac{2u\sin(\pi u)}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cos(nt)}{u^2-n^2}$.

Pour $t = \pi$, on obtient : $\dfrac{\sin(\pi u)}{\pi u} + \dfrac{2u\sin(\pi u)}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{u^2-n^2} = \cos(\pi u)$, et donc, puisque $u\pi \in]0,\pi[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2u}{u^2-n^2} = \frac{\pi}{\sin(\pi u)}\left(\cos(\pi u) - \frac{\sin(\pi u)}{\pi u}\right) = \frac{\pi\cos(\pi u)}{\sin(\pi u)} - \frac{1}{u}.$$

Finalement,

$$\boxed{\forall u \in]0,1[,\ \frac{\pi\cos(\pi u)}{\sin(\pi u)} - \frac{1}{u} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2u}{u^2-n^2}.}$$

I.3. Soit $x \in [0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < 1 - x^2 \leq 1 - \dfrac{x^2}{n^2} \leq 1$. Par suite, $u_n(x)$ existe et est négatif. Ensuite,

$$u_n(x) = \ln(1 - \frac{x^2}{n^2}) \underset{n \to +\infty}{=} O(\frac{1}{n^2}).$$

La série de terme général $u_n(x)$ est donc absolument convergente.

$$\boxed{\text{La série de fonctions de terme général } u_n \text{ converge simplement sur } [0,1[.}$$

Pour chaque entier naturel non nul n, u_n est dérivable sur $[0,1[$ et

$$\forall x \in [0,1[,\ u_n'(x) = \frac{2x}{x^2 - n^2}.$$

Soit alors $a \in [0,1[$. Pour n non nul donné, on a pour chaque x de $[0,a]$

$$|u_n'(x)| = \frac{2x}{n^2 - x^2} \leq \frac{2a}{n^2 - a^2} = |u_n'(a)|.$$

Quand n tend vers $+\infty$, $|u_n'(a)|$ est dominé par $\dfrac{1}{n^2}$. Par suite, la série de terme général $|u_n'(a)|$ converge et donc,

$$\boxed{\text{La série de fonctions de terme général } u_n' \text{ converge normalement sur tout segment contenu dans } [0,1[.}$$

Ainsi,
- La série de fonctions de terme général u_n, $n \geq 1$, converge simplement sur $[0,1[$ vers une fonction que l'on note f.
- Chaque fonction u_n est de classe C^1 sur $[0,1[$.
- La série de fonctions de terme général u_n' converge normalement et donc uniformément sur tout segment contenu dans $[0,1[$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme et d'après la question I.2, on peut affirmer que f est de classe C^1 sur $[0,1[$ et que, pour tout réel $x \in]0,1[$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2} = \frac{\pi\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} - \frac{1}{x}.$$

Mais alors, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour $x \in]0,1[$,

$$f(x) = \ln\frac{\sin(\pi x)}{x} + C.$$

Quand x tend vers 0, on obtient (f étant définie et continue en 0)

$$f(0) = 0 = C + \ln\pi.$$

Finalement,

$$\boxed{\forall x \in [0,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 - \frac{x^2}{n^2}) = \begin{cases} \ln\left(\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right) & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}.}$$

I.4 I.4.1 Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \in \mathbb{Z}$, la suite $(s_n(x))$ est nulle à partir d'un certain rang et donc converge vers 0. Si $x \notin \mathbb{Z}$, pour tout entier naturel n, $|s_n(x)| > 0$ et on a

$$\ln|s_n(x)| - \ln|s_{n-1}(x)| = \ln|1 - \frac{x^2}{n^2}|.$$

Puisque $\ln|1 - \dfrac{x^2}{n^2}|$ est dominée par $\dfrac{1}{n^2}$, la série de terme général $\ln|1 - \dfrac{x^2}{n^2}| = \ln|s_n(x)| - \ln|s_{n-1}(x)|$ converge. Mais alors la suite, $(\ln|s_n(x)|)$ converge et il en est de même de la suite $(|s_n(x)|)$ puis de la suite $(s_n(x))$ car cette suite est de signe constant à partir d'un certain rang.

$$\boxed{\text{La suite de fonctions } (s_n) \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}.}$$

I.4.2 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Par une récurrence immédiate, on a

$$s_n(x) = x\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{x^2}{k^2}) = x\prod_{k=1}^{n}\frac{(k-x)(k+x)}{k^2}.$$

Par suite, puisque $x+1$ n'est pas entier et

$$\begin{aligned}
s_n(x+1) &= (x+1)\prod_{k=1}^{n}\frac{(k-1-x)(k+1+x)}{k^2} = \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\prod_{k=1}^{n}(k-1-x)\prod_{k=0}^{n}(k+1+x)\\
&= \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\prod_{k=0}^{n-1}(k-x)\prod_{k=1}^{n+1}(k+x) = \frac{n+1+x}{n-x}(-x)\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\prod_{k=1}^{n}(k-x)\prod_{k=1}^{n}(k+x)\\
&= \frac{n+1+x}{x-n}s_n(x).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z},\ s_n(x+1) = \frac{n+1+x}{x-n}s_n(x).}$$

Quand n tend vers $+\infty$, on obtient pour un x réel donné non entier, $s(x+1) = -s(x)$. Si x est entier, on a directement $s(x+1) = 0 = -s(x)$. Finalement,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ s(x+1) = -s(x).}$$

I.4.3 Soit $x \in]0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, on a

$$s_n(x) = x\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{x^2}{k^2}) = x\exp\left(\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\right).$$

Quand n tend vers $+\infty$, par continuité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on obtient

$$s(x) = x\exp(\ln\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi},$$

ce qui reste vrai pour $x = 0$. Enfin, soit x un réel quelconque. Posons $p = E(x)$. Alors $x - p \in [0,1[$ et

$$s(x) = (-1)^p s(x-p) = \frac{(-1)^p\sin(\pi(x-p))}{\pi} = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}.$$

Finalement

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ s(x) = x\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}.}$$

PARTIE II

II.1 **II.1.1** Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour $n > p$, on a $0 \leq p \leq n-1$ et donc

$$f_n(-p) = \frac{n^{-p}}{(n-1)!}\prod_{k=0}^{n-1}(-p+k) = 0.$$

Par suite,

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ \lim_{n\to+\infty} f_n(-p) = 0.}$$

II.1.2 Soit $x \notin \mathbb{Z}^-$. Pour tout naturel non nul n, $f_n(x)$ n'est pas nul et

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-x}(x+n).$$

Posons $N_x = 1$ si $x > 0$ et $N_x = E(-x) + 1$ si $x < 0$. Pour $n \geq N_x$, on a $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} > 0$ de sorte que $\ln \dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$ existe. Ensuite, quand n tend vers $+\infty$, on a

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = (1 + \frac{x}{n})(1 + \frac{1}{n})^{-x} = (1 + \frac{x}{n})(1 - \frac{x}{n} + O(\frac{1}{n^2})) = 1 + O(\frac{1}{n^2}),$$

et donc,

$$\ln \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \underset{+\infty}{=} O(\frac{1}{n^2}).$$

On en déduit que la série de terme général $\ln \dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \ln(f_{n+1}(x)) - \ln(f_n(x))$ converge. On sait qu'il en est de même de la suite $(\ln(f_n(x))$ et donc de la suite $(f_n(x))$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-,\ \text{la suite } (f_n(x)) \text{ converge.}}$$

II.2 Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$xf_n(x+1) = x\frac{n^{-(x+1)}}{(n-1)!}\prod_{k=0}^{n-1}(k+1+x) = x\frac{n^{-(x+1)}}{(n-1)!}\prod_{k=1}^{n}(k+x) = \frac{1}{n}(n+x)\frac{n^{-x}}{(n-1)!}\prod_{k=0}^{n-1}(k+x) = \frac{n+x}{n}f_n(x).$$

Quand n tend vers $+\infty$, on obtient :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ xf(x+1) = f(x).}$$

Ensuite, $f_n(1) = \dfrac{1}{n}\dfrac{n!}{(n-1)!} = 1$ et quand n tend vers $+\infty$, on obtient $f(1) = 1$. Mais alors, immédiatement par récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(n) = \frac{1}{(n-1)!}.}$$

II.3 Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} f_n(x)f_n(1-x) &= n^{-x}n^{-1+x}\frac{1}{(n-1)!^2}\prod_{k=0}^{n-1}(x+k)\prod_{k=0}^{n-1}(1-x+k) \\ &= \frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}\prod_{k=0}^{n-1}(k+x)\prod_{k=1}^{n}(k-x) \\ &= \frac{n^2}{n(x+n)}x\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\prod_{k=1}^{n}(k^2-x^2) = \frac{n}{n+x}x\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{x^2}{k^2}). \end{aligned}$$

Quand n tend vers $+\infty$, le premier membre de cette égalité tend vers $f(x)f(1-x)$ et le second membre vers $\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi}$ d'après la question I.4.3., ce qui montre que $f(x)f(1-x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi}$.

Quand $x \in \mathbb{Z}^-$, d'après la question II.1.1, $f(x) = 0$ et donc encore une fois $f(x)f(1-x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi}$. Finalement,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)f(1-x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}.}$$

II.4 **II.4.1** Si k est un entier négatif ou nul, $f(k)f(1-k) = \dfrac{\sin(k\pi)}{\pi} = 0$. De plus, d'après II.2, puisque $n = 1-k$ est un entier naturel non nul, $f(1-k) = \dfrac{1}{n!} \neq 0$. On en déduit que $f(k) = 0$. Donc,

$$f \text{ s'annule sur } \mathbb{Z}^-.$$

Ainsi, si px est un entier négatif ou nul, $f(px) = 0$. Pour montrer que la relation (1) est vérifiée (quand px est un entier négatif ou nul), il suffit de vérifier que $\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1} f(x+\frac{k}{p}) = 0$. Pour cela, on va montrer que l'un des $x + \dfrac{k}{p}$, $0 \leq k \leq p-1$, est un entier négatif ou nul.

La division euclidienne de l'entier naturel $-px$ par l'entier naturel non nul p fournit $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ tel que

$$-px = qp + r \text{ et } 0 \leq r \leq p-1.$$

Mais alors, r est élément de $\{0, ..., p-1\}$ et vérifie $x + \dfrac{r}{p} = -q \in \mathbb{Z}^-$. Par suite, $f(x+\dfrac{r}{p}) = 0$. Finalement, si $px \in \mathbb{Z}^-$,

$$f(px) = 0 = (2\pi)^{\frac{p-1}{2}} p^{-px+\frac{1}{2}} \prod_{k=0}^{p-1} f\left(x + \frac{k}{p}\right).$$

II.4.2

Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ puis x un réel tel que $px \notin \mathbb{Z}^-$. On a d'une part

$$\begin{aligned}
p^{px-1} f_{pn}(px) &= p^{px-1} \frac{(pn)^{-px}}{(pn-1)!} \prod_{k=0}^{pn-1} (px+k) \\
&= p^{-1} n^{-px} \frac{1}{(pn-1)!} \prod_{\substack{0 \leq q \leq n-1 \\ 0 \leq r \leq p-1}} (px + qp + r) \text{ (en effectuant la division de chaque } k \in [\![0, pn-1]\!] \text{ par } p) \\
&= p^{-1} n^{-px} \frac{1}{(pn-1)!} \prod_{r=0}^{p-1} \left(\prod_{q=0}^{n-1} (px + qp + r) \right)
\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{p-1} f_n(x + \frac{k}{p}) &= \prod_{k=0}^{p-1} \left(\frac{n^{-x-\frac{k}{p}}}{(n-1)!} \prod_{i=0}^{n-1} (x + \frac{k}{p} + i) \right) \\
&= (n^{-x})^p (n^{-\frac{1}{p}})^{1+2+\ldots+(p-1)} \frac{1}{((n-1)!)^p} \prod_{r=0}^{p-1} \left(\prod_{q=0}^{n-1} (x + \frac{r}{p} + q) \right) \text{ (simplement en changeant de notations)} \\
&= n^{-px - \frac{p(p-1)}{2p}} \frac{1}{((n-1)!)^p} \prod_{r=0}^{p-1} \left(\frac{1}{p^n} \prod_{q=0}^{n-1} (px + qp + r) \right) \\
&= n^{-px - \frac{p-1}{2}} \frac{1}{((n-1)!)^p} \frac{1}{p^{np}} \prod_{r=0}^{p-1} \left(\prod_{q=0}^{n-1} (px + qp + r) \right)
\end{aligned}$$

Par suite, (puisque aucun des $x + \dfrac{k}{p} = \dfrac{px+k}{p}$ n'est nul)

$$\frac{p^{px-1} f_{pn}(px)}{\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1} f_n(x + \frac{k}{p})} = \frac{p^{-1} n^{-px} \dfrac{1}{(pn-1)!}}{n^{-px-\frac{p-1}{2}} \dfrac{1}{((n-1)!)^p} \dfrac{1}{p^{np}}} = \frac{n^{\frac{p-1}{2}} p^{np-1} (n-1)!^p}{(pn-1)!}$$

Ainsi,

$$\frac{p^{px-1}f_{pn}(px)}{\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1} f_n(x+\frac{k}{p})} = A_{p,n},$$

où $A_{p,n} = \dfrac{n^{\frac{p-1}{2}}p^{np-1}(n-1)!^p}{(pn-1)!}$ ne dépend pas de x.

D'après la question II.1.2, puisque $px \notin \mathbb{Z}^-$, la suite $(f_{pn}(px))_{n\in\mathbb{N}^*}$ a une limite non nulle à savoir $f(px)$. D'autre part, pour $0 \leq k \leq p-1$,

$$x + \frac{k}{p} \in \mathbb{Z}^- \Rightarrow px + k \in p\mathbb{Z}^- \Rightarrow px \in -k + p\mathbb{Z}^- \Rightarrow px \in \mathbb{Z}^-,$$

et donc par contraposition,

$$px \notin p\mathbb{Z}^- \Rightarrow \forall k \in [\![0, p-1]\!],\ x + \frac{k}{p} \notin \mathbb{Z}^-.$$

On en déduit que $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$, $f(x+\dfrac{k}{p}) \neq 0$ et donc que la suite $\left(\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1} f_n(x+\frac{k}{p})\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a une limite non nulle quand n tend vers $+\infty$ à savoir $\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1} f(x+\frac{k}{p})$. Mais alors le rapport $\dfrac{p^{px-1}f_{pn}(px)}{\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1} f_n(x+\frac{k}{p})} = A_{p,n}$ a une limite réelle positive quand n tend vers $+\infty$, limite que l'on note A_p. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient

$$f(px) = A_p p^{-px+1} \prod_{k=0}^{p-1} f(x+\frac{k}{p}).$$

II.4.3 On évalue l'égalité précédente en $x = \dfrac{1}{p}$ ($x = \dfrac{1}{p} \Rightarrow px = 1 \notin \mathbb{Z}^-$). On obtient (puisque $f(1) = 1$ d'après la question II.2)

$$1 = f(1) = A_p \prod_{k=0}^{p-1} f(\frac{k+1}{p}) = A_p \prod_{k=1}^{p} f(\frac{k}{p}) = A_p \prod_{k=1}^{p-1} f(\frac{k}{p}) = A_p \prod_{k'=1}^{p-1} f(\frac{p-k'}{p}) = A_p \prod_{k=1}^{p-1} f(1-\frac{k}{p}).$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ A_p = \frac{1}{\displaystyle\prod_{k=1}^{p-1} f(\frac{k}{p})} = \frac{1}{\displaystyle\prod_{k=1}^{p-1} f(1-\frac{k}{p})}.}$$

Mais alors, d'après la question II.3.,

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ A_p^2 = \frac{1}{\displaystyle\prod_{k=1}^{p-1} f(\frac{k}{p})f(1-\frac{k}{p})} = \frac{\pi^{p-1}}{\displaystyle\prod_{k=1}^{p-1} \sin(\frac{k\pi}{p})}\ (*).}$$

II.4.4

$$(X^{p-1} + X^{p-2} + \ldots + X + 1)^2 = \left(\frac{X^p - 1}{X-1}\right)^2 = \left(\frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1}(X - e^{\frac{2ik\pi}{p}})}{X-1}\right)^2 = \left(\prod_{k=1}^{p-1}(X - e^{\frac{2ik\pi}{p}})\right)^2$$

$$= \prod_{k=1}^{p-1}(X - e^{\frac{2ik\pi}{p}}) \prod_{k=1}^{p-1}(X - e^{\frac{-2ik\pi}{p}}) \text{ (quand } k \text{ décrit } [\![1, p-1]\!],\ e^{\frac{-2ik\pi}{p}} \text{ décrit aussi } U_p \setminus \{1\})$$

$$= \prod_{k=1}^{p-1}(X - e^{\frac{2ik\pi}{p}})(X - e^{\frac{-2ik\pi}{p}}) = \prod_{k=1}^{p-1}(X^2 - 2X\cos\frac{2k\pi}{p} + 1).$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ (x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1)^2 = \prod_{k=1}^{p-1}(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{p}+1).}$$

Pour $x=1$, on obtient en particulier

$$p^2 = \prod_{k=1}^{p-1}(2-2\cos\frac{2k\pi}{p}) = \prod_{k=1}^{p-1}4\sin^2\frac{k\pi}{p} = 2^{2(p-1)}\left(\prod_{k=1}^{p-1}\sin\frac{k\pi}{p}\right)^2.$$

L'égalité $(*)$ montre que $\displaystyle\prod_{k=1}^{p-1}\sin\frac{k\pi}{p} > 0$ et donc que

$$\prod_{k=1}^{p-1}\sin\frac{k\pi}{p} = \sqrt{\frac{p^2}{2^{2(p-1)}}} = \frac{p}{2^{p-1}}.$$

Puisque A_p est un réel positif, l'égalité $(*)$ fournit encore

$$A_p = \sqrt{\frac{p^{p-1}}{\displaystyle\prod_{k=1}^{p-1}\sin\frac{k\pi}{p}}} = \sqrt{\frac{(2\pi)^{p-1}}{p}} = (2\pi)^{\frac{p-1}{2}}p^{-\frac{1}{2}}.$$

On obtient finalement

$$f(px) = A_p p^{-px+1}\prod_{k=0}^{p-1}f(x+\frac{k}{p}) = (2\pi)^{\frac{p-1}{2}}p^{-\frac{1}{2}}p^{-px+1}\prod_{k=0}^{p-1}f(x+\frac{k}{p}) = (2\pi)^{\frac{p-1}{2}}p^{-px+\frac{1}{2}}\prod_{k=0}^{p-1}f(x+\frac{k}{p}).$$

PARTIE III

III.1 Soit x un réel. La fonction $f\ :\ t\mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et donc intégrable sur tout segment de $]0,+\infty[$.

- Quand t tend vers 0, $e^{-t}t^{x-1}\sim t^{x-1}>0$. Donc f est intégrable sur un voisinage de 0 si et seulement si la fonction $t\mapsto t^{x-1}$ est intégrable sur un voisinage de 0 ce qui équivaut à $x>0$.
- Quand t tend vers $+\infty$, d'après les théorèmes de croissances comparées, on a dans tous les cas $e^{-t}t^{x-1} = o(\frac{1}{t^2})$ et donc f est dans tous les cas intégrable au voisinage de $+\infty$.

En résumé f est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si $x>0$.

$$\boxed{\mathcal{D} =]0,+\infty[.}$$

Montrons alors que la fonction Γ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$. Pour cela, on se donne deux réels a et b tels que $0<a<b$ et on considère la fonction $F\ :\ \begin{array}{ccc}[a,b]\times]0,+\infty[& \to & \mathbb{R}\\ (x,t) & \mapsto & f(x,t)=e^{-t}t^{x-1}\end{array}$. La fonction F admet des dérivées partielles à tout ordre par rapport à sa première variable x sur $[a,b]\times]0,+\infty[$ et

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in[a,b],\ \frac{\partial^k F}{\partial x^k}(x,t) = (\ln t)^k t^{x-1}e^{-t}.$$

- Pour chaque $x\in[a,b]$, la fonction $t\mapsto F(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$ (d'après le début de la question).
- Pour chaque $k\in\mathbb{N}^*$ et $t\in]0,+\infty[$, la fonction $x\mapsto\dfrac{\partial^k F}{\partial x^k}(x,t)$ est définie et continue sur $[a,b]$.
- Soient $k\in\mathbb{N}^*$ et $x\in[a,b]$. La fonction $t\mapsto\dfrac{\partial^k F}{\partial x^k}(x,t)$ est définie et continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. De plus,

Maintenant, si $t\in]0,1]$, $\left|\dfrac{\partial^k F}{\partial x^k}(x,t)\right| = |\ln t|^k t^{x-1}e^{-t} = |\ln t|^k e^{(x-1)\ln t}e^{-t}\leq|\ln t|^k e^{(a-1)\ln t}e^{-t} = |\ln t|^k t^{a-1}e^{-t}$ et si $t\in[1,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial^k F}{\partial x^k}(x,t)\right|\leq|\ln t|^k t^{b-1}e^{-t}$. En résumé,

$$\forall (x,t)\in[a,b]\times]0,+\infty[,\ \left|\frac{\partial^k F}{\partial x^k}(x,t)\right|\leq \varphi_k(t)\ \varphi_k(t)=|\ln t|^k \mathrm{Max}\{t^{a-1},t^{b-1}\}e^{-t}.$$

La fonction φ_k est déjà continue par morceaux et positive sur $]0,+\infty[$, négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$ d'après les théorèmes de croissances comparées. Il reste à vérifier que cette fonction est intégrable au voisinage de 0. Pour $t\in]0,1]$, on a

$$t^{1-\frac{a}{2}}\varphi_k(t)=t^{1-\frac{a}{2}}|\ln t|^k t^{a-1}e^{-t}=|\ln t|^k t^{\frac{a}{2}}e^{-t},$$

et donc, puisque $\frac{a}{2}>0$, $\lim\limits_{t\to 0} t^{1-\frac{a}{2}}\varphi_k(t)=0$ d'après les théorèmes de croissances comparées. On en déduit que quand t tend vers 0, $\varphi_k(t)=o(t^{-1+\frac{a}{2}})$ et donc que φ_k est intégrable sur un voisinage de 0 puisque $-1+\frac{a}{2}>-1$.

Finalement, la fonction φ_k est continue par morceaux, positive et intégrable sur $]0,+\infty[$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de LEIBNIZ), la fonction Γ est de classe C^∞ sur tout segment contenu dans $]0,+\infty[$ et donc sur $]0,+\infty[$ et les dérivées successives s'obtiennent par dérivation sous le signe somme :

$$\boxed{\begin{array}{c}\Gamma \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur }]0,+\infty[\text{ et}\\ \forall k\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in]0,+\infty[,\ \Gamma^{(k)}(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}(\ln t)^k t^{x-1}e^{-t}\ dt.\end{array}}$$

III.2 **III.2.1** Soit $n\in\mathbb{N}$ et $x\in]0,+\infty[$. Vérifions tout d'abord l'intégrabilité de la fonction $u\mapsto(1-u)^n u^{x-1}$. Cette fonction est continue sur $]0,1]$, positive et équivalente quand u tend vers 0 à la fonction $u\mapsto u^{x-1}$ qui est intégrable sur un voisinage de 0 puisque $x-1>-1$. Donc la fonction $u\mapsto(1-u)^n u^{x-1}$ est intégrable sur $]0,1]$.

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in]0,+\infty[,\ g_n(x)\text{ existe.}$$

Soient $n\geq 1$, $x\in]0,+\infty[$ puis $\varepsilon\in]0,1[$. Les deux fonctions $u\mapsto(1-u)^n$ et $u\mapsto\frac{u^x}{x}$ sont de classe C^1 sur le segment $[\varepsilon,1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$\int_\varepsilon^1(1-u)^n u^{x-1}\ du=\left[(1-u)^n\frac{u^x}{x}\right]_\varepsilon^1+\frac{n}{x}\int_\varepsilon^1(1-u)^{n-1}u^x\ du=-(1-\varepsilon)^n\frac{\varepsilon^x}{x}+\frac{n}{x}\int_\varepsilon^1(1-u)^{n-1}u^x\ du.$$

Quand ε tend vers 0, au vu de l'intégrabilité sur $]0,1[$ de toutes les fonctions considérées, on obtient $g_n(x)=\frac{n}{x}g_{n-1}(x+1)$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in]0,+\infty[,\ g_n(x)=\frac{n}{x}g_{n-1}(x+1).}$$

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in]0,+\infty[$. En réitérant on obtient

$$g_n(x)=\frac{n}{x}\times\frac{n-1}{x+1}\times\ldots\frac{1}{x+n-1}g_0(x+n)=\frac{n!}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(x+k)}\int_0^1 u^{x+n-1}\ du=\frac{n!}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(x+k)}\times\frac{1}{x+n}.$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in]0,+\infty[,\ g_n(x)=\frac{n!}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(x+k)}\times\frac{1}{x+n}.}$$

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in]0,+\infty[$. En posant $u=\frac{t}{n}$ ou encore $t=nu$ et donc $dt=n\ du$, on obtient

$$\begin{aligned}G_n(x)&=\int_0^1\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\ dt=\int_0^1(1-u)^n(nu)^{x-1}\ ndu=n^x g_n(x)\\&=\frac{n^x n!}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(x+k)}\times\frac{1}{x+n}=\frac{(n-1)!}{n^{-x}\prod\limits_{k=0}^{n-1}(x+k)}\times\frac{n}{x+n}=\frac{n}{(n+x)f_n(x)}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]0,+\infty[,\ G_n(x) = \frac{n}{(n+x)f_n(x)}.}$$

III.2.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'inégalité à démontrer est claire quand $t = n$. D'autre part, pour $t \in [0, n[$,

$$e^{-t} \geq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \Leftrightarrow -t \geq n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \Leftrightarrow \ln(1 - \frac{t}{n}) \leq -\frac{t}{n}.$$

Maintenant, la fonction $h\ :\ u \mapsto \ln(1+u)$ est deux fois dérivable sur $]-1,+\infty[$ et pour $u > -1$, $h''(u) = -\frac{1}{(1+u)^2} < 0$. On en déduit que la fonction h est concave et en particulier que son graphe est en dessous de sa tangente en $(0,0)$ ce qui fournit

$$\forall u > -1,\ \ln(1+u) \leq u.$$

Pour $u = -\frac{t}{n} \in]-1, 0] \subset]-1,+\infty[$, on obtient $\ln(1 - \frac{t}{n}) \leq -\frac{t}{n}$ et l'inégalité de l'énoncé est également vraie si $t \in [0, n[$.

De même, si $t \in [0, n]$, $\frac{t}{n} \in [0, 1] \subset]-1,+\infty[$ et en posant $u = \frac{t}{n}$, on obtient $\ln(1 + \frac{t}{n}) \leq \frac{t}{n}$ et donc $e^t \geq \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0, n],\ e^{-t} \geq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \text{ et } e^t \geq \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n.}$$

Mais alors, d'une part $e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \geq 0$ et d'autre part $-e^t \leq -\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$ et donc, puisque $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \geq 0$, $-e^t\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq -\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = -\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n$. On en déduit que

$$e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}\left[1 - e^t\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] \leq e^{-t}\left[1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n\right].$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0, n],\ 0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}\left[1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n\right].}$$

III.2.3 Soit $a \in [0, 1]$.
- Pour $n = 1$, $(1-a)^1 = 1 - a \geq 1 - a = 1 - 1 \times a$. L'inégalité à démontrer est donc vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geq 1$. Supposons que $(1-a)^n \geq 1 - na$. Alors puisque $1 - a \geq 0$,

$$(1-a)^{n+1} = (1-a)^n(1-a) \geq (1-na)(1-a) = 1 - (n+1)a + a^2 \geq 1 - (n+1)a.$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall a \in [0, 1],\ (1-a)^n \geq 1 - na.}$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, n]$. $\frac{t^2}{n^2} \in [0, 1]$ et donc $\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n \geq 1 - n \times \frac{t^2}{n^2} = 1 - \frac{t^2}{n}$ puis $1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n \leq \frac{t^2}{n}$ et enfin $e^{-t}\left[1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n\right] \leq e^{-t}\frac{t^2}{n}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0, n],\ 0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2 e^{-t}}{n}.}$$

III.2.4 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, +\infty[$.

$$
\begin{aligned}
|\Gamma(x)-G_n(x)| &= \left|\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt - \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt\right| = \left|\int_0^n \left(e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)\,dt + \int_n^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt\right| \\
&= \int_0^n \left(e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right) t^{x-1}\,dt + \int_n^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt \leq \int_0^n \frac{t^2e^{-t}}{n}t^{x-1}\,dt + \int_n^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt \\
&\frac{1}{n}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x+1} + \int_n^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt = \frac{\Gamma(x+2)}{n} + \int_n^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt.
\end{aligned}
$$

Puisque la fonction $t\mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, $\displaystyle\int_n^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Comme $\dfrac{\Gamma(x+2)}{n}$ tend aussi vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on a montré que

$$\boxed{\forall x\in]0,+\infty[,\ \lim_{n\to+\infty} G_n(x)=\Gamma(x).}$$

Soit $x>0$. Alors $x\notin\mathbb{Z}^-$ et donc $f(x)\neq 0$. D'après la question III.2.1, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} G_n(x)=\frac{1}{f(x)}$ ce qui montre que $\Gamma(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ et donc que $\Gamma(x)\neq 0$ puis $f(x)=\dfrac{1}{\Gamma(x)}$.

$$\boxed{\forall x\in]0,+\infty[,\ f(x)=\frac{1}{\Gamma(x)}.}$$

III.3 D'après la question III.1, la fonction Γ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$. Comme la fonction Γ ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$, f est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$.

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, f est de classe C^∞ sur $]-n,+\infty[$.

- f est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ et le résultat est vrai pour $n=0$.
- Soit $n\geq 0$. Supposons que f soit de classe C^∞ sur $]-n,+\infty[$. D'après la question II.2, pour tout réel x on a $f(x)=xf(x+1)$. Par hypothèse de récurrence, la fonction $x\mapsto f(x+1)$ est de classe C^∞ sur $]-n-1,+\infty[=]-(n+1),+\infty[$ et il en est de même de f.

On a montré par récurrence que

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

