SESSION 2003

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE MP

MATHEMATIQUES 2

I. Exercice préliminaire

1.

$$H = {}^t\Gamma\,\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

H est une matrice symétrique réelle. D'après le théorème spectral, H est orthogonalement semblable à une matrice diagonale (réelle).

On a immédiatement $\mathrm{rg}(H - I_3) = 1$. Donc, $\dim(\mathrm{Ker}(H - I_3)) = 2$, et puisque H est diagonalisable, 1 est valeur propre d'ordre 2. La troisième valeur propre λ est fournie par la trace de H : $1 + 1 + \lambda = 18$ et donc $\lambda = 16$. Donc,

$$\mathrm{Sp}(H) = (1, 1, 16).$$

Il est immédiat que $\mathrm{Ker}(H - I_3)$ est le plan d'équation $x + y + z = 0$. Puisque les sous-espaces propres de H sont orthogonaux, on a d'autre part $\mathrm{Ker}(H - 16I_3) = (\mathrm{Ker}(H - I_3))^\perp = \mathrm{Vect}((1, 1, 1))$. On prend $e_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ (de sorte que (e_3) est une base orthonormée de $\mathrm{Ker}(H - 16I_3)$), puis $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$ (vecteur unitaire de $\mathrm{Ker}(H - I_3)$) et enfin,

$$e_2 = e_3 \wedge e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

.

(e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (pour le produit scalaire usuel), constituée de vecteurs propres de H.

$$\boxed{\text{Si } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}) \text{ et } D = \mathrm{diag}(1, 1, 4) \in \mathcal{D}_3^+(\mathbb{R}) \text{ alors } D^2 = P^{-1}HP.}$$

2. Puisque S est orthogonalement semblable à une matrice diagonale, S est symétrique. De plus, pour X vecteur colonne quelconque, on a

$${}^tXSX = {}^tX(PD{}^tP)X = {}^t({}^tPX)D({}^tPX) = x'^2 + y'^2 + 4z'^2 \geq 0,$$

où x', y' et z' sont les composantes de ${}^tPX$. La matrice S est donc positive.

Comme les valeurs propres de S sont les valeurs propres de D à savoir 1 et 4, 0 n'est pas valeur propre de S. Par suite, S est inversible. On peut donc poser $U = \Gamma\,S^{-1}$. On a déjà $\Gamma = US$ puis, S étant symétrique et P étant orthogonale,

$${}^tUU = S^{-1}\,{}^t\Gamma\,\Gamma\,S^{-1} = PD^{-1}P^{-1}PD^2P^{-1}PD^{-1}P^{-1} = I_3.$$

Donc, U est une matrice orthogonale. De plus,

$$U = \Gamma\, PD^{-1}\,{}^tP = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{4\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{4\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{4\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Donc,

$$\boxed{U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

II. Calcul de la distance de A à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

3. Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$. Posons $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$. Pour $j \in [\![1, n]\!]$, le coefficient ligne j, colonne j de la matrice ${}^tAB$ vaut $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j}$ et donc,

$$\mathrm{Tr}({}^tAB) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j}\right) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}b_{i,j}.$$

Ainsi, l'application $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}({}^tAB)$ n'est autre que le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et est en particulier un produit scalaire.

4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow {}^t A = A = -A \Rightarrow A = 0.$$

Donc $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{0\}$. Ensuite, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$A = \frac{1}{2}(A + {}^t A) + \frac{1}{2}(A - {}^t A),$$

avec $\frac{1}{2}(A + {}^t A) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A - {}^t A) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Donc,

$$\boxed{\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).}$$

Soit enfin $(A, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

$$A|B = \mathrm{Tr}({}^tAB) = \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA) = \mathrm{Tr}(-{}^tBA) = -B|A,$$

et donc, $A|B = 0$. Cette somme directe est donc orthogonale.

$$\boxed{\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).}$$

5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Posons $B = \frac{1}{2}(A + {}^t A)$ et $C = \frac{1}{2}(A - {}^t A)$. B (resp.C) est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$) parallèlement à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$). Par suite, pour toute $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $B - M$ est orthogonale à C et le théorème de PYTHAGORE permet d'écrire

$$\|A - M\|^2 = \|C + (B - M)\|^2 = \|C\|^2 + \|B - M\|^2 \geq \|C\|^2,$$

avec égalité si et seulement si $M = B$. Donc,

$$d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \operatorname*{Inf}_{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \|A - M\| = \operatorname*{Min}_{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \|A - M\| = \|C\| = \|\frac{1}{2}(A - {}^t A)\|.$$

De même,

$$d(A, \mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \|\frac{1}{2}(A + {}^t A)\|.$$

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \|\frac{1}{2}(A - {}^t A)\| \text{ et } d(A, \mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \|\frac{1}{2}(A + {}^t A)\|.}$$

6. La partie symétrique de Γ est

$$\frac{1}{2}(\Gamma + {}^t\Gamma) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Par suite,

$$\boxed{d(\Gamma, \mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \|\frac{1}{2}(\Gamma + {}^t \Gamma)\| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.}$$

III. Calcul de la distance de A à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

A. Théorème de la décomposition polaire

7. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Les valeurs propres de S dans $\mathbb{C}$ sont donc réelles.

• Supposons $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de S et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé. Alors,

$$0 \leq {}^tXSX = {}^tX(\lambda X) = \lambda \|X\|^2.$$

Maintenant X n'est pas nul et donc $\|X\|^2 > 0$. Après simplification, on obtient $\lambda \geq 0$. On a ainsi montré que toutes les valeurs propres de S sont des réels positifs ou nuls.

• Supposons que toutes les valeurs propres de S soient des réels positifs ou nuls. Notons $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ la famille des n valeurs propres de S et posons $D = \mathrm{diag}(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$. On sait que

$$\exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) / \ S = PDP^{-1}.$$

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Posons $X' = {}^tPX = (x'_i)_{1 \leq i \leq n}$. On a alors

$${}^tXSX = {}^tXPD{}^tPX = {}^t({}^tPX)D({}^tPX) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x'_i)^2 \geq 0.$$

On a ainsi montré que S appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

En résumé

$$\boxed{\forall S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ (S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}^+).}$$

8. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• ${}^t({}^AA) = {}^tA{}^t({}^tA) = {}^tAA$ et donc ${}^tAA \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

• Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$${}^tX({}^tAA)X = {}^t({}^AX)(AX) = \|AX\|^2 \geq 0.$$

Donc,

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tAA \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}).}$$

9. a. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. ${}^tA_iA_j$ est le coefficient ligne i, colonne j de ${}^tAA$ et donc de D^2. Par suite,

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ {}^tA_iA_j = \begin{cases} d_i^2 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} = \delta_{i,j}d_i^2.}$$

En particulier, pour chaque i on a $\|A_i\|^2 = {}^t A_iA_i = d_i^2$. Donc

$$\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!],\ (d_i = 0 \Leftrightarrow A_i = 0).}$$

b. Si A est nulle, alors D est nulle et n'importe quelle base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ convient. Sinon, pour chaque colonne A_i non nulle, (d_i est alors non nul) et on pose

$$E_i = \frac{1}{\|A_i\|}A_i = \frac{1}{d_i}A_i.$$

Ces vecteurs E_i constituent clairement une famille orthonormée pour le produit scalaire usuel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On la complète en une base orthonormée $(E_1, ..., E_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Pour chaque i, que la colonne A_i soit nulle ou pas, on a $A_i = d_iE_i$.

c. Soit E la matrice dont les colonnes sont E_1,...,E_n. Puisque ces colonnes constituent une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel, on sait que E est une matrice orthogonale. Les égalités de la question b. signifient alors que $A = ED$.

10. a. Posons $S = {}^tAA = {}^tBB$. D'après la question 8., S est une matrice symétrique positive et d'après la question 7., les valeurs propres de S sont des réels positifs.

Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ la famille des valeurs propres de S. Pour chaque i, posons $d_i = \sqrt{\lambda_i}$. Posons encore $D = \text{diag}(d_1, ..., d_n)$. D'après le théorème spectral, on sait que S est orthogonalement semblable à $D^2 = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Soit $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = PD^2P^{-1}$ alors $P^{-1}\,{}^tAAP = P^{-1}\,{}^tBBP = D^2$.

b. Puisque

$${}^t(AP)(AP) = P^{-1}\,{}^tAAP = P^{-1}\,{}^tBBP = {}^t(BP)BP = D^2,$$

d'après la question 9.c., il existe deux matrices orthogonales E et E' telles que $AP = ED$ et $BP = E'D$. Donc,

$$A = EDP^{-1} = EE'^{-1}E'DP^{-1} = EE'^{-1}B.$$

Posons $U = EE'^{-1}$. U est un produit de matrices orthogonales et donc, U est une matrice orthogonale. De plus, $A = UB$.

(On peut noter que la réciproque est aussi vraie : ${}^tAA = {}^t B\,{}^tUUB = {}^tBB$).

11. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice ${}^tAA$ est une matrice symétrique réelle positive et il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D à coefficients réels positifs telles que ${}^tAA = PD^2\,{}^tP = {}^t(D\,{}^tP)({}^tPD)$.

D'après la question 10., il existe une matrice orthogonale U_0 telle que $A = U_0(D\,{}^tP) = (U_0\,{}^tP)(PD\,{}^tP)$. Posons $U = U_0\,{}^tP$ et $S = PD\,{}^tP$. U est orthogonale en tant que produit de deux matrices orthogonales et S est symétrique positive car orthogonalement semblable à une matrice diagonale positive. On a montré que

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \exists U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}),\ \exists S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})/\ A = US.}$$

B. Calcul de $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.

12. Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

$$\|M\Omega\|^2 = \text{Tr}({}^t(M\Omega)M\Omega) = \text{Tr}({}^t\Omega\,{}^tMM\Omega) = \text{Tr}(\Omega\,{}^t\Omega\,{}^tMM) = \text{Tr}({}^tMM) = \|M\|^2,$$

et donc $\|M\Omega\| = \|M\|$. De même, $\|\Omega M\| = \|M\|$.

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall \Omega \in \mathcal{O}_(\mathbb{R}),\ \|M\Omega\| = \|\Omega M\| = \|M\|.}$$

13. a. $\|A - \Omega\| = \|US - \Omega\| = \|U(S - U^{-1}\Omega)\| = \|S - U^{-1}\Omega\|$ (d'après la question 12.).

Maintenant, l'application $\Omega \mapsto U^{-1}\Omega$ est une permutation de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ (de réciproque $\Omega \mapsto U\Omega$). Donc, quand la matrice Ω décrit $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, la matrice $\Omega' = U^{-1}\Omega$ décrit aussi $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Donc,

$$d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \operatorname*{Inf}_{\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \|A - \Omega\| = \operatorname*{Inf}_{\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \|S - U^{-1}\Omega\| = \operatorname*{Inf}_{\Omega' \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \|S - \Omega'\| = d(S, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})).$$

Donc,

$$\boxed{d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = d(S, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}).}$$

b. $\|S - \Omega\| = \|PDP^{-1} - \Omega\| = \|P(D - P^{-1}\Omega P)P^{-1}\| = \|D - P^{-1}\Omega P\|$ (toujours d'après la question 12.). Or, l'application $\Omega \mapsto P^{-1}\Omega P$ est une permutation de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ (de réciproque $\Omega \mapsto P\Omega P^{-1}$). Donc comme précédemment,

$$\boxed{d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = d(S, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = d(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})).}$$

14. a. Soit $\Omega \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}\|D - \Omega\|^2 &= \mathrm{Tr}\left({}^t(D - \Omega)(D - \Omega)\right) = \mathrm{Tr}(D^2) - \mathrm{Tr}(D\Omega) - \mathrm{Tr}({}^t(D\Omega)) + \mathrm{Tr}(I_n)\\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 - 2\mathrm{Tr}(D\Omega) + n.\end{aligned}$$

b. Notons $\omega_1, \ldots, \omega_n$ les coefficients diagonaux de la matrice Ω. La valeur absolue des coefficients d'une matrice orthogonale sont inférieurs à 1 et en particulier, les ω_i sont inférieursou égaux à 1. Mais alors, puisque les λ_i sont positifs,

$$\mathrm{Tr}(D\Omega) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \lambda_i \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

c. Soit $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. D'après la question b., on a

$$\|D - \Omega\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 - 2\mathrm{Tr}(D\omega) + n \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} \lambda_i + n = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i^2 - 2\lambda_i + 1) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - 1)^2 = \|D - I_n\|^2,$$

avec égalité effectivement obtenue pour $D = I_n \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Donc

$$\boxed{d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = d(S, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = d(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|D - I_n\|.}$$

15. D'après la question 12., on a

$$\|D - I_n\| = \|P(D - I_n)P^{-1}\| = \|S - I_n\| = \|U(S - I_n)\| = \|A - U\|,$$

et donc,

$$\boxed{d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|A - U\|.}$$

16. $d(\Gamma, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|D - I_3\|$ où $D = \mathrm{diag}(1, 1, 4)$ et donc $D - I_3 = \mathrm{diag}(0, 0, 3)$. On en déduit que

$$\boxed{d(\Gamma, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = 3.}$$

IV. Calcul de la distance de A à Δ_p.

17. a. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons χ_M le polynôme caractéristique de M. Si χ_M n'a pas de racine réelle non nulle, on prend $\alpha = 1$. Si χ_M a au moins une racine réelle non nulle, celles-ci sont en nombre fini et on peut prendre pour α la plus petite valeur absolue d'une racine non nulle de χ_M. Dans tous les cas, α est un réel strictement positif tel que χ_M n'admette pas de racine dans $]0, \alpha[$ ou encore tel que pour $\lambda \in]0, \alpha[$, la matrice $M - \lambda I_n$ soit inversible.

b. Soit $\varepsilon > 0$. On choisit un réel λ dans $\left]0, \text{Min}\left\{\alpha, \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right\}\right[$. D'une part, la matrice $M - \lambda I_n$ est inversible et d'autre part,

$$\|M - (M - \lambda I_n)\| = \|\lambda I_n\| = \lambda\sqrt{n} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\sqrt{n} = \varepsilon.$$

Ainsi,

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \exists N \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) / \ \|M - N\| < \varepsilon.$$

Par suite,

$$\boxed{\mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ est dense dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

18. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Il existe une matrice M inversible, et donc de rang au moins p telle que $\|A - M\| < \varepsilon$. Par suite, pour tout réel strictement positif ε, $d(A, \Delta_p) \leq \varepsilon$ et donc

$$\boxed{\forall p \in [\![0, n]\!],\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ d(A, \Delta_p) = 0.}$$

V. Calcul de la distance de A à ∇_p.

A. Théorème de Courant et Fischer

19. Puisque la famille $(C_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel, on a

$${}^tXX = X|X = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Ensuite, pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, C_i est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_i et donc

$${}^tXAX = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i C_i\right)\Big|\left(\sum_{j=1}^{n} x_j A C_j\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i C_i\right)\Big|\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \lambda_j C_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2.$$

Par suite,

$$\boxed{\forall X \in \mathcal{M}_{n,1} \setminus \{0\},\ \frac{{}^tXAX}{{}^tXX} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.}$$

En particulier,

$$\boxed{\forall k \in \{1, ..., n\},\ \frac{{}^tC_k A C_k}{{}^tC_k C_k} = \lambda_k.}$$

20. Soit X un vecteur non nul de F_k. Puisque $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_k$,

$${}^tXAX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i^2 \geq \lambda_k \sum_{i=1}^{k} x_i^2 = \lambda_k \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \lambda_k {}^tXX.$$

Donc, pour tout vecteur non nul X de F_k, on a $\dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX} \geq \lambda_k$. D'autre part, pour $X = C_k$ (qui est un vecteur non nul de F_k), on a $\dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX} = \dfrac{{}^tC_kAC_k}{{}^tC_kC_k} = \lambda_k$ et donc,

$$\boxed{\min_{X \in F_k \setminus \{0\}} \frac{{}^tXAX}{{}^tXX} = \lambda_k.}$$

21. a.

$$\begin{aligned}\dim(F \cap \operatorname{vect}(C_k, ..., C_n)) &= \dim(F) + \dim(\operatorname{vect}(C_k, ..., C_n)) - \dim(F + \operatorname{vect}(C_k, ..., C_n)) \\ &= k + (n - k + 1) - \dim(F + \operatorname{vect}(C_k, ..., C_n)) = n + 1 - \dim(F + \operatorname{vect}(C_k, ..., C_n)) \\ &\geq n + 1 - n = 1.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall F \in \Psi_k,\ \dim(F \cap \operatorname{vect}(C_k, ..., C_n)) \geq 1.}$$

b. Il existe donc un vecteur X non nul dans $F \cap \operatorname{vect}(C_k, ..., C_n)$. On a alors

$${}^tXAX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 = \sum_{i=k}^{n} \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_k \sum_{i=k}^{n} x_i^2 = \lambda_k \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \lambda_k {}^tXX,$$

et donc, il existe un vecteur non nul de F tel que $\dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX} \leq \lambda_k$. On en déduit que

$$\boxed{\min_{X \in F \setminus \{0\}} \frac{{}^tXAX}{{}^tX} X \leq \lambda_k.}$$

22. D'après la question 20., il existe un sous-espace F de dimension k (à savoir $F = F_k$) tel que $\displaystyle\min_{X \in F \setminus \{0\}} \frac{{}^tXAX}{{}^tXX} = \lambda_k$. Par suite,

$$\max_{F \in \Psi_k} \min_{X \in F \setminus \{0\}} \frac{{}^tXAX}{{}^tXX} \geq \lambda_k.$$

Mais, d'après la question 21., pour tout sous-espace F de dimension k, on a $\displaystyle\min_{X \in F \setminus \{0\}} \frac{{}^tXAX}{{}^tXX} \leq \lambda_k$, et donc

$$\max_{F \in \Psi_k} \min_{X \in F \setminus \{0\}} \frac{{}^tXAX}{{}^tXX} \leq \lambda_k.$$

Finalement,

$$\boxed{\max_{F \in \Psi_k} \min_{X \in F \setminus \{0\}} \frac{{}^tXAX}{{}^tXX} = \lambda_k.}$$

B. Calcul de $d(A, \nabla_p)$

Puisque $r > p$, A n'est pas dans ∇_p.

23. D'après la question 11., il existe une matrice orthogonale U et une matrice symétrique positive S telles que $A = US$. Il existe d'autre part une matrice orthogonale P' et une matrice diagonale positive D telles que $S = P'D{}^tP'$. On prend $P = {}^tP'$ puis $E = UP'$. E et P sont des matrices orthogonales et D est une matrice diagonale à coefficients positifs telles que $A = EDP$.

Puisque E et P sont inversibles, le rang de A est le rang de D. D'autre part,

$${}^tAA = {}^tPD{}^tEEDP = {}^tPD^2P.$$

Le rang de ${}^tAA$ est donc le rang de D^2. Maintenant, D étant diagonale, le rang de D est le nombre de coefficients non nuls de D. Les coefficients de D^2 étant les carrés des coefficients de D, ce nombre est également le rang de D^2. On a montré que

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{rg}({}^tAA) = \mathrm{rg}A.}$$

24.

$$A = EDP = \sum_{l=1}^{n} \sqrt{\mu_l} M_l P.$$

Pour chaque l, posons alors $R_l = M_l P$. Puisque P est inversible, le rang de R_l est le rang de M_l à savoir 1 puisque M_l contient une et une seule colonne non nulle (les colonnes d'une matrice orthogonale étant toutes non nulles). D'autre part, pour $(k, l) \in [\![1, n$
rrbracket^2, on a

$$\mathrm{Tr}({}^tR_kR_l) = \mathrm{Tr}(P^{-1}\,{}^tM_kM_lP) = \mathrm{Tr}({}^tM_kM_l).$$

Maintenant, le coefficient ligne i, colonne i de ${}^tM_kM_l$ est le produit scalaire usuel de la i-ème colonne de M_k par la i-ème colonne de M_l et vaut donc $\delta_{i,k}\delta_{i,l}$. Si $k \neq l$, ces coefficients sont tous nuls et dans ce cas, $\mathrm{Tr}({}^tM_kM_l) = 0$. Si $k = l$, tous ces coefficients sont nuls sauf le coefficient ligne k, colonne k qui vaut 1. Dans ce cas, $\mathrm{Tr}({}^tM_kM_l) = 1$. En résumé,

$$\forall (k, l) \in \{1, ..., n\}^2,\ R_k|R_l = \mathrm{Tr}({}^tR_kR_l) = \delta_{k,l},$$

et la famille $(R_k)_{1\leq k\leq n}$ est bien une famille orthonormée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

25. Le rang de N est encore le rang de $NP^{-1} = \displaystyle\sum_{l=1}^{p} \sqrt{\mu_l} M_l$. Mais les $n - p$ dernières colonnes de la matrice NP^{-1} sont nulles et donc $\mathrm{rg}(NP^{-1}) \leq p$, ou encore

$$\boxed{N \in \nabla_p.}$$

Puisque la famille (R_l) est orthonormée, on a alors

$$d(A, \nabla_p)^2 \leq \|A - N\|^2 = \|\sum_{l=p+1}^{r} \sqrt{\mu_l} R_l\|^2 = \sum_{l=p+1}^{r} (\sqrt{\mu_l})^2 = \mu_{p+1} + ... + \mu_r,$$

et donc,

$$\boxed{d(A, \nabla_p) \leq \sqrt{\mu_{p+1} + ... + \mu_r}.}$$

26. a. D'après la question 23., $\mathrm{rg}({}^tAA) = r$ et donc,

$$\begin{aligned}
\dim(\mathrm{Ker}M \cap \mathrm{Im}({}^tAA)) &= \dim(\mathrm{Ker}(M)) + \dim(\mathrm{Im}({}^tAA)) - \dim(\mathrm{Ker}M + \mathrm{Im}({}^tAA)) \\
&= (n - p) + r - \dim(\mathrm{Ker}M + \mathrm{Im}({}^tAA)) \\
&\geq (n - p) + r - n = r - p.
\end{aligned}$$

b. Soit F un sous-espace vectoriel de G de dimension k. D'après la question 21.b.,

$$\min_{X\in F\setminus\{0\}} \frac{{}^tX{}^t(A - M)(A - M)X}{{}^tXX} \leq \alpha_k,$$

Maintenant, les vecteurs X considérés étant dans le noyau de M, on a

$${}^tX{}^t(A - M)(A - M)X = {}^tX{}^t(A - M)AX = {}^tX{}^tAAX - {}^t(MX)AX = {}^tX{}^tAAX.$$

Donc

$$\boxed{\min_{X\in F\setminus\{0\}} \frac{{}^tX{}^tAAX}{{}^tXX} \leq \alpha_k.}$$

c. On a $1 \le k \le r-p$ et donc $k+p \le r$. Pour chaque $i \in [\![1,...,k+p]\!]$, on a donc $\mu_i \neq 0$. Mais alors

$$V_i = \frac{1}{\mu_i}{}^tAAV_i \in \mathrm{Im}({}^tAA).$$

Par suite, $\mathrm{vect}(V_1,...,V_{p+k}) \subset \mathrm{Im}({}^tAA)$. On en déduit que

$$G \cap \mathrm{vect}(V_1,...,V_{p+k}) = \mathrm{Ker}M \cap \mathrm{Im}({}^tAA) \cap \mathrm{vect}(V_1,...,V_{p+k}) = \mathrm{Ker}M \cap \mathrm{vect}(V_1,...,V_{p+k}).$$

On en déduit, comme à la question a., que $\dim(G \cap \mathrm{vect}(V_1,...,V_{p+k}) \ge (n-p)+(p+k)-n = k$.

$$\boxed{\dim(G \cap \mathrm{vect}(V_1,...,V_{p+k}) \ge k.}$$

d. On peut donc choisir un sous-espace F de dimension k dans $G \cap \mathrm{vect}(V_1,...,V_{p+k})$. D'après b., on a

$$\min_{X\in F\setminus\{0\}} \frac{{}^tX{}^tAAX}{{}^tXX} \le \alpha_k.$$

D'autre part, pour $X \in F$, on peut poser $X = \sum_{i=1}^{k+p} x_iV_i$. On a alors (puisque la famille $(V_1,...,V_{k+p})$ est orthonormée)

$${}^tX{}^tAAX = {}^t\left(\sum_{i=1}^{k+p} x_iV_i\right)\left(\sum_{j=1}^{k+p} x_j\mu_jV_j\right) = \sum_{i=1}^{k+p} \mu_i x_i^2 \ge \mu_{k+p}\sum_{i=1}^{k+p} x_i^2 = \mu_{k+p}{}^tXX.$$

Donc, si X est un vecteur non nul de F, $\frac{{}^tX{}^tAAX}{{}^tXX} \ge \mu_{k+p}$ et en particulier,

$$\min_{X\in F\setminus\{0\}} \frac{{}^tX{}^tAAX}{{}^tXX} \ge \mu_{k+p}.$$

Finalement,

$$\boxed{\alpha_k \ge \mu_{k+p}.}$$

27. Le travail précédent est valable si on suppose que M est de rang inférieur ou égal à p. Soit M une matrice de rang $q \le p < r$.

$$\|A-M\|^2 = \mathrm{Tr}({}^t(A-M)(A-M)) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ge \sum_{i=1}^{r-p} \alpha_i \ge \sum_{i=1}^{r-p} \mu_{i+p} = \sum_{k=p+1}^{r} \mu_k.$$

Par suite, pour toute $M \in \nabla_p$, $\|A-M\| \ge \sqrt{\mu_{p+1}+...+\mu_r}$ et, compte tenu de la question 25.,

$$\boxed{d(A,\nabla_p) = \sqrt{\mu_p+1+...+\mu_r}.}$$

28. Γ est de rang $r=3$. Les valeurs propres de Γ sont $\mu_1=4$, $\mu_2=1$ et $\mu_3=1$.

Donc, $d(\Gamma,\nabla_0) = \sqrt{16+1+1} = 3\sqrt{2}$, $d(\Gamma,\nabla_1) = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $d(\Gamma,\nabla_2) = \sqrt{1} = 1$. Enfin, comme Γ est dans $\nabla_3 = \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$, $d(\Gamma,\nabla_3) = 0$.

