# Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2017

# Épreuve à option (A) : Mathématiques

Durée : 4h

Dans tout le problème, $n$ désigne un nombre entier supérieur ou égal à deux.

Selon une formule classique, que l'on pourra admettre dans toute la suite, toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \dots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & & {x_n}^{n-1} \end{pmatrix}$$

admet pour déterminant le nombre réel $\prod_{1\leq i<j\leq n} (x_j - x_i)$ , appelé *déterminant de Vandermonde*, que l'on notera dans la suite $v_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

L'objet du problème est l'étude de déterminants de matrices d'une forme plus générale, appelés *déterminants vandermondiens*, définis comme suit.

Pour toute famille $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ de fonctions définies sur un ensemble $\mathscr{S}$, à valeurs réelles, et tout élément $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $\mathscr{S}^n$, on note

$$V_{f_1,\dots,f_n}(x_1,\dots,x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \dots & f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \dots & f_2(x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(x_1) & f_n(x_2) & \dots & f_n(x_n) \end{pmatrix}$$

et $v_{f_1,\dots,f_n}(x_1,\dots,x_n)$ le déterminant de cette matrice.

Bien que les déterminants vandermondiens interviennent dans les trois parties du sujet, celles-ci sont largement indépendantes.

L'évaluation des copies sera étroitement liée à la rigueur des raisonnements et à une utilisation dûment justifiée du cours. Une présentation soignée sera appréciée, une présentation par trop négligée sanctionnée.

**Partie 1 : polynômes de Tchebycheff de seconde espèce**

Dans cette partie, $x_1, x_2, \dots, x_n$ désignent $n$ nombres réels vérifiant les inégalités strictes

$$0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \pi$$

et on note $s_1, s_2, \dots, s_n$ les $n$ fonctions définies par :

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!],\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad s_i(x) = \sin(i\,x)\ .$$

On considère la suite $\big(U_p(X)\big)_{p\in\mathbb{N}}$ des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définis par :

$$\begin{cases} U_0(X) = 1 \\ U_1(X) = 2X \\ \forall\, p \in \mathbb{N}, \quad U_{p+2}(X) = 2XU_{p+1}(X) - U_p(X) \end{cases}.$$

1. a) Calculer $U_2(X)$ et $U_3(X)$, puis indiquer la parité de la fonction $x \longmapsto U_p(x)$, selon les valeurs de $p$.

   b) Pour tout entier naturel $p$, déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme $U_p(X)$.

   c) Justifier que $\big(U_0(X), U_1(X), \dots, U_n(X)\big)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Soit $t \in \mathbb{R}$.

   a) Pour $p \in \mathbb{N}$, exprimer $\sin\big((p+2)\,t\big) + \sin(p\,t)$ en fonction de $\sin\big((p+1)\,t\big)$ et $\cos(t)$.

   b) En déduire que pour tout entier naturel $p$, on a :

$$\sin\big((p+1)\,t\big) = \sin(t)\,U_p\big(\cos(t)\big)\ .$$

   c) Justifier que le polynôme $U_n(X)$ possède $n$ racines distinctes, qui appartiennent toutes à l'intervalle ouvert $]-1, +1[$ .

3. Pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on pose : $\quad c_{i,j} = 2^{1-i}\,U_{i-1}\big(\cos(x_j)\big)$ .
   On note $C$ la matrice $\big(c_{i,j}\big)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et $L_1, L_2, \dots, L_n$ les lignes de cette matrice.

   a) Justifier l'existence de nombres réels $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ tels que :

$$L_n - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_j\, L_j = \begin{pmatrix} \cos^{n-1}(x_1) & \cos^{n-1}(x_2) & \dots & \cos^{n-1}(x_n) \end{pmatrix} \quad .$$

   b) Démontrer que le déterminant de $C$ est égal à $v_n\big(\cos(x_1), \cos(x_2), \dots, \cos(x_n)\big)$ .

   c) Établir la formule :

$$v_{s_1,\dots,s_n}(x_1, \dots, x_n) = 2^{n(n-1)/2} \left( \prod_{k=1}^{n} \sin(x_k) \right) \left( \prod_{1\le i<j\le n} \big(\cos(x_j) - \cos(x_i)\big) \right).$$

   d) En déduire l'indépendance linéaire des fonctions $s_1, s_2, \dots, s_n$.

4. a) Calculer, pour tout couple $(p,q)$ de nombres entiers naturels, l'intégrale
$$\int_0^{\pi} \sin(pt)\sin(qt)\,\mathrm{d}t.$$

b) En déduire que :
$$\forall\,(p,q)\in\mathbb{N}^2,\quad \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1} U_p(t)\,U_q(t)\,\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t=\begin{cases}1 & \text{si } p=q\\ 0 & \text{si } p\neq q\end{cases}.$$

5. On note $V^*$ la comatrice de la matrice $V_{U_0,U_1,\dots,U_{n-1}}\big(\cos(x_1),\cos(x_2),\dots,\cos(x_n)\big)$ et $v^*(i,j)$ ses coefficients (pour tout couple $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $v^*(i,j)$ est le coefficient situé dans la $i$-ème ligne et la $j$-ème colonne de $V^*$).

a) Justifier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction
$$\varphi : t \longmapsto v_{U_0,U_1,\dots,U_{n-1}}\big(\cos(x_1),\dots,\cos(x_{n-1}),t\big).$$

b) Démontrer l'égalité
$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1}\big(\varphi(t)\big)^2\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{n}\big(v^*(i,n)\big)^2.$$

## Partie 2 : factorisations de déterminants vandermondiens

1. a) Justifier que la fonction $x\longmapsto \dfrac{\sin x}{x}$ admet un unique prolongement continu à $\mathbb{R}$ et démontrer, en utilisant une série entière, que ce prolongement est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction ainsi prolongée sera notée sinc (pour *sinus cardinal*).

b) Pour tout couple $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on note : $c(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\cos(x)-\cos(y)}{x-y} & \text{si } x\neq y\\ -\sin(x) & \text{si } x=y\end{cases}$.

Exprimer $c(x,y)$ à l'aide des fonctions sin et sinc, et en déduire que la fonction $c$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

c) En déduire, à l'aide de la formule démontrée dans la question 3.c de la première partie, que la fonction $b:(x_1,x_2,\dots,x_n)\longmapsto \dfrac{v_{s_1,\dots,s_n}(x_1,\dots,x_n)}{v_n(x_1,\dots,x_n)}$ admet un prolongement de classe $C^\infty$ à $\mathbb{R}^n$.

2. Dans cette question, $f$ et $g$ désignent des fonctions à valeurs réelles, continues sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ (avec $a<b$), dérivables sur l'intervalle ouvert $]a,b[$.

a) En appliquant le théorème de Rolle à une fonction de la forme $x\longmapsto v_{f_1,f_2,f_3}(a,b,x)$, justifier l'existence d'un élément $c$ de $]a,b[$ vérifiant :
$$\frac{g(b)f(a)-g(a)f(b)}{b-a}=g'(c)\,\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}-f'(c)\,\frac{bg(a)-ag(b)}{b-a}.$$

b) En quoi le résultat précédent est-il une généralisation du théorème des accroissements finis ?

3. Dans cette question $f$ et $g$ désignent des fonctions polynomiales à coefficients réels.

   • La première est de degré $n$ : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i$, avec $a_n \neq 0$.

   • La seconde est de degré inférieur ou égal à $n$ : $\forall x \in \mathbb{R},\ b(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i\, x^i$.

   a) Soit $k$ et $\ell$ deux éléments distincts de $[\![1, n]\!]$.

   Justifier que, pour $x \neq y$, le quotient $\dfrac{x^k y^\ell - x^\ell y^k}{x-y}$ est une combinaison linéaire de monômes de la forme $x^i y^j$, avec $(i, j) \in [\![0, n-1]\!]^2$.

   b) Pour tout réel $x$, on note $C(x)$ la matrice-colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^{n-1} \end{pmatrix}$ et $L(x)$ sa transposée.

   Justifier l'existence d'une unique matrice carrée $B(f, g) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant, pour tout couple $(x, y)$ de réels distincts, l'égalité :

$$\frac{f(x)g(y) - g(x)f(y)}{x-y} = L(x)\, B(f, g)\, C(y)\cdot$$

   c) Démontrer que si une matrice-colonne $M$ vérifie $L(x)\, M = 0$ pour tout réel $x$, alors $M$ est nulle.

   d) En déduire que si les deux polynômes $\sum_{i=0}^{n} a_i\, X^i$ et $\sum_{i=0}^{n} b_i\, X^i$ ont une racine réelle commune, alors la matrice $B(f, g)$ n'est pas inversible.

## Partie 3 : unisolvance et interpolation

Soit $\mathscr{S}$ un ensemble non vide et $F$ un sous-espace vectoriel de dimension $n$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathscr{S}$ dans $\mathbb{R}$.

On dit qu'un $n$-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'éléments de $\mathscr{S}$ est *unisolvant* pour $F$ si le seul élément de $F$ qui s'annule en chacun des $x_j$ est la fonction nulle :

$$\forall f \in F,\ \Big[\big(\forall j \in [\![1, n]\!],\ f(x_j) = 0\big) \Longrightarrow \big(\forall x \in \mathscr{S},\ f(x) = 0\big)\Big]\,.$$

1. a) Justifier que $\mathscr{S}$ possède au moins $n$ éléments.

   b) Démontrer que, si un $n$-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'éléments de $\mathscr{S}$ est unisolvant pour $F$, alors $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont nécessairement deux à deux distincts.

2. Soit $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ une base de $F$ et $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathscr{S}^n$ .

   a) Démontrer que $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est unisolvant pour $F$ si, et seulement si, le déterminant vandermondien $v_{f_1,\dots,f_n}(x_1, \dots, x_n)$ est différent de 0.

   b) Soit $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Justifier que si $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est unisolvant pour $F$, alors il existe un unique élément $f$ de $F$ vérifiant :

$$\forall\, j \in [\![1, n]\!],\ f(x_j) = y_j\ .$$

   c) En utilisant la formule démontrée dans la question 3.c de la première partie, justifier que pour tout $n$-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ d'éléments deux à deux distincts de $]0, \pi[$ et toute fonction réelle $g$ définie sur cet intervalle, il existe un unique vecteur $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ vérifiant :

$$\forall\, j \in [\![1, n]\!],\ \sum_{i=1}^{n} a_i\, s_i(x_j) = g(x_j)\ .$$

3. On dit que $F$ est *unisolvant* si tout $n$-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ d'éléments deux à deux distincts de $\mathscr{S}$ est unisolvant pour $F$.

   a) Dans le cas où $\mathscr{S} = \mathbb{R}$, justifier que l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à $n-1$ est unisolvant.

   b) Dans le cas où $\mathscr{S} = \mathbb{R}$, montrer que l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à $n$ qui s'annulent en 0 n'est pas unisolvant et déterminer les $n$-uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ qui sont unisolvants pour cet espace vectoriel.

4. Dans cette question, on étudie le cas où $\mathscr{S} = \mathbb{R}^2$ et on suppose que tous les éléments de l'espace vectoriel $F$ sont des applications <u>continues</u> (de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$).
   On cherche à montrer que $F$ ne peut pas être unisolvant.

   Soit $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ une base de $F$ et $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ un $n$-uplet de vecteurs deux à deux distincts de $\mathbb{R}^2$ tel que le déterminant vandermondien $v_{f_1,\dots,f_n}(x_1, \dots, x_n)$ n'est pas nul.

   On considère un vecteur $y$ de $\mathbb{R}^2$ non colinéaire au vecteur $x_1 - x_2$ et pour tout réel $r > 0$, on définit l'application $\gamma_r$ de $[0, 1]$ dans $(\mathbb{R}^2)^n$ par :

$$\forall\, t \in [0,1],\ \gamma_r(t) = \big((1-t)x_1 + t\,x_2 + r\,\sin(\pi\,t)\,y,\ (1-t)x_2 + t\,x_1 - r\,\sin(\pi\,t)\,y,\ x_3, \dots, x_n\big)\ .$$

   a) Soit $r > 0$.
   Calculer $\gamma_r(0)$ et $\gamma_r(1)$, puis en déduire qu'il existe un réel $t$ compris entre 0 et 1 pour lequel le déterminant vandermondien $v_{f_1,\dots,f_n}(\gamma_r(t))$ est nul.

   b) Justifier que, pour tout $r > 0$ et tout $t \in [0, 1]$, on a :

$$(1-t)x_1 + t\,x_2 + r\,\sin(\pi\,t)\,y \neq (1-t)x_2 + t\,x_1 - r\,\sin(\pi\,t)\,y\ .$$

   c) Prouver qu'il existe au plus un élément $(t, r)$ de $]0, 1[\times]0, +\infty[$ pour lequel

$$(1-t)x_1 + t\,x_2 + r\,\sin(\pi\,t)\,y = x_3\ .$$

   d) En généralisant le résultat précédent, justifier qu'il existe un réel $r > 0$ tel que, pour tout $t \in [0, 1]$, les $n$ vecteurs

$$(1-t)x_1 + t\,x_2 + r\,\sin(\pi\,t)\,y,\ (1-t)x_2 + t\,x_1 - r\,\sin(\pi\,t)\,y,\ x_3, \dots, x_n$$

   de $\mathbb{R}^2$ sont distincts deux à deux.

   e) Conclure.