Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2019

Épreuve de mathématiques

Durée : 4h

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont discrètes et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$.

On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel x. On rappelle que l'indicatrice $\mathbf{1}_A$ d'un événement A est la variable aléatoire qui, à chaque $\omega \in \Omega$, associe $\mathbf{1}_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$ et $\mathbf{1}_A(\omega) = 0$ sinon.

On rappelle qu'une fonction réelle h, définie sur $\mathbb{R}$, est dite convexe si, pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et tout réel $\lambda \in [0,1]$, on a : $h\big(\lambda x + (1-\lambda) y\big) \leqslant \lambda h(x) + (1-\lambda) h(y)$. Le candidat se rappellera, ou admettra, que si une fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ et convexe alors, pour tout réel a, la fonction $p_a : x \mapsto \dfrac{h(x) - h(a)}{x - a}$ est croissante sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$.

Partie I - Préliminaires

On établit ici des résultats qui seront utilisées dans la suite du problème. Les questions sont indépendantes.

1. Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, indépendantes et suivant toutes la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose, pour tout entier naturel , non nul $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

   (a) Quelle est, pour tout entier naturel n non nul, la loi de S_n ?

   (b) Prouver, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité :
   $$\mathbf{P}\Big(\frac{S_n}{n} \geqslant \lambda + \varepsilon\Big) \leqslant \frac{\lambda}{n\varepsilon^2}.$$

2. Soit $(x,\mu) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < \mu < x$.

   On considère l'application Ψ qui, à chaque réel $\theta \geqslant 0$, associe
   $$\Psi(\theta) = \exp\Big(\mu(\mathrm{e}^{\theta} - 1) - \theta x\Big).$$

   (a) Montrer que la fonction Ψ a un minimum sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer sa valeur.

   (b) Soit $\lambda > 0$, $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $x = n(\lambda + \varepsilon)$ et $\mu = n\lambda$.
   Justifier, dans ces conditions, l'existence d'un réel $a > 0$ (fonction de λ et ε mais pas de n) pour lequel $\min\limits_{\theta\geqslant 0} \Psi(\theta) = \mathrm{e}^{-an}$.

3. Soit g une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $g\big(\frac{x+y}{2}\big) \leqslant \frac{g(x)+g(y)}{2}$.

   (a) Prouver, pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, pour tout entier naturel n et pour tout entier $k \in [\![0, 2^n]\!]$, l'inégalité :
   $$g\Big(\frac{k}{2^n}x + (1 - \frac{k}{2^n})y\Big) \leqslant \frac{k}{2^n}\, g(x) + \big(1 - \frac{k}{2^n}\big)\, g(y).$$
   On pourra raisonner par récurrence sur l'entier n, et observer que, si p est un entier, on a l'égalité : $\frac{2p + (2p+2)}{2} = 2p + 1$.

   (b) On pose $D = \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} \Big\{\frac{k}{2^n}\,;\, k \in [\![0, 2^n]\!]\Big\}$ et on considère un réel λ de $[0,1]$.
   On note, pour tout entier naturel n, $d_n = \frac{\lfloor \lambda 2^n \rfloor}{2^n}$.
   Vérifier que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de D, **croissante** et convergente vers λ.

   (c) On suppose, de plus, que la fonction g est croissante. Montrer qu'elle est convexe.

4. Soit X une variable aléatoire discrète possédant une espérance.

   (a) Rappeler l'inégalité de Markov.

(b) On suppose, de plus, la variable X à valeurs positives ou nulles. Établir, pour tout réel $x > 0$, l'inégalité
$$\mathbf{P}(X \geqslant x) \leqslant \inf_{\theta>0} \frac{\mathbf{E}(e^{\theta X})}{e^{\theta x}}.$$

5. Soit X une variable aléatoire, **possédant une espérance** et telle que $X(\Omega) = \{x_k\,;\, k \in \mathbb{N}^*\}$ où la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, strictement croissante et de limite $+\infty$. On pose $x_0 = 0$. On note, pour tout entier naturel n, $\alpha_n = \mathbf{E}(X\,\mathbf{1}_{[X\leqslant x_n]})$.

(a) Prouver la convergence de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Soit $\varepsilon > 0$.
Justifier l'existence d'un entier naturel N tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, on a :
$$\mathbf{E}(X) - \varepsilon \leqslant \alpha_n.$$
En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathbf{E}(X)$.

(c) Soit β la fonction qui, à chaque réel $K \geqslant 0$ associe, $\beta(K) = \mathbf{E}(X\,\mathbf{1}_{[X\leqslant K]})$.
Prouver l'égalité $\lim_{K\to+\infty} \beta(K) = \mathbf{E}(X)$.
On admet que ce résultat est valable pour toute variable aléatoire discrète à valeurs positives ou nulles.

6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ concave et décroissante. Soit $x \in \mathbb{R}$.

(a) Justifier l'existence d'une limite finie, négative ou nulle, à droite en x, pour la fonction $u \mapsto \dfrac{f(u) - f(x)}{u - x}$. On note θ_0 cette limite.

(b) Prouver, pour tout réel u, l'inégalité : $f(u) \leqslant f(x) + \theta_0(u - x)$.

(c) En déduire l'égalité
$$\inf_{\theta\geqslant 0} \sup_{u\in\mathbb{R}} \Big(f(u) + \theta(u - x)\Big) = f(x),$$
en ayant, pour tout réel θ, posé $\sup_{u\in\mathbb{R}} \Big(f(u) + \theta(u - x)\Big) = +\infty$ quand la fonction $u \mapsto f(u) + \theta(u - x)$ n'est pas majorée.

7. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{x_k\,;\, k \in \mathbb{N}^*\}$ où la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, strictement croissante et de limite $+\infty$. On pose $x_0 = 0$.

(a) Vérifier que la fonction qui à chaque réel t associe $\mathbf{P}(X > t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

(b) Soit r un entier naturel.
Prouver l'égalité $\displaystyle\int_0^{x_{r+1}} \mathbf{P}(X > t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{r} (x_{k+1} - x_k)\mathbf{P}(X > x_k)$, puis l'égalité
$$\int_0^{x_{r+1}} \mathbf{P}(X > t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{r} x_k\,\mathbf{P}(X = x_k) + x_{r+1}\,\mathbf{P}(X > x_r).$$

(c) Prouver que la variable aléatoire X a une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbf{P}(X > t)\,\mathrm{d}t$ converge et que, dans ce cas, on a l'égalité :
$$\mathbf{E}(X) = \int_0^{+\infty} \mathbf{P}(X > t)\,\mathrm{d}t.$$

On admet que ce résultat s'étend à toute variable aléatoire discrète à valeurs positives ou nulles.

8. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+$ vérifiant, pour tout $(m,n)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^2$, l'inégalité :

$$v_{m+n} \leqslant v_m + v_n.$$

   (a) Justifier l'existence du nombre $\rho = \inf\left\{\frac{v_n}{n}\,;\, n\in\mathbb{N}^*\right\}$.

   (b) Soit $\varepsilon > 0$ et $N\in\mathbb{N}^*$ tel que $\rho \leqslant \frac{v_N}{N} < \rho+\varepsilon$.
   Soit $(k,r)\in\mathbb{N}\times[\![0,N-1]\!]$ et $n = kN+r$. Prouver l'inégalité $\frac{v_n}{n}\leqslant\frac{v_N}{N}+\frac{v_r}{n}$ et en déduire, pour tout entier n assez grand, l'encadrement $\rho\leqslant\frac{v_n}{n}\leqslant\rho+2\varepsilon$.
   On en déduit ainsi que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{v_n}{n}=\rho$.

Dans toute la suite du problème, on considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires discrètes, à valeurs **positives ou nulles**, indépendantes et suivant toutes la loi de X_1. On pose, pour tout entier naturel n non nul, $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$.

On suppose, de plus, que, pour tout réel t, $\mathbf{P}(X_1>t)>0$.

9. (a) Soit $(m,n)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^2$ et $(u,v)\in\mathbb{R}^2$. Établir l'inégalité :

$$\mathbf{P}(S_{m+n}\geqslant mu+nv)\geqslant\mathbf{P}(S_m\geqslant mu)\,\mathbf{P}(S_n\geqslant nv).$$

   (b) Prouver, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel u, l'inégalité :

$$\mathbf{P}(S_n\geqslant nu)>0.$$

   (c) En déduire que, pour tout réel u, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln\mathbf{P}(S_n\geqslant nu)}{n}=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\ln\mathbf{P}(S_n\geqslant nu)}{n}\cdot$

Partie II - Le théorème de Cramer

1. `Une inégalité`

   (a) Soit J une partie de $\mathbb{R}$ telle que, pour tout élément x de J, l'intervalle $]-\infty,x]$ est inclus dans J. Prouver que la partie J est un intervalle de $\mathbb{R}$.

   (b) Vérifier que la fonction $\varphi:\theta\mapsto\ln\mathbf{E}(\mathrm{e}^{\theta X_1})$ est définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{R}_-$.

   (c) Déterminer l'intervalle I et la valeur de $\varphi(\theta)$ pour tout $\theta\in I$, dans les cas où X_1 suit la loi géométrique de paramètre $p\in]0,1[$ ou la loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$.

2. (a) Vérifier que la fonction $H:u\mapsto\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}\ln\big(\mathbf{P}(S_n\geqslant nu)\big)$ est définie sur $\mathbb{R}$, et qu'elle est décroissante.

   (b) Prouver, pour tout couple $(u,v)\in\mathbb{R}^2$, l'inégalité : $H\big(\frac{u+v}{2}\big)\geqslant\frac{1}{2}\big(H(u)+H(v)\big)$.
   On utilisera **I** - 9.

(c) Qu'en déduit-on pour la fonction H?

3. Soit $\theta \in I \cap \mathbb{R}_+$.

(a) Justifier, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $\mathbf{E}(e^{\theta S_n}) = \Big(\mathbf{E}(e^{\theta X_1})\Big)^n$.

(b) En déduire, pour tout réel u et pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité :

$$\varphi(\theta) \geqslant \frac{1}{n} \ln\Big(e^{n\theta u}\,\mathbf{P}(S_n \geqslant nu)\Big).$$

(c) Conclure à l'inégalité :

$$\varphi(\theta) \geqslant \sup_{u\in\mathbb{R}} \big(\theta u + H(u)\big).$$

4. `Le cas d'égalité si` $\theta = 0$

Établir l'égalité : $\varphi(0) = \sup\limits_{u\in\mathbb{R}} H(u)$.

5. `L'autre inégalité si` $\theta > 0$

On rappelle que les variables X_k sont discrètes, à valeurs positives ou nulles, indépendantes et suivent toutes la loi de X_1, et que, pour tout réel t, $\mathbf{P}(X_1 > t) > 0$.

Soit $K > 0$, $\theta > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) i. Prouver l'inégalité :

$$\ln\Big(\mathbf{E}(e^{\theta X_1}\,\mathbf{1}_{[X_1\leqslant K]})\Big) = \frac{1}{n} \ln\Big(\mathbf{E}(e^{\theta S_n} \prod_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{[X_i\leqslant K]})\Big).$$

ii. En déduire l'inégalité :

$$\ln\Big(\mathbf{E}(e^{\theta X_1}\,\mathbf{1}_{[X_1\leqslant K]})\Big) \leqslant \frac{1}{n} \ln\Big(\mathbf{E}(e^{\theta S_n}\,\mathbf{1}_{[S_n\leqslant nK]})\Big).$$

(b) Justifier l'existence d'une espérance pour la variable $e^{\theta S_n}\,\mathbf{1}_{[S_n\leqslant nK]}$ et établir l'inégalité :

$$\mathbf{E}(e^{\theta S_n}\,\mathbf{1}_{[S_n\leqslant nK]}) \leqslant \int_0^{\exp(n\theta K)} \mathbf{P}(e^{\theta S_n} > t)\,\mathrm{d}t.$$

(c) En déduire l'inégalité $\mathbf{E}(e^{\theta S_n}\,\mathbf{1}_{[S_n\leqslant nK]}) \leqslant 1 + n\theta \displaystyle\int_0^K \mathbf{P}(S_n > nu)\,e^{n\theta u}\,\mathrm{d}u$, puis l'inégalité :

$$\ln\Big(\mathbf{E}(e^{\theta X_1}\,\mathbf{1}_{[X_1\leqslant K]})\Big) \leqslant \frac{1}{n} \ln\Big(1 + n\theta K \exp(n M(\theta))\Big),$$

où l'on a posé $M(\theta) = \sup\limits_{u\in\mathbb{R}} \big(\theta u + H(u)\big)$.

6. Prouver, pour tout réel K assez grand et pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité :

$$\ln\Big(\mathbf{E}(e^{\theta X_1}\,\mathbf{1}_{[X_1\leqslant K]})\Big) \leqslant \frac{\ln(2n\theta K)}{n} + M(\theta).$$

7. En déduire l'inégalité : $\varphi(\theta) \leqslant M(\theta)$.

Il y a donc égalité via 3 - (c).

8. Conclure, pour tout réel x, à l'égalité :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(S_n \geqslant nx) = \inf_{\theta\geqslant 0}\Big(\ln \mathbf{E}(\mathrm{e}^{\theta X_1}) - \theta x\Big).$$

9. Soit $\lambda > 0$ et $\varepsilon > 0$.

   (a) Justifier l'existence d'un réel $a > 0$ pour lequel, pour tout entier naturel n assez grand, on a :
   $$\mathbf{P}\Big(\frac{S_n}{n} \geqslant \lambda + \varepsilon\Big) \leqslant \mathrm{e}^{-an}.$$

   (b) Retrouver ce résultat, en utilisant les résultats des questions **I** - 2 et **I** - 4, dans le cas particulier où X_1 suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.