Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2019

Épreuve à option (A) : Mathématiques

Durée : 4h

L'objet du problème est l'étude de quelques fonctions périodiques, bâties à partir de la distance à une partie de $\mathbb{R}$ et utilisées notamment en théorie du signal et en théorie des probabilités.

- Pour toute partie A de $\mathbb{R}$, on note $-A$ l'ensemble des opposés des éléments de A :

$$-A = \{-a\,;\, a \in A\}\ .$$

- Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
  Pour tout réel strictement positif t, on dit que la fonction f est *t-périodique* si elle vérifie :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x+t) = f(x)\ .$$

On dit que f est périodique s'il existe un réel strictement positif t pour lequel la fonction f est t-périodique. Dans ce cas, on appelle *période* de f la borne inférieure de l'ensemble des réels strictement positifs t pour lesquels la fonction f est t-périodique.

Par exemple, la fonction $x \longmapsto x - \lfloor x \rfloor$ est périodique, de période égale à 1, et toute fonction constante est périodique, de période égale à 0.

Les quatre parties du problème sont largement indépendantes, mais les matrices introduites dans la partie I sont utilisées dans la partie IV.

L'évaluation des copies sera étroitement liée à la rigueur des raisonnements et à une utilisation dûment justifiée du cours. Une présentation soignée sera appréciée, une présentation par trop négligée sanctionnée.

Partie I : une famille de matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

Pour tout $c \in \mathbb{R}$, on note T_c la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par :

$$T_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} .$$

On considère d'autre part la matrice : $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. a) Pour quelles valeurs de c la matrice T_c est-elle diagonalisable ?

   b) Existe-t-il une valeur de c et une matrice inversible P pour lesquelles les deux matrices $P^{-1} T_c P$ et $P^{-1} S P$ sont diagonales ?

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   a) Calculer la matrice $(T_{1/2})^n$.

   b) En déduire, pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, la matrice $S^m (T_{1/2})^n$.

   c) Pour tout $c \in \mathbb{R}$, on note $\mathscr{G}$ le plus petit sous-ensemble de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ stable par le produit matriciel et contenant les matrices S et $T_{1/2}$.

   Justifier que toutes les matrices de $\mathscr{G}$ sont de la forme $2^{-n} \begin{pmatrix} 2^n & h & k \\ 0 & (-1)^m & \ell \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $(h, k, \ell) \in \mathbb{Z}^3$ et $(m, n) \in \mathbb{N}^2$.

   d) Quelles sont les matrices de $\mathscr{G}$ dont les coefficients diagonaux sont égaux à $+1$ ou à -1 ?

Partie II : distances à une partie de $\mathbb{R}$

3. a) Justifier, pour tout réel x et pour toute partie non vide A de $\mathbb{R}$, l'existence de la distance de x à A, c'est-à-dire du nombre réel positif ou nul

$$\mathrm{d}(x, A) = \mathrm{Inf}\{|x - a|\, ;\, a \in A\} .$$

   b) Quels sont les nombres réels x pour lesquels la distance $\mathrm{d}(x, A)$ de x à une partie non vide A de $\mathbb{R}$ est nulle ?

   c) Justifier que, si A est une partie fermée de $\mathbb{R}$, alors il existe pour tout réel x un élément a_x de A tel que :

$$|x - a_x| = \mathrm{d}(x, A) .$$

4. Pour toute partie non vide A de $\mathbb{R}$, on note d_A la fonction $x \longmapsto \mathrm{d}(x, A)$, définie sur $\mathbb{R}$.

   a) Dessiner le graphe de la fonction d_A lorsque $A = \{-1, 0, +1\}$.

   b) Démontrer que si $A = -A$, alors la fonction d_A est paire et que la réciproque est vraie lorsque A est fermée.

   c) Démontrer que, si l'ensemble A est minoré ou majoré, alors la fonction d_A n'est pas bornée.

   d) Donner un exemple d'ensemble A qui n'est ni minoré ni majoré, pour lequel la fonction d_A n'est pas bornée.

5. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

   a) Démontrer que, pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\mathrm{d}_A(y) \leq \mathrm{d}_A(x) + |y - x| + \varepsilon \, .$$

   b) En déduire que la fonction d_A est continue sur $\mathbb{R}$.

   c) Justifier que, si la fonction d_A est dérivable et nulle en un point x_0, alors sa dérivée en ce point est nécessairement nulle.

6. On considère dans cette question une suite strictement décroissante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, convergente et de limite nulle, et on note :

$$A = \mathbb{R}_-^* \cup \{u_n \, ; \, n \in \mathbb{N}^*\} \, .$$

   a) Justifier que 0 appartient à la frontière de A et que la fonction d_A s'annule en 0.

   b) On considère ici le cas où $u_n = \dfrac{1}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   Calculer $\mathrm{d}_A\big(\frac{1}{2}\,(u_n + u_{n+1})\big)$ et en déduire que la fonction d_A n'est pas dérivable à droite au point 0 .

   c) On considère maintenant le cas où $u_n = \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   Démontrer que la fonction d_A est dérivable au point 0 et indiquer les autres points où elle est dérivable .

Partie III : signaux triangulaires

7. Dans cette question, on suppose que A est un sous-groupe du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$.

   a) Donner la fonction d_A lorsque $A = \{0\}$ et lorsque A est dense dans $\mathbb{R}$.

   b) Démontrer que, dans tous les autres cas, il existe un réel strictement positif α tel que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{d}_A(x) = \alpha\, \mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(\frac{x}{\alpha}) \, .$$

On note désormais σ la fonction $\mathrm{d}_{\mathbb{Z}}$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \sigma(x) = \mathrm{Min}\{|x - n| \, ; \, n \in \mathbb{Z}\} \tag{1}$$

8. a) Justifier l'expression de $\mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(x)$ donnée par (1).

   b) Vérifier que la fonction σ est paire, périodique et de période égale à 1.

   c) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-1/2}^{+1/2} \sigma(t)\,\mathrm{d}t$.

   d) Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\int_{-1/2}^{+1/2} \sigma(t)\cos(2\pi n t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} -\dfrac{1}{n^2\pi^2} & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

Pour tout $r \in]0,1[$, on note P_r l'application $t \longmapsto \dfrac{1-r^2}{1-2\,r\cos(2\pi t)+r^2}$.

9. a) Vérifier que, pour tout $r \in [0,1[$, la fonction P_r est définie, périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

   b) Soit $\varepsilon \in]0,1/2[$. Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{+1/2} P_r(t)\,\mathrm{d}t$ tend vers 0 quand r tend vers 1 par valeurs inférieures.

10. Soit $t \in \mathbb{R}$.

    a) Démontrer que le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \big(\cos(2\pi n t)\big)x^n$ est égal à 1.

    b) Établir, pour tout $r \in [0,1[$, l'égalité

$$P_r(t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \big(\cos(2\pi n t)\big)r^n \,.$$

11. Soit $x \in \mathbb{R}$.

    Pour tout $r \in [0,1]$, on pose : $\quad \sigma_r(x) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{2}{\pi^2}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos\big((2k+1)\,2\pi\,x\big)}{(2k+1)^2}\, r^{2k+1}$.

    a) En utilisant les formules démontrées en 8c et 8d, démontrer que :

$$\forall\, r \in [0,1[, \quad \sigma_r(x) = \int_{-1/2}^{+1/2} \sigma(t)\Big(1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(2\pi n x)\cos(2\pi n t)r^n\Big)\,\mathrm{d}t \,.$$

    b) En déduire, pour tout $r \in [0,1[$, les égalités :

$$\sigma_r(x) = \frac{1}{2}\Big(\int_{-1/2}^{+1/2} \sigma(t)P_r(x+t)\,\mathrm{d}t + \int_{-1/2}^{+1/2} \sigma(t)P_r(x-t)\,\mathrm{d}t\Big) = \int_{-1/2}^{+1/2} \sigma(x+t)P_r(t)\,\mathrm{d}t \,.$$

12. Déduire de ce qui précède que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sigma(x) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos\big((2n+1)\,2\pi\,x\big)}{(2n+1)^2} \,.$$

Partie IV : une famille de fonctions 1-périodiques

Pour tout réel $c \in]0,1[$, on note τ_c l'application

$$\tau_c : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} c^n \sigma(2^n x) \tag{2}$$

où σ est la fonction définie par (1) dans la partie III.

13. Soit $c \in]0,1[$.

    a) Justifier que la fonction τ_c est définie, continue et 1-périodique sur $\mathbb{R}$.

    b) Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad \tau_c(x) = \sigma(x) + c\,\tau_c(2x)$.

    c) Démontrer que τ_c est l'unique fonction τ définie et bornée sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tau(x) = \sigma(x) + c\,\tau(2x) \tag{3}$$

14. Dans cette question, on suppose que c est égal à $1/4$.

    a) Démontrer que, pour tout $x \in [0,1/2]$, on a : $\quad \tau_c(x) = 2x(1-x)$.

    b) Donner une représentation graphique de la fonction τ_c.

On note désormais β la fonction $\tau_{1/2}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \beta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \sigma(2^n x) \tag{4}$$

15. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
    On note f_1, f_2, f_3 les restrictions à $[0,1]$ des trois fonctions $x \longmapsto 1$, $x \longmapsto x$, $x \longmapsto \beta(x)$, respectivement, et F le sous-espace vectoriel de E engendré par ces trois fonctions.
    On note Φ et Ψ les deux applications définies sur E par :

$$\forall f \in E, \quad \forall x \in [0,1], \quad \begin{cases} \Phi(f)(x) = f(x/2) \\ \Psi(f)(x) = f(1-x) \end{cases} .$$

    a) Vérifier que le sous-espace vectoriel F est stable par les endomorphismes Φ et Ψ.

    b) Vérifier que (f_1, f_2, f_3) est une base de F et reconnaître les matrices dans cette base des endomorphismes de F induits par Φ et Ψ.

    c) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 2^n]$.
    En utilisant le résultat de la question 2b de la partie I, exprimer $\beta\big((1-x)\,2^{-n}\big)$ à l'aide de x, n et $\beta(x)$.

16. a) En exploitant le résultat trouvé en 15 c, justifier que la fonction β n'est pas dérivable en 0.

    b) Démontrer qu'il n'existe aucun intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ sur lequel la fonction β est dérivable.