SESSION 2002

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE MP

MATHEMATIQUES 2

I. Etude d'un exemple

1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On sait que le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A)$. Le théorème de Cayley-Hamilton permet alors d'affirmer que $\chi_A(A) = 0$. Ainsi

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0.}$$

2. Puisque A n'est pas une matrice scalaire, la famille (I_2, A) est libre et $\mathbb{A} = \mathrm{Vect}(I_2, A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension 2.
Soit alors $(a, b, a', b') \in \mathbb{R}^4$. D'après 1.,

$$\begin{aligned}(aI_2 + bA)(a'I_2 + b'A) &= aa'I_2 + (ab' + a'b)A + bb'A^2 = aa'I_2 + (ab' + a'b)A + bb'(\mathrm{tr}(A)A - \det(A)I_2)\\ &= (aa' - bb'\det(A))I_2 + (ab' + a'b + bb'\mathrm{tr}(A))A \in \mathbb{A}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{A}$ est stable pour $\times$ et, puisque d'autre part $\mathbb{A}$ contient $I_2 = 1.I_2 + 0.A$,

$$\boxed{\mathbb{A} \text{ est une sous-algèbre de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ de dimension 2.}}$$

3. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $M = aI_2 + bA$. D'après 2.,

$$M^2 = (a^2 - b^2\det(A))I_2 + (2ab + b^2\mathrm{tr}(A))A.$$

Par suite, puisque la famille (I_2, A) est libre,

$$M^2 = -I_2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2 - b^2\det(A) = -1\\ b(2a + b\mathrm{tr}(A)) = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = 0\\ a^2 = -1\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} a = -\dfrac{b}{2}\mathrm{tr}(A)\\ b^2\left(\dfrac{(\mathrm{tr}(A))^2}{4} - \det(A)\right) = -1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -\dfrac{b}{2}\mathrm{Tr}(A)\\ b^2\dfrac{(\mathrm{tr}(A))^2 - 4\det(A)}{4} = -1\end{array}\right. .$$

Ce dernier système a des solutions dans $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $(\mathrm{tr}A)^2 < 4\ \det A$ et donc

$$\boxed{\exists M \in \mathbb{A}/\ M^2 = -I_2 \Leftrightarrow \mathrm{tr}A)^2 < 4\ \det A.}$$

4. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda^2 \neq -1$ et donc, $(\lambda I_2)^2 \neq -I_2$. Donc, B n'est pas une matrice scalaire et la famille (I_2, B) est une famille libre de $\mathbb{A}$. De plus, $\mathrm{card}(I_2, B) = 2 = \dim\mathbb{A}$ et la famille (I_2, B) est une base de $\mathbb{A}$.
Toute matrice de $\mathbb{A}$ s'écrit donc de manière unique sous la forme $xI_2 + yB$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Soit alors $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{A}\\ x + yi & \mapsto & xI_2 + yB\end{array}$. Puisque (I_2, B) est une base de $\mathbb{A}$, φ est bijective et est clairement linéaire.
Ensuite, puisque $B^2 = -I_2$, pour $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$,

$$\begin{aligned}\varphi((x + iy)(x' + iy')) &= \varphi((xx' - yy') + (xy' + yx')i) = (xx' - yy')I_2 + (xy' + yx')B = (xI_2 + yB)(x'I_2 + y'B)\\ &= \varphi(x + iy)\varphi(x' + iy').\end{aligned}$$

φ est donc un morphisme pour $\times$, et finalement, en tenant compte de $\varphi(1) = I_2$, φ est un isomorphisme d'algèbres. En particulier, comme $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps

$$\boxed{(\mathbb{A}, +, \times) \text{ est un corps.}}$$

5. Si $(\mathrm{tr}A)^2 = 4\det A$, pour $(, b) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$(aI_2 + bA)^2 = (a^2 - \frac{b^2}{4}\mathrm{tr}(A))I_2 + (2ab + b^2\mathrm{tr}(A))A.$$

Par suite,

$$(aI_2 + bA)^2 = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2 - \frac{1}{4}b^2\mathrm{tr}(A) = 0 \\ 2ab + b^2\mathrm{tr}(A) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow a = b = 0 \text{ ou } a = -\frac{b}{2}\mathrm{tr}(A) \Leftrightarrow a = -\frac{b}{2}\mathrm{tr}(A).$$

Les matrices $M = aI_2 + bA$ telles que $M^2 = 0$ sont les $b(-\frac{\mathrm{tr}(A)}{2}I_2 + A)$, $b \in \mathbb{R}$.

En particulier, l'équation $M^2 = 0$ admet au moins une solution non nulle dans $\mathbb{A}$ (par exemple la matrice $-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(A)I_2 + A$ qui est non nulle puisque A n'est pas une matrice scalaire). Ainsi, $\mathbb{A}$ n'est pas intègre et donc pas un corps.

$$\boxed{\text{Si } (\mathrm{tr}A)^2 = 4\det A, \ (\mathbb{A}, +, \times) \text{ n'est pas un corps.}}$$

6. Il existe $P \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP$. Mais alors, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$P^{-1}(aI_2 + bA)P = aI_2 + bP^{-1}AP = aI_2 + bB \text{ et de même } P(aI_2 + bB)P^{-1} = aI_2 + bA.$$

Posons alors $\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{A} & \to & \mathbb{B} \\ M & \mapsto & P^{-1}MP \end{array}$. Ce qui précède montre que ψ est une bijection de $\mathbb{A}$ sur $\mathbb{B}$, de réciproque $M \mapsto P^{-1}MP$. ψ est clairement linéaire. Enfin, pour $(M, N) \in \mathbb{A}^2$, on a

$$\psi(MN) = P^{-1}MNP = (P^{-1}MP)(P^{-1}NP) = \psi(M)\psi(N),$$

Comme de plus $\psi(I_2) = I_2$, ψ est un isomorphisme de l'algèbre $\mathbb{A}$ sur l'algèbre $\mathbb{B}$.

7. On a $\chi_A = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A)$. Son discriminant vaut $(\mathrm{tr}(A))^2 - 4\det(A) > 0$. χ_A admet donc deux racines réelles distinctes et A est ainsi diagonalisable (dans $\mathbb{R}$). Il existe une matrice diagonale D, non scalaire puisque les valeurs propres de A sont distinctes, telle que A est semblable à D. D'après 6., l'algèbre $\mathbb{A}$ est isomorphe à l'algèbre engendrée par I_2 et D.

Maintenant, $\mathrm{Vect}(I_2, D) \subset \mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ et $\dim(\mathrm{Vect}(I_2, D)) = 2 = \dim(\mathcal{D}_2(\mathbb{R}))$. Donc, $\mathrm{Vect}(I_2, D) = \mathcal{D}_2(\mathbb{R})$. Ainsi, l'algèbre $\mathbb{A}$ est isomorphe à l'algèbre $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$.

$\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ n'est pas intégre car $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Par suite, $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ n'est pas un corps et il en est de même de $\mathbb{A}$.

II. Quelques résultats généraux

1. Puisque $\mathbb{D}$ est stable pour la multiplication, Φ_a est bien une application de $\mathbb{D}$ dans lui-même.
Soient alors $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(x, y) \in \mathbb{D}^2$.

$$\Phi_a(\lambda x + \mu y) = a(\lambda x + \mu y) = \lambda.ax + \mu.ay = \lambda\Phi_a(x) + \mu\Phi_a(y).$$

Φ_a est bien un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{D}$.

$$\boxed{\Phi_a \in \mathcal{L}(\mathbb{D}).}$$

2. Soit $(a, a') \in \mathbb{D}^2$ et $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2$. Pour x dans E,

$$(\lambda\Phi_a + \lambda'\Phi_{a'})x = \lambda ax + \lambda' a' x = (\lambda a + \lambda' a')x = \Phi_{\lambda a + \lambda' a'}(x),$$

puis

$$\Phi_a \circ \Phi_{a'}(x) = \Phi_a(a'x) = aa'x = \Phi_{aa'}(x),$$

et enfin

$$\Phi_{1_A}(x) = 1_A x = x = \mathrm{Id}_{\mathbb{D}}(x).$$

Pour $(a, a') \in \mathbb{D}^2$ et $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2$, on a donc

$$\Phi_{\lambda a + \lambda' a'} = \lambda\Phi_a + \lambda'\Phi_{a'},\ \Phi_a \circ \Phi_{a'} = \Phi_{aa'} \text{ et } \Phi_{1_A} = \mathrm{Id}_{\mathbb{D}}.$$

L'application $a \mapsto \Phi_a$ est donc un morphisme d'algèbres, de l'algèbre $\mathbb{D}$ vers l'algèbre $\mathcal{L}(\mathbb{D})$. Comme il est d'autre part connu que l'application $\Phi \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\Phi$ est un morphisme d'algèbre de l'algèbre $\mathcal{L}(\mathbb{D})$ vers l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, Ψ est un morphisme d'algèbres en tant que composée de morphismes d'algèbres.

Soit $a \in \mathbb{D}$.

$$a \in \mathrm{Ker}\Psi \Leftrightarrow \Psi(a) = 0_n \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{D},\ ax = 0 \Rightarrow a \times 1_{\mathbb{D}}0 \Rightarrow a = 0.$$

Ψ est donc injectif.

Par suite, $\Psi(\mathbb{D})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image d'une algèbre par un morphisme d'algèbres. Psi étant injectif, réalise un isomorphisme d'algèbres de $\mathbb{D}$ sur l'algèbre $\Psi(\mathbb{D})$.

3. Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $z = a + ib$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Puisque

$$\Phi_z(1) = a + ib \text{ et que } \Phi_z(i) = -b + ia,$$

on a

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi_z) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(z) & -\mathrm{Im}(z) \\ \mathrm{Im}(z) & \mathrm{Re}(z) \end{pmatrix}.}$$

4. (a) La matrice $B = A - \lambda I_n$ est un élément de $\mathbb{A}$, non nul (car A n'est pas scalaire) et n'est pas inversible (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) car λ est valeur propre de A. Cette matrice n'est pas plus inversible dans $\mathbb{A}$ car l'élément neutre I_n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dans $\mathbb{A}$. $\mathbb{A}$ contient donc une matrice non nulle et non inversible dans $\mathbb{A}$, et $\mathbb{A}$ n'est pas un corps.

(b) Une matrice diagonalisable ou trigonalisable non scalaire est en particulier une matrice non scalaire admettant au moins une valeur propre réelle. D'après (a), si $\mathbb{A}$ contient une telle matrice, $\mathbb{A}$ n'est pas un corps.

(c) Soit A un élément non nul de $\mathbb{A}$. On sait déjà que Φ_A est un endomorphisme de $\mathbb{A}$. Puisque $\mathbb{A}$ est intègre, on en déduit que le noyau de Φ_A est nul et donc que Φ_A est injectif. Puisque $\mathbb{A}$ est de dimension finie, ϕ_A est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{A}$. En particulier, l'élément I_n de $\mathbb{A}$ admet un antécédent par Φ_A. Donc, il existe $A' \in \mathbb{A}$ telle que $AA' = I_n$. La matrice A est donc inversible à droite dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donc inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. De plus, son inverse A' est dans $\mathbb{A}$ et A est inversible dans $\mathbb{A}$.

On a montré que tout élément non nul de $\mathbb{A}$ admet un inverse dans $\mathbb{A}$ et donc $\mathbb{A}$ est un corps.

III. L'algèbre des quaternions

1. $A^2 = -I_n \Rightarrow (\det(A))^2 = (-1)^n \Rightarrow (-1)^n \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow n$ pair.

2. $\mathbb{H} = \mathrm{Vect}(I_n, A, B, AB)$ est déjà un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenant I_n. De plus,

$$A^2 = -I_n,\ B^2 = -I_n,\ A \times AB = -B,\ AB \times B = -A,\ B \times AB = -BBA = A,\ AB \times A = A(-AB) = B,$$
$$AB \times AB = -A^2B^2 = -I_n.$$

Ainsi, tout produit de deux éléments d'une famille génératrice de $\mathbb{H}$ est encore dans $\mathbb{H}$, et, par linéarité, $\mathbb{H}$ est stable pour $\times$. Donc

$$\boxed{\mathbb{H} \text{ est une sous-algèbre de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

3. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. D'après les règles de calcul trouvées en 2., on a

$$(tI_n + xA + yB + zAB)(tI_n - xA - yB - zAB) = (t^2 + x^2 + y^2 + z^2)I_n.$$

4. **(a)** Soit $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$.

$$tI_n + xA + yB + zAB = 0 \Rightarrow (tI_n + xA + yB + zAB)(tI_n - xA - yB - zAB) = 0 \Rightarrow (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)I_n = 0$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0 \Rightarrow t = x = y = z = 0.$$

La famille (I_n, A, B, AB) est donc une famille libre de $\mathbb{H}$. Etant génératrice de $\mathbb{H}$, cette famille est une base de $\mathbb{H}$.

$$\boxed{\mathbb{H} \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel de dimension 4.}}$$

(b) D'après ce qui précède,

$$\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ tI_n + xA + yB + zAB = 0 \Leftrightarrow t = x = y = z = 0.$$

Soit alors $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{(0, 0, 0, 0)\}$. $t^2 + x^2 + y^2 + z^2$ n'est pas nul et

$$(tI_n + xA + yB + zAB)\frac{1}{t^2 + x^2 + y^2 + z^2}(tI_n - xA - yB - zAB) = I_n.$$

Ainsi, tout élément non nul de $\mathbb{H}$ est inversible dans $\mathbb{H}$ et donc,

$$\boxed{\mathbb{H} \text{ est un corps.}}$$

5. **(a)** On a $J^2 = -I_2$ et un calcul par blocs fournit immédiatement

$$A^2 = -I_4,\ B^2 = -I_4 \text{ et } AB = -BA = \begin{pmatrix} 0 & -J \\ -J & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Notons tout d'abord que ${}^tJ = -J$. Par suite, pour $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$, on a immédiatement

$${}^t(tI_n + xA + yB + zC) = tI_n - xA - yB - zC \in \mathbb{H}.$$

De plus, pour $M = tI_n + xA + yB + zC \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$,

$${}^tM = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)M^{-1}.$$

IV. Les automorphismes de l'algèbre des quaternions

1. Soit $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$ et $M = tI_n + xA + yB + zC \in \mathbb{H}$. Puisque (I_n, A, B, C) est libre, on a d'après III.5.,

$${}^tM = -M \Leftrightarrow tI_n - xA - yB - zC = -(tI_n + xA + yB + zC) \Leftrightarrow t = 0.$$

Ainsi, $\mathbb{L} = \text{Vect}(A, B, C)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, de base $\mathcal{C} = (A, B, C)$.

$A^2 = -I_4$ n'est pas un quaternion pur et $\mathbb{L}$ n'est pas stable pour $\times$ et donc pas une algèbre.

2. Soient $(x, y, z, x', y', z') \in \mathbb{R}^6$ puis $M = xA + yB + zC$ et $N = x'A + y'B + z'C$. Puisque la base (A, B, C) est orthonormée, on a

$$(M|N) = xx' + yy' + zz'.$$

puis

$$MN = (xA + yB + zC)(x'A + y'B + z'C) = -(xx' + yy' + zz')I_4 + (yz' - y'z)A + (zx' - xz')B + (xy' - yx')C,$$

et en échangeant les rôles de M et N,

$$NM = -(xx' + yy' + zz')I_4 - (yz' - y'z)A - (zx' - xz')B - (xy' - yx')C.$$

Par suite,

$$\frac{1}{2}(MN+NM) = -(xx'+yy'+zz')I_4 = -(M|N)I_4.$$

$$\boxed{\forall (M,N)\in \mathbb{L}^2,\ \frac{1}{2}(MN+NM) = -(M|N)I_4.}$$

3. Soit M un quaternion pur. D'après 2.,

$$M^2 = -\|M\|^2 I_4.$$

M^2 est donc de la forme λI_4 où λ est un réel négatif.

Réciproquement, supposons que $M = tI_4 + xA + yB + zC$ est un quaternion tel que M^2 est de la forme λI_4 où λ est un réel négatif.

- si $M = 0$, M est un quaternion pur.
- Sinon, d'après III.3.

$$\lambda^4 = \det(M^2) = (\det M)^2 = (\det M)(\det {}^tM) = \det((x^2+y^2+z^2+t^2)I_4) = (x^2+y^2+z^2+t^2)^4,$$

et puisque $\lambda \leq 0$,

$$\lambda = -(x^2+y^2+z^2+t^2) < 0.$$

Maintenant, l'égalité $M^2 = \lambda I_2$ s'écrit encore $M^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}M$ et d'après III.5.b),

$${}^tM = -\lambda M^{-1} = -\lambda\frac{1}{\lambda}M = -M,$$

et M est un quaternion pur.

$$\boxed{\forall M\in \mathbb{H},\ (M\in\mathbb{L} \Leftrightarrow \exists \lambda\in\mathbb{R}^-/\ M^2 = \lambda I_4).}$$

4. Soit M un quaternion pur. Il existe un réel négatif λ tel que $M^2 = -\lambda I_4$. Puisque Φ est un morphisme d'algèbres,

$$(\Phi(M))^2 = \Phi(M^2) = \Phi(\lambda I_4) = \lambda\Phi(I_4) = \lambda I_4.$$

$\Phi(M)$ est donc un quaternion pur. Ensuite, d'après 2., $-\|M\|I_4 = M^2$ et

$$-\|\Phi(M)\|^2 I_4 = (\Phi(M))^2 = \Phi(M^2) = \Phi(-\|M\|^2 I_4) = -\|M\|^2 I_4.$$

Donc, $\|\Phi(M)\| = \|M\|$.

Ainsi, la restriction de Φ à $\mathbb{L}$ transforme un élément de $\mathbb{L}$ en un élément de $\mathbb{L}$ et est donc un endomorphisme de $\mathbb{L}$. D'autre part, cette restriction conserve la norme et est donc un automorphiqme orthogonal de $\mathbb{L}$.

5. (a) Soient M et N deux quaternions purs colinéaires et de mêmes normes.
Puisque M et N sont colinéaires et de même norme, $N = \pm M$.

- Si $N = M$, $P = I_4$ convient.
- Si $N = -M$, soit P un quaternion pur non nul orthogonal à M. Alors, d'après IV.2., $MP = -PM$ puis

$$P^{-1}NP = -P^{-1}MP = P^{-1}PM = M.$$

Finalement, si M et N sont deux quaternions purs colinéaires et de même norme, $\exists P\in\mathbb{H}\setminus\{0\}/\ N = P^{-1}MP$.

(b) Soient M et N deux quaternions purs de même norme. D'après IV.2., $M^2 = -\|M\|^2 I_4$ et $N^2 = -\|N\|^2 I_4 = -\|M\|^2 I_4$. Donc,

$$M(MN) - (MN)N = M^2N - MN^2 = -\|M\|^2 N + \|M\|^2 M = \|M\|^2(M-N).$$

Par suite,

$$M(MN - \|M\|^2 I_4) = (MN - \|M\|^2 I_4)N.$$

Soit $P = MN - ||M||^2 I_4$. P est bien un élément de $\mathbb{H}$, car $\mathbb{H}$ est une algèbre et vérifie $MP = PN$. De plus $P \neq 0$. En effet,

$$\begin{aligned}P = 0 &\Rightarrow MN - ||M||^2 I_4 = 0 \Rightarrow MN + M^2 = 0 \text{ (puisque } M \text{ est un quaternion pur)}\\ &\Rightarrow M(M+N) = 0\\ &\Rightarrow M + N = 0 \text{ (puisque } M \neq 0 \text{ et que } \mathbb{H} \text{ est un corps.)}\\ &\Rightarrow M \text{ colinéaire à } N\end{aligned}$$

ce qui n'est pas.

6. (**Remarque.** La question posée sous cette forme est fausse. Par exemple, considérons le cas où M et N ne sont pas colinéaires et posons $P = M + N$. P est un élément non nul de $\mathbb{H}$ car M et N ne sont pas colinéaires. De plus,

$$MP = M^2 + MN = -||M||^2 I_4 + MN = -||N||^2 I_4 + MN = N^2 + MN = (M+N)N = PN.$$

Pour cette matrice P, on a $\alpha = 0$ et $Q = P = M + N$. Mais $M|Q = M|M + M|N = ||M|| \times ||N|| + M|N \neq 0$ puisque (M, N) est libre (cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz).)

• Si $M = N$, on a choisit $P = I$ et donc $Q = 0$. Dans ce cas, Q est orthogonal à M et N.
• Si $M = -N$, on a pris pour P un quaternion pur orthogonal à M (et N). Dans ce cas, $\alpha = 0$ et $Q = P$. Q est encore orthogonal à M et N
• Si (M, N) est libre, on a pris $P = MN - ||M||^2 I_4$ et on veut écrire P sous la forme $\alpha I_4 + Q$ où Q est un quaternion pur. Mais par définition donnée en 1., un quaternion pur est une matrice antisymétrique. Comme αI_4 et $-||M||^2 I_4$ sont symétriques, on en déduit que Q est la partie antisymétrique de MN à savoir

$$Q = \frac{1}{2}(MN -^t (MN)) = \frac{1}{2}(MN - NM).$$

Mais alors

$$-(Q|M)I_4 = \frac{1}{4}(M(MN - NM) + (MN - NM)M) = \frac{1}{4}(M^2N - NM^2) = \frac{-||M||^2}{4}(N - N) = 0.$$

Q est bien orthogonale à M puis à N par symétrie des rôles de M et N.

7. Tout d'abord, si P est un élément non nul de $\mathbb{H}$, l'application $\Phi_P : M \mapsto P^{-1}MP$ est une application de $\mathbb{H}$ dans lui-même, linéaire, bijective de réciproque $M \mapsto PMP^{-1}$, vérifiant de plus $\Phi_P(I)$ et pour $(M, M') \in \mathbb{H}^2$,

$$\Phi_P(M)\Phi_P(M') = P^{-1}MPP^{-1}M'P = P^{-1}MM'P = \Phi_P(MM').$$

Φ_P est donc un automorphisme de l'algèbre $\mathbb{H}$.

Réciproquement, soit Φ un automorphisme de l'algèbre $\mathbb{H}$. Φ est entièrement déterminé par les images de A et B car, pour $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$,

$$\Phi(tI_4 + xA + yB + zAB) = tI_4 + x\Phi(A) + y\Phi(B) + z\Phi(A)\Phi(B).$$

D'après 4., Φ transforme le quaternion pur A en un quaternion pur de même norme. D'après 5., il existe un quaternion non nul P' tel que $\Phi(A) = P'^{-1}AP'$. L'application $\Phi' = (\Phi_{P'})^{-1} \circ \Phi = \Phi_{P'^{-1}} \circ \Phi$ est alors un automorphisme de l'algèbre $\mathbb{H}$ vérifiant de plus $\Phi'(A) = A$. Cherchons alors un quaternion non nul P'' tel que $P''^{-1}AP'' = A$ (c'est à dire commutant avec A) et $\Phi'(B) = P''^{-1}BP''$.
A et B sont des quaternions purs de norme 1 et orthogonaux. $\Phi'(B)$ est d'après 4. un quaternion pur de norme 1, orthogonal à A. Donc, il existe un réel θ tel que $\Phi'(B) = \cos\theta B + \sin\theta C$. La question 6. nous invite à chercher P'' sous la forme $P'' = \alpha I_4 + \beta A$. Une telle matrice commute avec A car est un polynôme en A. La condition $\Phi'(B) = P''^{-1}BP''$ s'écrit

$$B(\alpha I_4 + \beta A) = (\alpha I_4 + \beta A)(\cos\theta B + \sin\theta C),$$

ou encore

$$\alpha B - \beta C = (\alpha\cos\theta - \beta\sin\theta)B + (\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta)C.$$

Puisque (B, C) est une famille libre, on obtient le système :

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha(1-\cos\theta)+\beta\sin\theta=0\\ \alpha\sin\theta+\beta(1+\cos\theta)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2\sin\dfrac{\theta}{2}\left(\alpha\sin\dfrac{\theta}{2}+\beta\cos\dfrac{\theta}{2}\right)=0\\ 2\cos\dfrac{\theta}{2}\left(\alpha\sin\dfrac{\theta}{2}+\beta\cos\dfrac{\theta}{2}\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\alpha\sin\dfrac{\theta}{2}+\beta\cos\dfrac{\theta}{2}=0$$

car $\cos\dfrac{\theta}{2}$ et $\sin\dfrac{\theta}{2}$ ne peuvent être simultanément nul. Mais alors $\alpha=\cos\dfrac{\theta}{2}$, $\beta=-\sin\dfrac{\theta}{2}$ et donc $P''=\cos\dfrac{\theta}{2}I_4-\sin\dfrac{\theta}{2}A$ conviennent.

Pour ce choix de $P''\neq 0$, on a $\Phi'(A)=P''^{-1}AP''$ et $\Phi'(B)=P''^{-1}BP''$. Mais alors Φ' coïncide avec $\Phi_{P''}$ en A et B et donc, d'après une remarque faite plus haut, $\Phi'=\Phi_{P''}$. Ainsi, $\Phi=\Phi_{P'}\circ\Phi_{P''}=\Phi_{P'P''}$. En posant $P=P'P''$, on a trouvé un quaternion pur non nul P tel que pour tout quaternion M, $\Phi(M)=P^{-1}MP$. Nous avons ainsi démontré que

$$\boxed{\text{tout automorphisme de l'algèbre } \mathbb{H} \text{ est un automorphisme intérieur.}}$$

