Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2017

Épreuve de mathématiques

Durée : 4h

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont définies sur le même espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$. On note $\mathbf{P}$ une probabilité sur cet espace. On note $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{Var}(X)$ les espérance et variance (pour la probabilité $\mathbf{P}$) d'une variable X. Si $A \in \mathscr{A}$, on note $\mathbf{1}_A$ son indicatrice, c'est-à-dire l'application qui à chaque $\omega \in \Omega$ associe 1 si $\omega \in A$ et 0 sinon. Si $A \in \mathscr{A}$ est de probabilité non nulle, on note $\mathbf{P}_A$ la probabilité conditionnelle sachant A et, s'il y a lieu, $\mathbf{E}_A(X)$ l'espérance, pour $\mathbf{P}_A$, d'une variable aléatoire X.

On pose, pour tout entier naturel n non nul, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

L'objet du problème est, principalement, l'étude de la variable aléatoire égale au maximum de n variables indépendantes toutes de même loi géométrique.

La partie **I** regroupe des questions indépendantes dont les résultats seront utilisés par la suite.

Partie I. Préliminaires

1. `Un résultat bien connu`

a) Montrer que la suite de terme général $u_n = H_n - \ln n$ est monotone.

b) En déduire l'existence d'un réel noté γ pour lequel on a, quand l'entier n tend vers $+\infty$,

$$H_n = \ln n + \gamma + o(1).$$

2. `Un résultat de bornitude...`

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que la fonction f a une limite nulle en $+\infty$. Montrer que la fonction f est bornée.

3. `Une formulation intégrale des moments d'une variable positive`

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

a) Établir, pour tout entier naturel N, l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{N} \mathbf{P}([X > k]) = \sum_{k=1}^{N} k\mathbf{P}([X = k]) + (N+1)\mathbf{P}([X > N]).$$

b) On suppose que la variable X possède une espérance.

(i) Établir l'égalité : $\lim\limits_{N\to+\infty} (N+1)\mathbf{P}([X > N]) = 0.$

(ii) En déduire que la série $\sum \mathbf{P}([X > n])$ converge et qu'on a l'égalité :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}([X > n]).$$

c) On suppose, réciproquement, que la série $\sum \mathbf{P}([X > n])$ converge. Montrer que la variable X possède une espérance qu'on a l'égalité : $\mathbf{E}(X) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}([X > n])$.

d) **(i)** Vérifier que la fonction qui à chaque réel t associe $\mathbf{P}([X > t])$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

(ii) Montrer que X a une espérance si, et seulement si, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \mathbf{P}([X > t])\mathrm{d}t$$

converge et que, dans ce cas, on a l'égalité : $\mathbf{E}(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbf{P}([X > t])\mathrm{d}t$.

e) Montrer que X a un moment d'ordre 2 si, et seulement si, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} t\mathbf{P}([X > t])\mathrm{d}t$$

converge et que, dans ce cas, on a l'égalité : $\mathbf{E}(X^2) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathbf{P}([X > t])\mathrm{d}t$.

4. `Autour du produit de convolution`

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On pose, pour tout entier naturel n,

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\,.$$

On suppose que, pour tout réel x, les séries $\sum u_n x^n$ et $\sum v_n x^n$ convergent absolument. On rappelle, ou on admet, qu'alors, pour tout réel x, la série $\sum w_n x^n$ converge absolument et qu'on a l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n\Big).$$

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On pose, pour tout entier naturel n,

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}\,.$$

On suppose que, pour tout réel x, les séries $\sum \dfrac{a_n}{n!}\,x^n$ et $\sum \dfrac{b_n}{n!}\,x^n$ convergent absolument. Montrer que, pour tout réel x, la série $\sum \dfrac{c_n}{n!} x^n$ converge absolument et qu'on a l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n!}\,x^n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}\,x^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!}\,x^n\Big).$$

5. `Loi conditionnelle d'un vecteur aléatoire`

a) Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in \,]0,1[$. Quelle est la loi de $X-1$ pour la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_{[X>1]}$?

b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, … , X_r des variables aléatoires **indépendantes** toutes de même loi, chacune suivant la loi géométrique (sur $\mathbb{N}^*$) de paramètre $p \in \,]0,1[$. On note

$$A = \bigcap_{i=1}^{r} [X_i > 1]\,.$$

Montrer que le vecteur aléatoire $(X_1 - 1, X_2 - 1, \dots, X_r - 1)$ a, pour la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_A$, même loi que le vecteur aléatoire $(X_1, X_2, \dots, X_r)$ (pour la probabilité $\mathbf{P}$).

6. `La formule de l'espérance totale`

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé.

a) Soit A un événement de probabilité non nulle et soit X une variable aléatoire possédant une espérance. Montrer que le produit $X\,\mathbf{1}_A$ a une espérance et exprimer $\mathbf{E}\,(X\,\mathbf{1}_A)$ à l'aide de $\mathbf{E}_A(X)$.

b) On considère des événements A_1, A_2, … , A_n, chacun étant de probabilité non nulle, formant une partition de Ω. Soit X une variable aléatoire, définie sur l'espace $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et possédant une espérance. Établir l'égalité :

$$\mathbf{E}\,(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}_{A_k}(X)\mathbf{P}(A_k).$$

Dans toute la suite du problème on considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires **indépendantes** toutes de même loi, chacune suivant la loi géométrique (sur $\mathbb{N}^*$) de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.
On note, pour tout entier naturel n non nul et tout $\omega \in \Omega$,

$$I_n(\omega) = \min(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)) \quad \text{et} \quad M_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)).$$

7. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, l'application I_n est une variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. *Il en est de même, et on l'admet, de l'application M_n.*

Partie II. Étude du minimum

1. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, I_n suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.

2. Quelles sont les limites de $\mathbf{E}(I_n)$, $\mathbf{Var}(I_n)$ et, pour tout entier naturel k non nul, $\mathbf{P}([I_n = k])$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$?

3. **a)** Soit $\omega \in \Omega$. Justifier l'existence d'une limite finie, notée $\ell(\omega)$, pour la suite de terme général $I_n(\omega)$.

b) Exprimer la partie $\mathscr{L}$ définie par $\mathscr{L} = \{\omega \in \Omega ; \ell(\omega) = 1\}$ en fonction des événements $[I_n = 1]$ et en déduire que la partie $\mathscr{L}$ est un événement presque sûr.

Partie III. Étude du maximum

1. `L'espérance de` M_n `tend vers` $+\infty$

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(i) Justifier l'existence d'une espérance pour la variable M_n et l'encadrement

$$\frac{1}{p} \leqslant \mathbf{E}(M_n) \leqslant \frac{n}{p}.$$

(ii) Déterminer, pour tout entier naturel k, la valeur de $\mathbf{P}([M_n \leqslant k])$.

b) **(i)** Soit $K \in \mathbb{N}^*$. Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité :

$$\mathbf{E}(M_n) \geqslant \mathbf{E}(M_n \mathbf{1}_{[M_n \leqslant K]}) + K\,\mathbf{P}([M_n > K]).$$

(ii) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{E}(M_n) = +\infty$.

2. `Deux expressions de l'espérance de` M_n

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Établir l'égalité : $\mathbf{E}(M_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{i-1} \frac{1}{1-q^i}$. *On utilisera le résultat de I-3-b-ii).*

b) On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel x. Établir l'égalité :

$$\mathbf{E}(M_n) = \int_0^{+\infty} \left(1 - (1 - q^{\lfloor t \rfloor})^n\right) \mathrm{d}t.$$

On utilisera le résultat de I-3-d-ii).

3. `Estimation de l'espérance de` M_n

a) Justifier, pour tout entier naturel k, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} q^t(1-q^t)^k\,\mathrm{d}t$ et déterminer sa valeur.

b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité :

$$\int_0^{+\infty}\Big(1-(1-q^t)^n\Big)\,\mathrm{d}t = -\frac{H_n}{\ln q}\cdot$$

c) **(i)** Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'encadrement :

$$-\frac{H_n}{\ln q} \leqslant \mathbf{E}(M_n) \leqslant -\frac{H_n}{\ln q}+1\,.$$

En déduire l'équivalent de $\mathbf{E}(M_n) \sim -\dfrac{\ln n}{\ln q}$ quand l'entier n tend vers $+\infty$.

(ii) **Déduire** de l'encadrement précédent, pour tout $x\in\,]0,1[$, l'encadrement :

$$-\frac{x}{1-x} \leqslant \ln(1-x) \leqslant -x.$$

4. `Estimation de la variance de` M_n

a) Soit $k\in\mathbb{N}$.

(i) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,q^t(1-q^t)^k\,\mathrm{d}t$ dont on note α_k la valeur.

(ii) Établir l'égalité $\alpha_k = -\dfrac{1}{(k+1)\ln q}\displaystyle\int_0^{+\infty}\Big(1-(1-q^t)^{k+1}\Big)\,\mathrm{d}t\cdot$

b) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\Big(1-(1-q^t)^n\Big)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\ln^2 q}\sum_{k=1}^{n}\frac{H_k}{k}$ puis l'encadrement

$$\frac{2}{\ln^2 q}\sum_{k=1}^{n}\frac{H_k}{k} \leqslant \mathbf{E}(M_n^2) \leqslant 1+\frac{2}{\ln^2 q}\sum_{k=1}^{n}\frac{H_k}{k}-2\frac{H_n}{\ln q}\cdot$$

c) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $H_n^2 = 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{H_k}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\cdot$

d) En déduire l'estimation asymptotique $\mathbf{Var}(M_n) = O(\ln n)$ quand l'entier n tend vers $+\infty$.

Partie IV. Comportement asymptotique de la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

1. Prouver, pour tout $x\in[0,1[$, l'encadrement : $-\dfrac{x^2}{1-x} \leqslant x+\ln(1-x) \leqslant 0.$

2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Prouver, pour tout entier naturel k non nul, les majorations :

$$\left|\mathrm{e}^{-nq^k}-(1-q^k)^n\right| \leqslant \frac{n\,q^{2k}}{1-q^k}\,\mathrm{e}^{-nq^k} \leqslant \frac{n\,q^{2k}}{1-q}\,\mathrm{e}^{-nq^k}.$$

3. Montrer que la fonction $x\mapsto x^2\mathrm{e}^{-x}$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

4. Déduire des questions précédentes le résultat asymptotique suivant :

$$\lim_{n\to\infty}\ \operatorname*{Sup}_{k\in\mathbb{N}^*}\left|\mathbf{P}([M_n\leqslant k])-\mathrm{e}^{-nq^k}\right| = 0.$$

Partie V. Où l'on retrouve une formule exacte pour l'espérance de M_n

Dans cette dernière partie on suppose que $p = \dfrac{1}{2}$ et on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.
On pose $m_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n non nul, $m_n = \mathbf{E}(M_n)$.

1. On note $B_0 = \bigcap_{i=1}^{n} [X_i > 1]$, $B_n = \bigcap_{i=1}^{n} [X_i = 1]$ et, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$B_k = \Big(\bigcap_{i=1}^{k} [X_i = 1]\Big) \cap \Big(\bigcap_{i=k+1}^{n} [X_i > 1]\Big).$$

a) Établir, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, l'égalité : $\mathbf{E}_{B_k}(M_n) = 1 + m_{n-k}$.

b) En utilisant la formule de l'espérance totale, établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité :

$$m_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1 + m_{n-k}).$$

2. Justifier, pour tout réel x, la convergence de la série de terme général $\dfrac{m_n}{n!}\, x^n$.

On note, pour tout réel x, $M(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{m_n}{n!}\, x^n$.

3. Établir, pour tout réel x, l'égalité : $M(2x) = \mathrm{e}^{2x} - 1 + M(x)\,\mathrm{e}^{x}$.

On note, pour tout réel x, $G(x) = M(x)\,\mathrm{e}^{-x}$.
On a donc, pour tout réel x, $G(2x) = 1 - \mathrm{e}^{-2x} + G(x)$.

4. Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité :

$$\mathbf{E}(M_n) = m_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{2^k}{2^k - 1}.$$