Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2016

Épreuve à option (A) : Mathématiques

Durée : 4h

Étant donné un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel a, on dit qu'une fonction réelle f définie au voisinage de a est *plate à l'ordre n en a* si $f(x) - f(a)$ est négligeable devant $(x-a)^n$ mais pas devant $(x-a)^{n+1}$ lorsque x tend vers a. On dit que f est *ultraplate en a* si $f(x) - f(a)$ est négligeable devant $(x-a)^m$ lorsque x tend vers a, quel que soit l'entier naturel m.

L'objet du problème est l'étude des fonctions plates et de leurs approximations polynomiales. Les quatre parties du sujet sont largement indépendantes, mais les notations de la partie 1 sont utilisées dans les deux parties suivantes.

L'évaluation des copies sera étroitement liée à la rigueur des raisonnements et à une utilisation dûment justifiée du cours. Une présentation soignée sera appréciée, une présentation par trop négligée sanctionnée.

Partie 1 : étude des espaces $E_n(a)$

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dont on rappelle qu'il possède aussi une structure d'anneau commutatif et d'algèbre.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel a, on note $E_n(a)$ l'ensemble des fonctions de E telles que la différence $f(x) - f(a)$ soit négligeable devant $(x-a)^n$ lorsque x tend vers a.

1. Soit $f \in E$, $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

   a) Démontrer, en utilisant une formule de Taylor, que la fonction f appartient à $E_n(a)$ si, et seulement si, pour tout entier k compris entre 1 et n, la dérivée d'ordre k de f en a est nulle :

$$f \in E_n(a) \iff \forall\, k \in [\![1, n]\!],\ f^{(k)}(a) = 0\,.$$

   b) Démontrer que la somme $s : x \longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, x^k$ d'une série entière de rayon de convergence infini est ultraplate en 0 si, et seulement si, s est une fonction constante.

2. Un exemple de fonction ultraplate en 0

   Pour tout $x > 0$, on pose : $b(x) = \exp\big(-(\ln x)^2\big)$.

   a) Donner l'allure du graphe de b en précisant les coordonnées de ses points d'inflexion.

   b) Justifier que b est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme $B_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall\, x > 0,\ b^{(n)}(x) = \frac{B_n(\ln x)}{x^n} \exp\big(-(\ln x)^2\big)$$

   (on précisera le degré et le coefficient du monôme dominant de B_n).

   c) En déduire que la fonction $c : x \longmapsto \begin{cases} b(|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est ultraplate en 0. En quels autres points est-elle plate et à quel ordre ?

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   a) Montrer que, pour tout réel a, $E_n(a)$ est une sous-algèbre de l'algèbre E.

   b) L'ensemble $E_n(a)$ est-il un idéal de l'anneau commutatif E ?

4. a) Montrer que, si une fonction f est ultraplate en 0, alors la fonction $x \longmapsto f(x-a)$ est ultraplate en a.

   b) Construire à l'aide de la fonction c définie plus haut une fonction de E ultraplate à la fois en 0, en $+1$ et en -1.

Partie 2 : interpolations polynomiales avec ajustement de dérivées

1. a) Trouver, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}_{n+2}[X]$ vérifiant $P_n(0) = 0$ et $P_n(1) = 1$, et tel que la fonction polynomiale P_n appartienne à $E_n(0) \cap E_1(1)$.

   b) Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[0,1]$.

2. Soit p un nombre entier supérieur ou égal à 2, $a_1, a_2, \dots, a_p$ des nombres réels deux à deux distincts et $n_1, n_2, \dots, n_p$ des nombres entiers strictement positifs.

   Soit $m = p - 1 + \sum_{k=1}^{p} n_k$.

   Soit Φ l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}^{m+1}$ définie par :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}[X], \quad \Phi(P) = \Big(P^{(0)}(a_1), P^{(1)}(a_1), \dots, P^{(n_1)}(a_1), \dots, P^{(0)}(a_p), P^{(1)}(a_p), \dots, P^{(n_p)}(a_p)\Big)$$

   (où la dérivée 0-ième $P^{(0)}$ de P désigne la fonction polynomiale P elle-même).

   a) Vérifier que Φ est linéaire et vérifier que son noyau est un supplémentaire de $\mathbb{R}_m[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.

   b) En déduire que pour tout $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$, il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à m appartenant à $\bigcap_{k=1}^{p} E_{n_k}(a_k)$ vérifiant :

$$\forall\, k \in [\![1, p]\!],\ P(a_k) = \alpha_k\ .$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   a) Justifier l'existence d'une unique fonction polynomiale paire H_n de degré inférieur ou égal à $n+4$, appartenant à $E_n(0) \cap E_1(-1) \cap E_1(+1)$ et telle que $H_n(0) = 0$, $H_n(-1) = H_n(+1) = 1$.

   b) Calculer H_n, selon la parité de n.

   c) Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur l'intervalle ouvert $]-1, +1[$.

Partie 3 : fonctions génératrices plates en 0

Dans cette partie, on note $(\Omega, \mathscr{A})$ l'espace probabilisable $\big(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N})\big)$.
On admet que, quelle que soit la série convergente $\sum p_n$ à termes positifs ou nuls , telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, il existe une probabilité P sur $(\Omega, \mathscr{A})$ et une variable aléatoire X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, vérifiant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ P([X = n]) = p_n\ .$$

1. Dans cette question, G_X désigne la fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, définie sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$ muni d'une probabilité P.

   a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur la fonction de répartition de X pour que G_X soit plate à l'ordre n en 0.

   b) Démontrer que G_X est ultraplate en 0 si, et seulement si, $P([X = 0]) = 1$.

2. Dans cette question, $\sum a_n x^n$ désigne une série entière de rayon de convergence infini, dont la somme $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ est égale à 1 pour $x = 1$ et dont tous les coefficients a_n sont positifs ou nuls.

   Soit P une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$ et X une variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, vérifiant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ P([X = n]) = a_n\ .$$

   a) Justifier que X admet un moment à n'importe quel ordre.

   b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si S est plate à l'ordre n en 0, alors l'espérance de X est supérieure ou égale à $n + 1$. Dans quel cas a-t-on égalité ?

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et c un réel strictement supérieur à $n + 1$.

   a) Montrer qu'il existe une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la fonction généra-
   trice G appartient à $E_n(0)$ et vérifie $G'(1) = c$.
   On pourra chercher une variable aléatoire ne prenant que deux valeurs entières distinctes.

   b) Démontrer que la fonction génératrice G d'une telle variable aléatoire vérifie nécessairement l'inégalité :

$$G''(1) \geq c(c-1)\ .$$

   c) Démontrer que cette inégalité ne peut devenir une égalité que lorsque c est un nombre entier. Quelle est la valeur minimale de $G''(1)$ dans le cas contraire ?

Partie 4 : approximations polynomiales

Dans cette partie, on note $\|\ \|$ la norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions réelles bornées sur le segment $[-1, +1]$.

1. Soit F l'espace vectoriel normé obtenu en munissant de la norme $\|\ \|$ l'espace des fonctions de classe C^∞ sur $[-1, +1]$.

   a) L'ensemble des fonctions f de F qui vérifient $f(0) = 0$ est-il une partie fermée de F ?

   b) Montrer que l'ensemble des fonctions f de F pour lesquelles $f(x)$ est négligeable devant x lorsque x tend vers 0 n'est pas une partie fermée de F.
   Pour le prouver, on pourra utiliser la suite des fonctions $f_n : x \longmapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{\frac{1}{n}}$.

2. On note T l'application qui, à chaque fonction f de F, associe la fonction $T(f)$ définie sur $[-1,+1]$ par :

$$\forall\, x \in [-1,+1],\ T(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

a) Démontrer que T est une application continue de F dans F.

b) Soit $f \in F$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note T^n la composée n-ième $T \circ T \circ \cdots \circ T$ (n fois T). Démontrer que $T^n(f)$ est l'unique fonction de F nulle en 0 dont la dérivée n-ième est f et dont toutes les dérivées d'ordre inférieur à n s'annulent en 0.

c) L'application T est-elle injective ? Est-elle surjective ?

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction de F plate d'ordre k en 0.

a) Justifier l'existence d'une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers $f^{(k+3)}$ sur le segment $[-1,+1]$.

b) Démontrer que la suite $\left(T^{k+3}(P_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-1,+1]$ vers une fonction de la forme $f+R$, où R est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $k+2$.

c) Justifier l'existence d'une suite de polynômes $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Q_n(-1) = f(-1)$, $Q_n(0) = f(0)$ et $Q_n(1) = f(1)$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Q_n est une fonction plate à l'ordre k en 0 ;
- la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[-1,+1]$.