Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2015

Épreuve à option (A) : Mathématiques

Durée : 4h

Toutes les matrices de l'énoncé sont à coefficients réels et, pour tout entier n strictement positif, on note $\mathscr{M}_n$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n et $\mathscr{C}_n$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices-colonnes à n coefficients ($\mathscr{M}_n$ et $\mathscr{C}_n$ sont donc des notations simplifiées pour $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).

L'espace $\mathscr{M}_1$ est identifié à $\mathbb{R}$ et la transposée d'une matrice M, quel que soit son format, est notée ${}^tM$.

On s'intéresse dans ce problème aux matrices carrées H dont les coefficients $h_{i,j}$ ne dépendent que de la somme $i+j$ de leur indice de ligne i et de leur indice de colonne j.
Pour toute application $\varphi : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{R}$ et tout entier strictement positif n, on note $H_\varphi^{(n)}$ la matrice carrée de $\mathscr{M}_n$ donnée par :

$$H_\varphi^{(n)} = \Big(\varphi(i+j-2)\Big)_{1\leq i,j\leq n} = \begin{pmatrix} \varphi(0) & \varphi(1) & \dots & \varphi(n-1) \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi(n-1) & \varphi(n) & \dots & \varphi(2n-2) \end{pmatrix}.$$

L'objet du problème est de préciser dans quels cas les matrices $H_\varphi^{(n)}$ définissent un produit scalaire, ce qui permet alors d'écrire leurs coefficients comme les moments d'une variable aléatoire discrète.

Les trois parties du problème sont relativement indépendantes les unes des autres, mais un même exemple apparaît à la fin de chacune d'entre elles.

L'évaluation des copies sera étroitement liée à la rigueur des raisonnements et à une utilisation dûment justifiée du cours. Une présentation soignée sera appréciée, une présentation par trop négligée sanctionnée.

Partie 1 : premiers exemples

1. Soit $H = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix} \cdot$

   On note h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont H est la matrice dans la base canonique.

   a) L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire usuel, noté $\langle .,. \rangle$, pour lequel la base canonique est orthonormale.

   i) Soit a un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ et D la droite engendrée par a. Déterminer, pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^3$, la projection orthogonale de x sur la droite D.

   ii) Énoncer le théorème spectral. En déduire que le noyau et l'image de h sont deux sous-espaces supplémentaires et orthogonaux de $\mathbb{R}^3$.

   iii) Trouver la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ du projecteur orthogonal sur l'image de h.

   b) i) Calculer la trace de l'endomorphisme $h \circ h$.

   ii) En déduire le spectre de l'endomorphisme h.

2. Dans cette question, n désigne un nombre entier supérieur ou égal à 3 et on note φ la fonction définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \varphi(k) = (-1)^k\,(k+1) \cdot$$

   On observera que $H_\varphi^{(3)}$ est la matrice de la question précédente.

   a) Soit τ la fonction définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \tau(k) = k+1 \cdot$$

   Écrire les matrices $H_\varphi^{(n)}$ et $H_\tau^{(n)}$ et démontrer qu'elles sont semblables.

   b) Soit $\mathscr{B}_n = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

   On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}_n$ est $H_\tau^{(n)}$.

   i) Montrer que l'image de g est le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ engendré par les deux vecteurs :

$$\begin{cases} f_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e_k \\ f_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\, e_k \end{cases} .$$

   ii) Justifier la stabilité de F par g et démontrer que la matrice dans la base (f_1, f_2) de l'endomorphisme de F induit par g est :

$$G = \begin{pmatrix} \dfrac{n(n-1)}{2} & \dfrac{n(n^2-1)}{3} \\ n & \dfrac{n(n+1)}{2} \end{pmatrix} .$$

   c) Déduire des résultats précédents le spectre de $H_\varphi^{(n)}$.

3. Dans cette question, n désigne un nombre entier strictement positif et on note φ la fonction définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \varphi(k) = k!\ \cdot$$

a) Soit $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ une matrice-colonne de $\mathscr{C}_n$.

i) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\sum_{i=1}^{n} c_i\, t^{i-1})^2\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$.

ii) Justifier l'égalité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\sum_{i=1}^{n} c_i\, t^{i-1})^2\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t = {}^tC\, H_\varphi^{(n)}\, C$.

b) Déduire de ce qui précède que toutes les valeurs propres de $H_\varphi^{(n)}$ sont strictement positives.

4. Par un procédé similaire à celui utilisé dans la question précédente, démontrer que toutes les valeurs propres de la matrice $H_\varphi^{(n)}$ sont strictement positives dans le cas où la fonction φ est définie par :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \varphi(k) = \frac{1}{k+1}\ \cdot$$

Partie 2 : les formes bilinéaires Δ_n

Tous les polynômes considérés dans la suite du problème sont à coefficients réels et, pour tout entier naturel p, on note E_p l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus p (E_p est donc une notation simplifiée pour $\mathbb{R}_p[X]$).

On considère une application $\varphi : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{R}$, à laquelle on associe pour tout entier naturel n les applications Δ_n et δ_n définies sur $E_n \times E_n$ et E_{2n} de la manière suivante.

- Pour tout polynôme $A = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in E_n$ et tout polynôme $B = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} b_j X^j \in E_n$, on pose :

$$\Delta_n(A,B) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_i\, b_j\, \varphi(i+j)\ \cdot$$

- Pour tout polynôme $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} c_k X^k \in E_{2n}$, on pose : $\quad \delta_n(Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} c_k\, \varphi(k)\ \cdot$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Préciser la dimension du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques sur $E_n \times E_n$.

b) Vérifier que l'application Δ_n est une forme bilinéaire symétrique sur $E_n \times E_n$.

c) Établir, pour tout élément (A,B) de $E_n \times E_n$, l'égalité :

$$\Delta_n(A,B) = \delta_n(AB)\ \cdot$$

d) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques sur $E_n \times E_n$ qui peuvent s'écrivent $(A,B) \longmapsto \delta(AB)$, avec δ forme linéaire sur E_{2n} ?

2. Dans cette question, on considère un nombre entier naturel d, au moins égal à deux, et une variable aléatoire discrète Y, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, prenant d valeurs distinctes $y_1, y_2, \dots, y_d$ avec les probabilités respectives $p_1, p_2, \dots, p_d$, strictement positives et de somme égale à 1.
   On se place alors dans le cas où la fonction φ est définie par :
$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \varphi(k) = \mathbf{E}(Y^k),$$
   où $\mathbf{E}(Y^k)$ désigne l'espérance de la variable variable aléatoire Y^k.
   a) Pour tout polynôme Q de E_{2n}, vérifier l'égalité : $\delta_n(Q) = \mathbf{E}\big(Q(Y)\big)\cdot$
   b) En déduire une condition nécessaire et suffisante, portant sur n et d, pour que la forme bilinéaire Δ_n soit un produit scalaire sur $E_n \times E_n$.

3. Dans cette question, on suppose que la fonction φ est définie par :
$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \varphi(k) = \frac{1}{k+1}\cdot$$
   a) i) Pour tous (a_0, a_1, a_2) et (b_0, b_1, b_2) éléments de $\mathbb{R}^3$, vérifier l'égalité :
$$\Delta_2(a_2X^2 + a_1X + a_0, b_2X^2 + b_1X + b_0) = {}^tC_A\, H_\varphi^{(3)}\, C_B$$
   où $C_A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $C_B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.
   ii) En déduire que Δ_2 est un produit scalaire.

   b) À l'aide du procédé d'orthonormalisation de Schmidt, construire à partir de la base canonique $\mathscr{B}_2 = (1, X, X^2)$ de E_2 une base orthonormale $\mathscr{B}'_2$ de E_2 pour le produit scalaire Δ_2.
   c) On note M la matrice de passage de $\mathscr{B}_2$ à $\mathscr{B}'_2$ et N la matrice de passage de $\mathscr{B}'_2$ à $\mathscr{B}_2$.
   i) Montrer que la matrice N est triangulaire.
   ii) Calculer la matrice ${}^tMH_\varphi^{(3)}M$ et en déduire l'égalité : $H_\varphi^{(3)} = {}^tNN$.

   d) Généraliser la démarche précédente pour prouver que, pour tout entier n strictement positif , il existe une matrice triangulaire $T^{(n)}$ de $\mathscr{M}_n$ telle que :
$$H_\varphi^{(n)} = {}^tT^{(n)}T^{(n)}\ .$$

Partie 3 : polynômes positifs et matrices de moments

Dans cette partie, on utilise les mêmes notations que dans la partie 2.

On considère donc encore une application $\varphi : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{R}$, à laquelle on associe pour tout n des applications Δ_n et δ_n définies comme précédemment.

On dit qu'un polynôme P est *positif* s'il est distinct du polynôme nul et si $P(x)$ est positif ou nul pour tout réel x.

1. a) Montrer que l'ordre de multiplicité de toute racine réelle α d'un polynôme positif P est pair.

   b) Montrer que tout polynôme positif Q de degré 2 est somme de deux carrés de polynômes, c'est-à-dire qu'il existe un couple (A, B) de polynômes tels que $Q = A^2 + B^2$.

   c) Pour des polynômes A, B, C, D, écrire le polynôme $(AC + BD)^2 + (AD - BC)^2$ comme produit de deux sommes de deux carrés de polynômes.

   d) En utilisant sa décomposition en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$, déduire des résultats précédents que tout polynôme positif est somme de deux carrés de polynômes.

   e) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que Δ_n est un produit scalaire sur $E_n \times E_n$ si et seulement si, pour tout polynôme positif P de E_{2n}, on a : $\quad \delta_n(P) > 0$.

Jusqu'à la fin du problème, on suppose que la fonction φ vérifie l'égalité $\varphi(0) = 1$.

On considère un entier n supérieur ou égal à 2, et on suppose que l'application Δ_n associée à φ est un produit scalaire sur $E_n \times E_n$.

On note $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ la base orthonormale de E_n (pour ce produit scalaire) obtenue par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à partir de $(1, X, \ldots, X^n)$.

2. a) Justifier l'orthogonalité de P_n avec tous les polynômes de degré inférieur ou égal à $n - 2$.

   b) En déduire que P_n est scindé à racines simples. *On pourra raisonner par l'absurde.*

3. On note $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les n racines de P_n, réelles et distinctes deux à deux, d'après ce qui précède.

   Pour tout entier k compris entre 1 et n, on note : $L_k = \displaystyle\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{X - \alpha_i}{\alpha_k - \alpha_i}$.

   a) Montrer que $(L_1, L_2 \ldots, L_n)$ est une base de E_{n-1} et calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} L_i$.

   b) Soit $Q \in E_{2n-1}$.

   i) Justifier l'existence d'un couple $(A, R) \in E_{n-1} \times E_{n-1}$ tel que : $Q = P_n A + R$.

   ii) Vérifier que : $\delta_n(Q) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Q(\alpha_i)\,\delta_n(L_i)$.

   c) Pour tout entier k compris entre 1 et n, on pose : $p_k = \delta_n(L_k)$.

   Démontrer que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont strictement positifs et de somme égale à 1.

4. a) Déduire de ce qui précède qu'il existe une variable aléatoire discrète Z vérifiant la propriété :
$$\forall\, k \in [\![1, 2n-1]\!], \quad \mathbf{E}(Z^k) = \varphi(k) \cdot$$

   b) On revient ici au cas où la fonction φ est définie par : $\quad \forall\, k \in \mathbb{N},\ \varphi(k) = \dfrac{1}{k+1} \cdot$

   Déterminer le nombre minimal de valeurs prises par une variable aléatoire discrète Z vérifiant la propriété précédente.