Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2016

Épreuve de mathématiques

Durée : 4h

L'objet du problème est l'étude, dans différents contextes, de la convergence et, parfois, de la valeur de la somme d'une série de terme général $\frac{\varepsilon_n}{n}$ où, pour tout entier naturel n non nul, ε_n vaut 1 ou -1.

Partie I : Quelques cas déterministes

On note, pour tout entier naturel n non nul, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. On pose, pour tout entier naturel n non nul, $\gamma_n = H_n - \ln n$.
Montrer que la suite de terme général $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente. On note γ sa limite.

2. a) Établir, pour tout entier naturel N non nul, l'égalité : $\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^n}{n} = H_N - H_{2N}$.

b) En déduire la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ et la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

3. On suppose dans cette question, que, pour tout entier naturel n, $\varepsilon_{3n+1} = \varepsilon_{3n+2} = 1$ et $\varepsilon_{3n+3} = -1$. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$?

4. On suppose dans cette question, que, pour tout entier naturel n,

$$\varepsilon_{4n+1} = \varepsilon_{4n+2} = 1 \quad \text{et} \quad \varepsilon_{4n+3} = \varepsilon_{4n+4} = -1.$$

a) Prouver, pour tout entier naturel N, l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} \right) = \int_0^1 \frac{1 - x^{4N+4}}{1 + x^2} \, \mathrm{d}x.$$

b) En déduire l'égalité : $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} \right) = \frac{\pi}{4}$.

c) Calculer, de même, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4n+2} - \frac{1}{4n+4} \right)$ et en déduire que la série $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$ est convergente avec $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$.

Dans toute la suite de cette partie, pour tout entier naturel p non nul, on considère la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ telle que, pour tout entier naturel n,

$$\varepsilon_{2pn+1} = \varepsilon_{2pn+2} = \cdots = \varepsilon_{2pn+p} = 1 \quad \text{et} \quad \varepsilon_{2pn+p+1} = \varepsilon_{2pn+p+2} = \cdots = \varepsilon_{2pn+2p} = -1.$$

La suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est donc constituée de p termes égaux à 1, suivis de p termes égaux à -1, suivis de p termes égaux à 1, etc.

On pose, pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{k}$.

5. a) Prouver, pour tout entier naturel n, la majoration : $\sum_{k=2pn+1}^{2pn+2p} \frac{\varepsilon_k}{k} \leqslant \frac{1}{2n^2}$.

b) En déduire la convergence de la suite $(S_{2pn})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

c) Prouver la convergence de la série $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$.

On note Σ_p la somme de cette série c'est-à-dire $\Sigma_p = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n}$.

6. a) Établir, pour tout entier naturel N non nul, l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{2pn+1} + \cdots + \frac{1}{2pn+p} - \frac{1}{2pn+p+1} - \cdots - \frac{1}{2pn+p+p} \right) = \sum_{n=0}^{N} \int_0^1 (1+x+\cdots+x^{p-1})\,(1-x^p)\, x^{2pn}\, \mathrm{d}x.$$

b) En déduire l'égalité : $\lim\limits_{N\to+\infty} S_{2p(N+1)} = \displaystyle\int_0^1 \frac{1+x+\cdots+x^{p-1}}{1+x^p}\,\mathrm{d}x$.

c) Conclure à l'égalité : $\Sigma_p = \displaystyle\int_0^1 \frac{1+x+\cdots+x^{p-1}}{1+x^p}\,\mathrm{d}x$.

7. `Calcul de` Σ_3

a) Soit $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$. Vérifier que la fonction $x\mapsto \dfrac{1}{b}\arctan\left(\dfrac{x-a}{b}\right)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x\mapsto \dfrac{1}{(x-a)^2+b^2}$.

b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x$ puis conclure à l'égalité : $\Sigma_3 = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}} + \dfrac{1}{3}\ln 2$.

8. `Une relation de récurrence`

a) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+x+\cdots+x^{p-2}}{1+x^p}\,\mathrm{d}x$ et établir l'égalité :

$$(1) \qquad \Sigma_p = \frac{\ln 2}{p} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1+x+\cdots+x^{p-2}}{1+x^p}\,\mathrm{d}x.$$

b) Établir l'égalité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2p-4})}{1+x^{2p}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{(1+u+u^2+\cdots+u^{p-2})}{1+u^p}\,\mathrm{d}u$.

c) En déduire l'égalité : $\Sigma_{2p} = \displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2+x^4+\cdots+x^{2p-2}}{1+x^{2p}}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\Sigma_p$.

9. `Calcul de` $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{2q}}{1+x^{2p}}\,\mathrm{d}x$

a) Soit A un réel strictement positif et f est une fonction continue définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ dont on note f_1 (resp. f_2) la partie réelle (resp. imaginaire).
On rappelle (ou on admet) que $\displaystyle\int_{-A}^{A} f(t)\,\mathrm{d}t$ désigne la somme $\displaystyle\int_{-A}^{A} f_1(t)\,\mathrm{d}t + i\int_{-A}^{A} f_2(t)\,\mathrm{d}t$.
Soit $\alpha\in]0,2\pi[\setminus\{\pi\}$. Établir l'égalité :

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} \frac{1}{t-\mathrm{e}^{i\alpha}}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} i\pi & \text{si } \alpha\in]0,\pi[\,; \\ -i\pi & \text{sinon.}\end{cases}$$

b) **(i)** On note, pour tout $k\in[\![0,2p-1]\!]$, $z_k = \exp\left(\dfrac{(2k+1)i\pi}{2p}\right)$.

Établir, pour tout entier $r\in[\![0,2p-1]\!]$, l'existence et l'unicité d'un polynôme de $\mathbb{C}_{2p-1}[X]$, noté L_r, tel que

$$L_r(z_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k\neq r\,; \\ 1 & \text{sinon.}\end{cases}$$

(ii) Montrer que la famille $(L_0, L_1, \ldots, L_{2p-1})$ est une base de $\mathbb{C}_{2p-1}[X]$.

c) Soit $q\in[\![0,p-1]\!]$.

(i) Justifier l'existence de nombres complexes λ_0, λ_1,..., λ_{2p-1} tels que, pour tout réel t,

$$\frac{t^{2q}}{1+t^{2p}} = \sum_{k=0}^{2p-1} \frac{\lambda_k}{t-z_k}.$$

(ii) Établir l'égalité : $\sum_{k=0}^{2p-1} \lambda_k = 0$.

(iii) Prouver, pour tout $k \in [\![0, 2p-1]\!]$, l'égalité : $\lambda_k = -\dfrac{z_k^{2q+1}}{2p}$.

d) En déduire l'égalité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{2q}}{1+x^{2p}}\,\mathrm{d}x = -\frac{i\pi}{2p}\sum_{k=0}^{p-1} \exp\Big(\Big[\frac{(2k+1)(2q+1)}{2p}\Big]\, i\pi\Big)$.

10. Déterminer la valeur de Σ_4.

Partie II : Un cas aléatoire

On considère une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de variables aléatoires réelles discrètes, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, **indépendantes**, **centrées** (c'est-à-dire d'espérance nulle) et possédant un moment d'ordre 2.

On **admet** qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge si, et seulement si, on a

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N}^* \quad \forall\,(n,p) \in \mathbb{N}^2 \quad \Big(p \geqslant N \text{ et } n \geqslant N \Rightarrow |u_p - u_n| \leqslant \varepsilon\Big).$$

On pose, pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$ et on note $\mathscr{C}$ l'ensemble des $\omega \in \Omega$ pour lesquels la suite $\Big(S_n(\omega)\Big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

A. `La convergence presque sûre`

1. On pose, pour tout $\varepsilon > 0$, $B(\varepsilon) = \displaystyle\bigcup_{N=1}^{+\infty} \bigcap_{\substack{n\geqslant N\\ p\geqslant N}} \Big[\,|S_n - S_p| \leqslant \varepsilon\,\Big]$.

a) **(i)** Justifier, pour tout $\varepsilon > 0$, l'appartenance de $B(\varepsilon)$ à $\mathscr{A}$.

(ii) Établir l'égalité : $\mathscr{C} = \displaystyle\bigcap_{\varepsilon>0} B(\varepsilon)$.

(iii) Comparer les ensembles $B(\varepsilon)$ et $B(\varepsilon')$ quand $0 < \varepsilon < \varepsilon'$.

(iv) Établir l'égalité : $\mathscr{C} = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{+\infty} B(\frac{1}{k})$ et en déduire que $\mathscr{C} \in \mathscr{A}$.

2. **a)** Montrer que $\mathbf{P}(\mathscr{C}) = 1$ si, et seulement si, pour tout entier naturel k non nul,

$$\mathbf{P}\Big(B(\frac{1}{k})\Big) = 1\,.$$

b) En déduire que $\mathbf{P}(\mathscr{C}) = 1$ si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbf{P}\Big(\bigcap_{N=1}^{+\infty} \bigcup_{\substack{n\geqslant N\\ p\geqslant N}} \Big[\,|S_p - S_n| > \varepsilon\,\Big]\Big) = 0.$$

c) Montrer que $\mathbf{P}(\mathscr{C}) = 1$ si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \mathbf{P}\Big(\bigcup_{\substack{n\geqslant N\\ p\geqslant N}} \Big[\,|S_p - S_n| > \varepsilon\,\Big]\Big) = 0$.

B. `Une inégalité`

Quand une variable aléatoire U, définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, a une espérance on note $\mathbf{E}(U)$ sa valeur.

Soit $\varepsilon > 0$ et N un entier naturel non nul. On note T_N l'application qui, à chaque $\omega \in \Omega$, associe l'élément de $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ défini par

$$T_N(\omega) = \inf\Big\{p \in \mathbb{N}^*\,;\, p > N \quad \text{et} \quad |S_p(\omega) - S_N(\omega)| > \varepsilon\Big\}$$

(avec la convention $\inf\emptyset = +\infty$).

1. **a)** Soit A un événement. Établir l'égalité : $\mathbf{E}(\mathbf{1}_A) = \mathbf{P}(A)$.

b) Déterminer, pour tout entier naturel N non nul et pour tout entier $p > N$, les valeurs des espérances $\mathbf{E}(S_p - S_N)$ et $\mathbf{E}((S_p - S_N)^2)$ en fonction des moments des Y_k.

2. Exprimer, pour tout entier $k > N$, l'ensemble $[T_N = k]$ à l'aide d'événements liés à différentes variables aléatoires S_i et en déduire que l'application T_N est une variable aléatoire.

3. **a)** Prouver, pour tout entier $k > N$, l'inégalité : $\varepsilon^2\,\mathbf{P}([\,T_N = k\,]) \leqslant \mathbf{E}\Big((S_k - S_N)^2\,\mathbf{1}_{[T_N=k]}\Big)$.

b) Soit p un entier strictement plus grand que N.
Justifier, pour tout $k \in [\![N+1, p]\!]$, l'indépendance des variables $S_p - S_k$ et $(S_k - S_N)\mathbf{1}_{[T_N=k]}$.

c) En déduire, pour tout $(p, k) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $N < k \leqslant p$, l'inégalité :

$$\varepsilon^2\,\mathbf{P}([\,T_N = k\,]) \leqslant \mathbf{E}\Big((S_p - S_N)^2\,\mathbf{1}_{[T_N=k]}\Big).$$

d) Prouver, pour tout entier $p > N$, l'inégalité :

$$\varepsilon^2 \sum_{k=N+1}^{p} \mathbf{P}([\,T_N = k\,]) \leqslant \sum_{i=N+1}^{p} \mathbf{E}(Y_i^2).$$

4. On suppose, de plus, que la série $\sum \mathbf{E}(Y_m^2)$ converge. Établir l'inégalité :

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{p>N}\Big[|S_p - S_N| > \varepsilon\Big]\Big) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{i=N+1}^{+\infty} \mathbf{E}(Y_i^2).$$

C. `Le résultat`

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de variables aléatoires réelles discrètes, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, **indépendantes** et toutes de **même loi** que X_1. On suppose que la loi de la variable X_1 est donnée par

$$\mathbf{P}([\,X_1 = -1\,]) = \mathbf{P}([\,X_1 = 1\,]) = \frac{1}{2}\cdot$$

On pose, pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{k}\cdot$

1. Prouver, pour tout entier naturel N non nul, l'inclusion

$$\bigcup_{\substack{n\geqslant N\\ p\geqslant N}} \Big[\,|S_p - S_n| > \varepsilon\,\Big] \subset \bigcup_{p>N}\Big[|S_p - S_N| > \frac{\varepsilon}{2}\Big]\cdot$$

2. Montrer que, presque sûrement, la série $\sum \dfrac{X_n}{n}$ converge, c'est-à-dire montrer que l'ensemble des $\omega \in \Omega$ pour lesquels la série $\sum \dfrac{X_n(\omega)}{n}$ converge est de probabilité 1.