Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique.
Mathématiques.

Partie I. Une distance entre lois de variables aléatoires

1) a) Pour $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant |P([X = n]) - P([Y = n])| \leqslant P([X = n]) + P([y = n])$. Puisque la série de terme général $P([X = n]) + P([y = n])$, $n \in \mathbb{N}$, converge (et a pour somme 2), il en est de même de la série de terme général $|P([X = n]) - P([Y = n])|$, $n \in \mathbb{N}$.

b) • $d(X, Y) = 0 \Leftrightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |P([X = n]) - P([Y = n])| = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ P([X = n]) = P([Y = n])$.
Donc, $d(X, Y) = 0$ si et seulement si X et Y ont mêmes lois.

• On lance une pièce de monnaie non truquée. On a alors $\Omega = \{P, F\}$. Soit X la variable égale à 0 si on obtient pile et 1 si on obtient face et Y la variable égale à 0 si on obtient face et 1 si on obtient pile. X et Y sont distinctes, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et ont mêmes lois. Donc, $d(X, Y) = 0$ (pour tout $k \geqslant 2$, $P([X = k]) = P[Y = k]) = 0$).

c)

$$
\begin{aligned}
d(X, Z) &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} |P([X = n]) - P([Z = n])| = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} |P([X = n]) - P([Y = n]) + P([Y = n]) - P([Z = n])| \\
&\leqslant \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} |P([X = n]) - P([Y = n])| + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} |P([Y = n]) - P([Z = n])| \\
&= d(X, Y) + d(Y, Z).
\end{aligned}
$$

2) a) La série de terme général $P([X = n]) - P([Y = n])$, $n \in \mathbb{N}$, converge absolument et en particulier converge.

$$
\begin{aligned}
d(X, Y) &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} |P([X = n]) - P([Y = n])| = \frac{1}{2}\left(\sum_{n\in A} |P([X = n]) - P([Y = n])| + \sum_{n\in \overline{A}} |P([X = n]) - P([Y = n])|\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{n\in A} (P([X = n]) - P([Y = n])) + \sum_{n\in \overline{A}} (P([Y = n]) - P([X = n]))\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{n\in A} P([X = n]) - \sum_{n\in \overline{A}} P([X = n]) - \sum_{n\in A} P([Y = n])) + \sum_{n\in \overline{A}} P([Y = n])\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(P([X \in A]) - P\left(\left[X \in \overline{A}\right]\right) - P([Y \in A]) + P\left(\left[Y \in \overline{A}\right]\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(P([X \in A]) - 1 + P([X \in A]) - P([Y \in A]) + 1 - P([Y \in A])\right) \\
&= P([X \in A]) - P([Y \in A]) = |P([X \in A]) - P([Y \in A])|.
\end{aligned}
$$

En particulier, $P([X \in A]) - P([Y \in A]) \geqslant 0$ puis $d(X, Y) \leqslant |P([X \in A]) - P([Y \in A])|$.

b) Soit B une partie de $\mathbb{N}$.

$$
\begin{aligned}
P([X\in B])-P([Y\in B]) &= \sum_{n\in B} P([X=n]) - \sum_{n\in B} P([Y=n]) \\
&= \sum_{n\in B\cap A} P([X=n]) + \sum_{n\in B\cap \overline{A}} P([X=n]) - \sum_{n\in B\cap A} P([Y=n]) - \sum_{n\in B\cap \overline{A}} P([Y=n]) \\
&= \sum_{n\in B\cap A} (P([X=n])-P([Y=n])) + \sum_{n\in B\cap \overline{A}} (P([X=n])-P([Y=n])) \\
&\leqslant \sum_{n\in B\cap A} (P([X=n])-P([Y=n])) \text{ (car si } n\in\overline{A},\ P([X=n])-P([Y=n])\leqslant 0) \\
&\leqslant \sum_{n\in A} (P([X=n])-P([Y=n])) \text{ (car si } n\in A,\ P([X=n])-P([Y=n])\geqslant 0) \\
&= \sum_{n\in A} P([X=n]) - \sum_{n\in A} (P([Y=n]) = P([X\in A]) - P([Y\in A]) \\
&= |P([X\in A]) - P([Y\in A])| = d(X,Y).
\end{aligned}
$$

Ainsi, pour toute partie B de $\mathbb{N}$ et tout couple de variables aléatoires (X,Y), on a $P([X\in B])-P([Y\in B])\leqslant d(X,Y)$. En échangeant les rôles de X et Y, on a donc aussi $P([Y\in B])-P([X\in B])\leqslant d(X,Y)$ et finalement

$$\forall B\in\mathscr{P}(\mathbb{N}),\ |P([X\in B])-P([Y\in B])|\leqslant d(X,Y).$$

3) a) La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ car deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée seconde positive sur $\mathbb{R}$. Son graphe est donc au-dessus de sa tangente en son point d'abscisse 0 ce qui fournit

$$\forall x\in\mathbb{R},\ e^x\geqslant 1+x.$$

b) On sait que $P([X=0])=1-p$, $P([X=1])=p$ et pour $k\geqslant 2$, $P([X=k])=0$. D'autre part, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $P([Y=k])=\dfrac{p^k}{k!}e^{-p}$. D'après la question précédente, $e^{-p}\geqslant 1-p$ et donc $1-p-e^{-p}\leqslant 0$ puis

$$
\begin{aligned}
d(X,Y) &= \frac{1}{2}\left(\left|1-p-e^{-p}\right| + \left|p-pe^{-p}\right| + \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{p^k}{k!}e^{-p}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(-1+p+e^{-p}\right)+p\left(1-e^{-p}\right)+\left(e^p-1-p\right)e^{-p}\right) = \frac{1}{2}\left(p+p\left(1-e^{-p}\right)-pe^{-p}\right) \\
&= p\left(1-e^{-p}\right).
\end{aligned}
$$

On a aussi $1-e^{-p}\leqslant p$ et donc

$$d(X,Y)=p\left(1-e^{-p}\right)\leqslant p\times p=p^2.$$

4) a) Posons $P_1P_2=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant N}$.

• Puisque les variables X_1 et X_2 sont indépendantes,

$$a_{1,1}=(1-p_1)(1-p_2)=P([X_1=0])\times P([X_2=0])=P([X_1=0]\cap[X_2=0])=P([X_1+X_2=0]).$$

• Puisque les variables X_1 et X_2 sont indépendantes,

$$
\begin{aligned}
a_{1,2} &= (1-p_1)p_2+p_1(1-p_2)=P([X_1=0])\times P([X_2=1])+P([X_1=1])\times P([X_2=0]) \\
&= P([X_1=0]\cap[X_2=1])+P([X_1=1]\cap[X_2=0])=P([X_1+X_2=1]).
\end{aligned}
$$

• Puisque les variables X_1 et X_2 sont indépendantes,

$$
\begin{aligned}
a_{1,3} &= p_1p_2=P([X_1=1])\times P([X_2=1])=P([X_1=1]\cap[X_2=1]) \\
&= P([X_1+X_2=2]).
\end{aligned}
$$

• Ensuite, si $j\in[\![3,n]\!]$, $a_{1,j}=0=P([X_1+X_2=k])$ et si $j>n$, $a_{1,j}=0$.

Donc, la première ligne de P_1P_2 est constituée des $n+1$ réels $P([X_1+X_2=j])$, $0 \leqslant j \leqslant n$, suivis de termes nuls.

b) Montrons par récurrence que $\forall k \in [\![2,n]\!]$, la première ligne de $P_1P_2\dots P_k$ est constituée des $n+1$ réels $P([U_k=j])$, $0 \leqslant j \leqslant n$, suivis de termes nuls.

- Le résultat est vrai pour $k=2$ d'après la question précédente.
- Soit $k \in [\![2,n-1]\!]$. Supposons que la première ligne de $P_1P_2\dots P_k$ soit constituée des $n+1$ réels $P([U_k=j])$, $0 \leqslant j \leqslant n$, suivis de termes nuls. Posons $P_1P_2\dots P_{k+1} = (P_1P_2\dots P_k)P_{k+1} = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant N}$.

D'après le lemme des coalitions, les variables U_k et X_{k+1} sont indépendantes et donc

- $a_{1,1} = P([U_k=0]) \times P([X_{k+1}=0]) = P([U_k=0] \cap [X_{k+1}=0]) = P([U_{k+1}=0])$.
- Ensuite, pour $2 \leqslant j \leqslant k+1$,

$$\begin{aligned}a_{1,j} &= P([U_k=j-1]) \times p_1 + P([U_k=j]) \times (1-p_1) = P([U_k=j-1] \cap [X_{k+1}=1]) + P([U_k=j] \cap [X_{k+1}=0]) \\ &= P([U_{k+1}=j]).\end{aligned}$$

- Ensuite, pour $k+1 < j \leqslant n$, $a_{i,j} = 0 = P([U_{k+1}=j])$ et pour $j > n$, $a_{i,j} = 0$.

Le résultat est démontré par récurrence. On en déduit en particulier que la première ligne de $P_1P_2\dots P_n$ est constituée des $n+1$ réels $P([U_n=j])$, $0 \leqslant j \leqslant n$, suivis de termes nuls.

5) a) Soient $i \in [\![1,n]\!]$ puis $r \in \mathbb{N}$. Puisque les matrices R et Q_i commutent (car $Q_i \in \mathbb{R}[R]$), la formule du binôme de Newton permet d'écrire

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{r} \frac{1}{k!}Q_i^k &= \sum_{k=0}^{r} \frac{1}{k!}p_i^k(R-I)^k = \sum_{k=0}^{r} \frac{1}{k!}p_i^k\left(\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\frac{k!}{j!(k-j)!}R^j\right) \\ &= \sum_{j=0}^{r}\left(\sum_{k=j}^{r}(-1)^{k-j}\frac{1}{k!}p_i^k\frac{k!}{j!(k-j)!}R^j\right) = \sum_{j=0}^{r}\frac{p_i^j}{j!}\left(\sum_{k=j}^{r}(-1)^{k-j}p_i^{k-j}\frac{1}{(k-j)!}\right)R^j \\ &= \sum_{j=0}^{r}\frac{p_i^j}{j!}\left(\sum_{\ell=0}^{r-j}(-1)^{\ell}p_i^{\ell}\frac{1}{\ell!}\right)R^j \\ &= \sum_{j=0}^{r}\frac{p_i^j}{j!}\left(\sum_{k=0}^{r-j}\frac{(-1)^kp_i^k}{k!}\right)R^j.\end{aligned}$$

b) La matrice R est nilpotente et on sait que $R^N = 0$ puis pour $j \geqslant N$, $R^j = 0$. Pour $r \geqslant N$, on a donc

$$\sum_{k=0}^{r}\frac{1}{k!}Q_i^k = \sum_{j=0}^{N-1}\frac{p_i^j}{j!}\left(\sum_{k=0}^{r-j}\frac{(-1)^kp_i^k}{k!}\right)R^j.$$

Chacune des r séries numériques $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{r-j}\frac{(-p_i)^k}{k!}\right)_{r\geqslant j}$, $0 \leqslant j \leqslant N-1$, converge vers e^{-p_i} et quand r tend vers $+\infty$, on obtient

$$\begin{aligned}\exp(Q_i) &= \sum_{j=0}^{N-1}\frac{p_i^je^{-p_i}}{j!}R^j = \sum_{j=0}^{N-1}P([Y_i=j])R^j \\ &= \begin{pmatrix} P([Y_i=0]) & P([Y_i=1]) & \dots & P([Y_i=N-2]) & P([Y_i=N-1]) \\ 0 & P([Y_i=0]) & P([Y_i=1]) & & P([Y_i=N-2]) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & P([Y_i=1]) \\ 0 & \dots & \dots & 0 & P([Y_i=0]) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

c) Soit $j \in [\![1, N]\!]$. Puisque les variables Y_1 et Y_2 sont indépendantes, le coefficient ligne 1, colonne j de $\exp(Q_1) \times \exp(Q_2)$ est

$$\begin{aligned} a_{1,j} &= \sum_{k=1}^{j} P([Y_1 = k-1]) \times P([Y_2 = (j-1)-(k-1)]) = \sum_{k=1}^{j} P([Y_1 = k-1, Y_2 = j-k]) \\ &= P([Y_1 + Y_2 = j-1]). \end{aligned}$$

Mais alors, comme dans la question 4, par récurrence, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, le coefficient ligne 1, colonne j, $1 \leqslant j \leqslant N$, de $\exp(Q_1) \times \ldots \times \exp(Q_k)$ est $P([Y_1 + \ldots + Y_k = j-1])$.

En particulier, les coefficients de la première ligne de $\exp(Q_1) \times \ldots \times \exp(Q_n)$ sont $P([V_n = 0])$, $P([V_n = 1])$, ..., $P([V_n = N-1])$.

6) a)

• Soit $i \in [\![1, N]\!]$.

$$\sum_{j=1}^{N} |a_{i,j} + b_{i,j}| \leqslant \sum_{j=1}^{N} |a_{i,j}| + \sum_{j=1}^{N} |b_{i,j}| \leqslant \|A\| + \|B\|$$

puis

$$\|A + B\| = \underset{1 \leqslant i \leqslant N}{\text{Max}} \sum_{j=1}^{N} |a_{i,j} + b_{i,j}| \leqslant \|A\| + \|B\|.$$

• Posons $AB = (c_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant N}$. Soit $i \in [\![1, N]\!]$.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N} |c_{i,j}| &= \sum_{j=1}^{N} \left| \sum_{k=1}^{N} a_{i,k} b_{k,j} \right| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{k=1}^{N} |a_{i,k}| |b_{k,j}| \right) = \sum_{k=1}^{N} |a_{i,k}| \left(\sum_{j=1}^{N} |b_{k,j}| \right) \\ &\leqslant \|B\| \sum_{k=1}^{N} |a_{i,k}| \leqslant \|B\| \|A\| \end{aligned}$$

puis

$$\|AB\| = \underset{1 \leqslant i \leqslant N}{\text{Max}} \sum_{j=1}^{N} |c_{i,j}| \leqslant \|A\| \|B\|.$$

b) Soit $i \in [\![1, n$. $\left\|R^0\right\| = \|I\| = 1$, $\|R\| = 1$ puis pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $\left\|R^j\right\| \leqslant \|R\|^j \leqslant 1$ puis

$$\begin{aligned} \|\exp(Q_i)\| &\leqslant \sum_{j=0}^{N-1} \frac{p_i^j e^{-p_i}}{j!} \|R\|^j \leqslant e^{-p_i} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{p_i^j}{j!} \\ &\leqslant e^{-p_i} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{p_i^j}{j!} = 1. \end{aligned}$$

c) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\|P_i\| \leqslant (1 - p_i) \|I\| + p_i \|R\| \leqslant 1 - p_i + p_i = 1$. Ensuite,

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n} P_i - \prod_{i=1}^{n} \exp(Q_i) &= P_1 \prod_{i=2}^{n} P_i - \exp(Q_1) \prod_{i=2}^{n} \exp(Q_i) \\ &= P_1 \prod_{i=2}^{n} P_i - \exp(Q_1) \prod_{i=2}^{n} P_i + \exp(Q_1) \prod_{i=2}^{n} P_i - \exp(Q_1) \prod_{i=2}^{n} \exp(Q_i) \\ &= (P_1 - \exp(Q_1)) \prod_{i=2}^{n} P_i + \exp(Q_1) \left(\prod_{i=2}^{n} P_i - \prod_{i=2}^{n} \exp(Q_i) \right) \end{aligned}$$

et donc

$$\left\|\prod_{i=1}^{n} P_i - \prod_{i=1}^{n} \exp(Q_i)\right\| \leqslant \|P_1 - \exp(Q_1)\| \prod_{i=2}^{n} \|P_i\| + \|\exp(Q_1)\| \left\|\prod_{i=2}^{n} P_i - \prod_{i=2}^{n} \exp(Q_i)\right\|$$
$$\leqslant \|P_1 - \exp(Q_1)\| + \left\|\prod_{i=2}^{n} P_i - \prod_{i=2}^{n} \exp(Q_i)\right\|$$

puis, par récurrence, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$\left\|\prod_{i=1}^{n} P_i - \prod_{i=1}^{n} \exp(Q_i)\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{k} \|P_i - \exp(Q_i)\| + \left\|\prod_{i=k+1}^{n} P_i - \prod_{i=k+1}^{n} \exp(Q_i)\right\|$$

et en particulier,

$$\left\|\prod_{i=1}^{n} P_i - \prod_{i=1}^{n} \exp(Q_i)\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|P_i - \exp(Q_i)\|.$$

d) Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

$$\|P_i - \exp(Q_i)\| = \left\|(1-p_i) I + p_i R - \sum_{j=0}^{N-1} \frac{p_i^j e^{-p_i}}{j!} R^j\right\| = \left\|\left(1 - p_i - e^{-p_i}\right) I + p_i\left(1 - e^{-p_i}\right) R + \sum_{j=2}^{N-1} \frac{p_i^j e^{-p_i}}{j!} R^j\right\|$$
$$\leqslant -1 + p_i + e^{-p_i} + p_i\left(1 - e^{-p_i}\right) + \sum_{j=2}^{N-1} \frac{p_i^j e^{-p_i}}{j!} \text{ (d'après la question 3)}$$
$$\leqslant -1 + p_i + e^{-p_i} + p_i\left(1 - e^{-p_i}\right) + e^{-p_i}\left(e^{p_i} - 1 - p_i\right) = 2p_i\left(1 - e^{-p_i}\right)$$
$$\leqslant 2p_i^2 \text{ (d'après la question 3).}$$

7) a) D'après les questions 7.c) et 7.d),

$$\left\|\prod_{i=1}^{n} P_i - \prod_{i=1}^{n} \exp(Q_i)\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|P_i - \exp(Q_i)\| \leqslant 2\sum_{i=1}^{n} p_i^2.$$

D'après les question 4.b) et 5.c), la première ligne de la matrice $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} P_i - \prod_{i=1}^{n} \exp(Q_i)$ est

$$(a_{1,j})_{1\leqslant j\leqslant N} = \left(P([U_n = j-1]) - P([V_n = j-1])\right)_{1\leqslant j\leqslant N}$$

et donc

$$\sum_{j=1}^{N} |P([U_n = j-1]) - P([V_n = j-1])| \leqslant \left\|\prod_{i=1}^{n} P_i - \prod_{i=1}^{n} \exp(Q_i)\right\| \leqslant 2\sum_{i=1}^{n} p_i^2.$$

Ces inégalités sont vraies pour tout N de $\mathbb{N}^*$. Quand N tend vers $+\infty$, on obtient

$$2d(U_n, V_n) = \sum_{j=1}^{+\infty} |P([U_n = j-1]) - P([V_n = j-1])| \leqslant 2\sum_{i=1}^{n} p_i^2$$

et finalement

$$d(U_n, V_n) \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i^2.$$

b) Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on prend $p_i = \dfrac{\lambda}{n}$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, $X_i \sim \mathscr{B}\left(1, \dfrac{\lambda}{n}\right)$ et, puisque les variables X_i sont indépendantes, on sait que $U_n \sim \mathscr{B}\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$.

D'autre part, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $Y_i \sim \mathscr{P}\left(\dfrac{\lambda}{n}\right)$ et, puisque les variables Y_1, ..., Y_n, sont indépendantes, on sait que $V_n \sim \mathscr{P}\left(\dfrac{\lambda}{n} + \ldots + \dfrac{\lambda}{n}\right) = \mathscr{P}(\lambda)$.

En résumé, U_n suit la loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{\lambda}{n}$ et V_n suit la loi de Poisson de paramètre λ. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a obtenu

$$d\left(U_n, V_n\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i^2 = n \times \frac{\lambda^2}{n^2} = \frac{\lambda^2}{n}$$

et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} d\left(U_n, V_n\right) = 0$. Or,

$$\underset{k \in \mathbb{N}}{\operatorname{Max}} \left| P\left([U_n = k]\right) - \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \right| = \underset{k \in \mathbb{N}}{\operatorname{Max}} \left| P\left([U_n = k]\right) - P\left([V_n = k]\right) \right| \leqslant 2d\left(U_n, V_n\right)$$

et donc

$$\lim_{n \to +\infty} \underset{k \in \mathbb{N}}{\operatorname{Max}} \left| P\left([U_n = k]\right) - \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \right| = 0.$$

Ceci améliore le résultat usuel de cours : on a une sorte de convergence uniforme.

Partie II. Records d'une permutation

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = H_n - \ln n$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \left(H_{n+1} - \ln(n+1)\right) - \left(H_n - \ln n\right) = \frac{1}{n+1} - \left(\ln(n+1) - \ln n\right) = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \\
&= \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{t}\right) dt \leqslant 0.
\end{aligned}$$

Donc, la suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante. De plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \ln(n+1)$$

et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n - \ln n \geqslant \ln(n+1) - \ln n \geqslant 0$. Ainsi, la suite $\left(H_n - \ln n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0. On en déduit que la suite $\left(H_n - \ln n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel noté γ, positif ou nul.

2) $\mathscr{S}_3$ est constitué de 6 permutations $i = (1\ 2\ 3)$, $\tau_1 = (2\ 1\ 3)$, $\tau_2 = (3\ 2\ 1)$, $\tau_3 = (1\ 3\ 2)$, $c_1 = (2\ 3\ 1)$ et $c_2 = (3\ 1\ 2)$, toutes équiprobables de probabilité égale à $\dfrac{1}{6}$.

Ensuite, $R_3\left(\mathscr{S}_3\right) = \{1, 2, 3\}$.

- i présente 3 records.
- τ_1, τ_3 et c_1 présentent 2 records.
- τ_2 et c_2 présentent 1 record.

Donc, $P\left(R_3 = 1\right) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$, $R\left(R_3 = 2\right) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$ et $P\left(R_3 = 3\right) = \dfrac{1}{6}$. Ensuite,

$$E\left(R_3\right) = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{6} \times 3 = \frac{11}{6},$$

et, d'après la formule de Koenig-Huygens,

$$V\left(R_3\right) = E\left(R_3^2\right) - \left(E\left(R_3\right)\right)^2 = \frac{1}{3} \times 1^2 + \frac{1}{2} \times 2^2 + \frac{1}{6} \times 3^2 - \frac{121}{36} = \frac{23}{6} - \frac{121}{36} = \frac{17}{36}.$$

3) Soit $\sigma \in \mathscr{S}_n$. Si σ présente n records, alors $\sigma_1 \leqslant \sigma_2 \leqslant \ldots \sigma_n$ ce qui impose $\sigma = Id_{[\![1,n]\!]}$. Réciproquement, $\sigma = Id_{[\![1,n]\!]}$ présente n records. Donc,

$$P\left([R_n = n]\right) = P\left(\left\{Id_{[\![1,n]\!]}\right\}\right) = \frac{1}{n!}.$$

Soit $\sigma \in \mathscr{S}_n$. Si $\sigma_1 \neq n$, σ présente un record au rang 1 et un record au rang $k \in [\![2, n]\!]$ tel que $\sigma_k = n$ et en particulier, σ présente au moins deux records. Donc, si σ présente exactement un record, nécessairement $\sigma_1 = n$. Réciproquement, si $\sigma_1 = n$, alors pour tout $k \geqslant 2$, $\sigma_1 > \sigma_k$ et donc σ ne présente pas d'autre record que le record au rang 1.

En résumé, l'événement $[R_n = 1]$ est constitué des permutations σ telles que $\sigma_1 = n$. Il y a $(n-1)!$ telles permutations ($n-1$ possibilités pour σ_1, puis $n-2$ pour σ_3, ..., puis une pour σ_n). Donc,

$$P([R_n = 1]) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

4) a) On cherche les permutations ayant exactement deux records, en 1 et p (pour $p \in [\![2, n[\![$). Soit σ une telle permutation :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p-1 & p & p+1 & \cdots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_{p-1} & \sigma_p & \sigma_{p+1} & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix}$$

On peut remarquer que :
- $\sigma_p = n$ sinon il y aurait un autre record.
- De plus, $\forall k \in [\![2, p-1]\!]$, $\sigma_1 > \sigma_k$ sinon il y aurait un autre record.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p-1 & p & p+1 & \cdots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_{p-1} & n & \sigma_{p+1} & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix}$$

Pour obtenir une telle permutation,
- on doit choisir $p-1$ entiers entre 1 et $n-1$. Ce seront les $\sigma_1, \cdots, \sigma_{p-1}$, il y a $\binom{n-1}{p-1}$ possibilités.

  Le maximum est obtenu pour σ_1, les $\sigma_2, \cdots, \sigma_{p-1}$ peuvent être permutés. Il y a par conséquent $\binom{n-1}{p-1}(p-1-2+1)!$ possibilités soit $\binom{n-1}{p-1}(p-2)!$ possibilités.
- σ_p est déterminé et il vaut n.
- Enfin, il reste $n-(p+1)-1 = n-p$ entiers compris entre 1 et $n-1$, ce sont $\sigma_{p+1}, \cdots, \sigma_n$. On peut les permuter. Il y a donc $(n-p)!$ possibilités.

Au final, il y a $\binom{n-1}{p-1}(p-2)!(n-p)! = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-(p-1))!}(p-2)!(n-p)! = \frac{(n-1)!}{p-1}$ possibilités.

b) Si pour $p \in [\![2, n]\!]$, on note $E_{n,p}$ l'événement « la permutation σ présente exactement deux records, un au rang 1 et un au rang p », alors l'événement $[R_n = 2]$ est la réunion disjointe des événements $E_{n,p}$ et donc

$$\begin{aligned} P([R_n = 2]) &= \sum_{p=2}^{n} P(E_{n,p}) = \frac{1}{n!}\sum_{p=2}^{n} \frac{(n-1)!}{p-1} = \frac{1}{n}\sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p-1} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}. \end{aligned}$$

c) D'après la question 1 de la partie II,

$$P([R_n = 2]) = \frac{1}{n}H_{n-1} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n}(\ln(n-1) + O(1)) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n}(\ln n + o(\ln n)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}.$$

5) a) On remarque déjà que $T_i(\mathcal{S}_n) = \{0, 1\}$. On cherche à calculer $P(T_i = 1)$.

Pour construire une permutation σ ayant un record au rang i,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i-1 & i & i+1 & \cdots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_{i-1} & \sigma_i & \sigma_{i+1} & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix}$$

On commence par choisir i éléments entre 1 et n, ce seront $\sigma_1, \cdots, \sigma_i$. Pour ces i éléments, σ_i est le maximum, les $i-1$ autres éléments peuvent être permutés. Il y a $\binom{n}{i}(i-1)!$ possibilités.

Les autres valeurs $\sigma_{i+1}, \cdots, \sigma_n$ sont déterminés de fait et on peut les permuter. Il y a $n-(i+1)+1)! = (n-i)!$ possibilités.

Au final, il y a $\binom{n}{i}(i-1)!(n-i)! = \frac{n!}{i!(n-i)!}(i-1)!(n-i)! = \frac{n!}{i}$ possibilités.

Par suite, $P(T_i = 1) = \frac{1}{n!}\frac{n!}{i} = \frac{1}{i}$ ainsi, $\forall i$, $T_i \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{i}\right)$, c'est-à-dire, T_i suit une loi binomiale de paramètre $\frac{1}{i}$.

b) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $E(T_i) = \frac{1}{i}$. Puisque $R_n = T_1 + \ldots + T_n$ et puisque l'espérance est linéaire,

$$E(R_n) = \sum_{i=1}^{n} E(T_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = H_n.$$

En particulier,

$$E(R_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n.$$

6) a) Soient $2 \leqslant i < j \leqslant n$. On cherche une permutation σ ayant des records en i et j.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & i-1 & i & i+1 & \cdots & j-1 & j & j+1 & \cdots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \cdots & \sigma_{i-1} & \sigma_i & \sigma_{i+1} & \cdots & \sigma_{j-1} & \sigma_j & \sigma_{j+1} & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix}$$

On commence par choisir j éléments parmi n. Le maximum est σ_j.
On choisit ensuite i éléments parmi $j-1$ (on a enlevé aux j termes précédents le maximum σ_j). Le maximum de ces i termes est σ_i.
Les entiers $\sigma_1, \cdots, \sigma_{i-1}$ peuvent être permutés, les entiers $\sigma_{i+1}, \cdots, \sigma_{j-1}$ peuvent l'être aussi.
Il y a ainsi $\binom{n}{j}\binom{j-1}{i}((i-1)-1+1)!((j-1)-(i+1)+1)! = \binom{n}{j}\binom{j-1}{i}(i-1)!(j-1-i)!$ possibilités.
Enfin, les autres valeurs $\sigma_{j+1}, \cdots, \sigma_n$ sont déterminées de fait et on peut les permuter.
Il y a $n-(j+1)+1)! = (n-j)!$ possibilités.
Finalement,

$$P(T_i = 1 \cap T_j = 1) = \frac{1}{n!}\binom{n}{j}\binom{j-1}{i}(i-1)!(j-1-i)! = \frac{1}{n!}\frac{n!}{j!(n-j)!}\frac{(j-1)!}{i!(j-i-1)!}(i-1)!(j-i-1)! = \frac{1}{i \cdot j}$$

D'autre part, $P([T_i = 1]) \times P([T_j = 1]) = \frac{1}{i} \times \frac{1}{j} = \frac{1}{ij}$. Donc, les événements $[T_i = 1]$ et $[T_j = 1]$ sont indépendants. On sait alors que les événements $[T_i = 0] = \overline{[T_i = 1]}$ et $[T_i = 1]$ sont indépendants. De même, les événements $[T_i = 1]$ et $[T_j = 0]$ sont indépendants et les événements $[T_i = 0]$ et $[T_j = 0]$ sont indépendants. Ceci montre que les variables T_i et T_j sont indépendantes.

b) Puisque les variables $T_1, \ldots, T_n$, sont deux à deux indépendantes, on sait que

$$\begin{aligned} V(R_n) &= V\left(\sum_{i=1}^{n} T_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(T_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\left(1 - \frac{1}{i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{i^2} = H_n - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}. \end{aligned}$$

Puisque la série de terme général $\frac{1}{i^2}$, $i \geqslant 1$, converge et que H_n tend vers $+\infty$, on en déduit que

$$V(R_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n.$$

7) Soit $k \in [\![2, n]\!]$.

$$
\begin{aligned}
P([R_n = k]) &= P([T_1 + \ldots + T_n = k]) \\
&= \sum_{\substack{(j_1,\ldots,j_n)\in\{0,1\}^n \\ j_1+\ldots+j_n=k}} P([T_1 = j_1, \ldots, T_n = j_n]) \\
&= \sum_{\substack{(j_1,\ldots,j_n)\in\{0,1\}^n \\ j_1+\ldots+j_n=k}} P([T_1 = j_1]) \times \ldots \times P([T_n = j_n]) \text{ (car } T_1, \ldots, T_n \text{ sont indépendantes)} \\
&= \sum_{\substack{(j_2,\ldots,j_n)\in\{0,1\}^{n-1} \\ j_2+\ldots+j_n=k-1}} P([T_2 = j_2]) \times \ldots \times P([T_n = j_n]) \text{ (car } P([T_1 = 0]) = 0) \\
&= \sum_{2\leqslant i_2<i_3<\ldots<i_k\leqslant n} P([T_{i_2} = 1])\, P([T_{i_3} = 1]) \ldots P([T_{i_k} = 1]) \prod_{\substack{2\leqslant j\leqslant n \\ j\notin\{i_2,\ldots,i_k\}}} P([T_j = 0]) \\
&\text{(de nouveau car } T_1, \ldots, T_n \text{ sont indépendantes)} \\
&= \sum_{2\leqslant i_2<i_3<\ldots<i_k\leqslant n} \frac{1}{i_2}\frac{1}{i_3}\cdots\frac{1}{i_k} \prod_{\substack{2\leqslant j\leqslant n \\ j\notin\{i_2,\ldots,i_k\}}} \left(1 - \frac{1}{j}\right).
\end{aligned}
$$

8) a)

$$
\begin{aligned}
P([R_n = 3]) &= \sum_{2\leqslant i<j\leqslant n} \frac{1}{i}\frac{1}{j} \prod_{\substack{2\leqslant k\leqslant n \\ k\notin\{i,j\}}} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \sum_{2\leqslant i<j\leqslant n} \frac{1}{i}\frac{1}{j} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{i}\right)\left(1 - \frac{1}{j}\right)} \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \\
&= \sum_{2\leqslant i<j\leqslant n} \frac{1}{(i-1)(j-1)} \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{2\leqslant i<j\leqslant n} \frac{1}{(i-1)(j-1)} \text{ (produit télescopique)} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-1} \frac{1}{ij}.
\end{aligned}
$$

b) $P([R_n = 3]) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{j=2}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{ij}\right) = \frac{1}{n} \sum_{j=2}^{n-1} \frac{1}{j} H_{j-1}$. Maintenant, $\dfrac{1}{j} H_{j-1} \underset{j\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(j-1)}{j} \underset{j\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln j}{j} > 0$ et la série de terme général $\dfrac{\ln j}{j}$ diverge.

D'après la règle de l'équivalence des sommes partielles de séries à termes positifs divergentes,

$$
P([R_n = 3]) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \sum_{j=2}^{n-1} \frac{\ln j}{j}.
$$

Ensuite, puisque la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ est positive et décroissante sur $[3, +\infty[$ (car de dérivée $x \mapsto \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$), on sait que la série de terme général $\dfrac{\ln j}{j} - \displaystyle\int_{j-1}^{j} \frac{\ln x}{x}\, dx$ converge. Donc,

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=2}^{n-1} \frac{\ln j}{j} &\underset{n\to+\infty}{=} \sum_{j=2}^{n-1} \int_{j-1}^{j} \frac{\ln x}{x}\, dx + O(1) = \int_{1}^{n-1} \frac{\ln x}{x}\, dx + O(1) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2} \ln^2(n-1) + O(1) \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2} \ln^2(n-1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2} \ln^2 n
\end{aligned}
$$

et finalement

$$
P([R_n = 3]) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln^2 n}{2n}.
$$

Partie III. Deux résultats asymptotiques

1) a) Soit $\varepsilon > 0$. D'après la question 1 de la partie II, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{H_n}{\ln n} = 1$. Donc, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour $n \geqslant n_0$, $\left|\dfrac{H_n}{\ln n} - 1\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Soit $n \geqslant n_0$. Soit $\sigma \in \left[\left|\dfrac{R_n}{\ln n} - \dfrac{H_n}{\ln n}\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}\right]$. Alors,

$$\left|\frac{R_n(\sigma)}{\ln n} - 1\right| \leqslant \left|\frac{R_n(\sigma)}{\ln n} - \frac{H_n}{\ln n}\right| + \left|\frac{H_n}{\ln n} - \frac{H_n}{\ln n}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

et donc $\sigma \in \left[\left|\dfrac{R_n}{\ln n} - 1\right| < \varepsilon\right]$. Ceci montre que $\left[\left|\dfrac{R_n}{\ln n} - \dfrac{H_n}{\ln n}\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}\right] \subset \left[\left|\dfrac{R_n}{\ln n} - 1\right| < \varepsilon\right]$.

Par passage au complémentaire, on en déduit que pour $n \geqslant n_0$,

$$\left[\left|\frac{R_n}{\ln n} - 1\right| \geqslant \varepsilon\right] \subset \left[\left|\frac{R_n}{\ln n} - \frac{H_n}{\ln n}\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right].$$

b)

(i) Soit $\varepsilon > 0$. D'après la question 5.b) de la partie II, $E(R_n) = H_n$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$P\left(\left[\left|\frac{R_n}{\ln n} - \frac{H_n}{\ln n}\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) = P\left([|R_n - E(R_n)| \geqslant \varepsilon \ln n]\right) \leqslant \frac{V(R_n)}{\varepsilon^2 \ln^2 n}.$$

D'après la question 6.b) de la partie II, $\dfrac{V(R_n)}{\varepsilon^2 \ln^2 n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{\varepsilon^2 \ln^2 n} = \dfrac{1}{\varepsilon^2 \ln n}$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\varepsilon^2 \ln n} = 0$, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left[\left|\frac{R_n}{\ln n} - \frac{H_n}{\ln n}\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) = 0.$$

(ii) Soit $\varepsilon > 0$. D'après la question a), $P\left(\left[\left|\dfrac{R_n}{\ln n} - 1\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) \leqslant P\left(\left[\left|\dfrac{R_n}{\ln n} - \dfrac{H_n}{\ln n}\right| \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\right]\right)$ et d'après la question b.(i), $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\left[\left|\dfrac{R_n}{\ln n} - \dfrac{H_n}{\ln n}\right| \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\right]\right) = 0$. Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left[\left|\frac{R_n}{\ln n} - 1\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) = 0.$$

2) a) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$. Pour $t \in \mathbb{R}$,

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P([X = k])t^k = (1-p) + pt.$$

b) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Pour $t \in \mathbb{R}$,

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P([X = k])t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} t^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{\lambda(t-1)}.$$

c) Montrons le résultat par récurrence.

- Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes. On sait que G_{X_1} et G_{X_2} sont définies sur $[-1,1]$ au moins et que pour tout $t \in [-1,1]$, les séries numériques de termes généraux respectifs $P([X_1 = k])\,t^k$ et $P([X_2 = k])\,t^k$ sont absolument convergentes. Pour $t \in [-1,1]$ (sur $]-1,1[$, on peut effectuer directement le produit de Cauchy des deux séries entières),

$$\begin{aligned}
G_{X_1+X_2}(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P([X_1 + X_2 = k])\,t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} P([X_1 = i] \cap [X_2 = k-i])\right) t^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} P([X_1 = i])\,t^i P\left([X_2 = k-i]\,t^{k-i}\right)\right) \text{ (car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes)} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} P([X_1 = k])\,t^k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} P([X_2 = k])\,t^k\right) \\
&\text{(produit de Cauchy de deux séries numériques absolument convergentes)} \\
&= G_{X_1}(t) \times G_{X_2}(t),
\end{aligned}$$

et donc $G_{X_1+X_2} = G_{X_1} \times G_{X_2}$.

• Soit $n \geqslant 2$. Supposons le résultat pour n variables aléatoires indépendantes. Soient $X_1, \ldots, X_{n+1}$, $(n+1)$ variables aléatoires indépendantes. D'après le lemme des coalitions, X_{n+1} et $X_1 + \ldots + X_n$ sont indépendantes puis

$$\begin{aligned}
G_{X_1+\ldots+X_n+X_{n+1}} &= G_{X_1+\ldots+X_n} \times G_{X_{n+1}} \text{ (d'après le cas } n=2\text{)}\\
&= \left(\prod_{k=1}^{n} G_{X_k}\right) \times G_{X_{n+1}} \text{ (par hypothèse de récurrence)}\\
&= \prod_{k=1}^{n+1} G_{X_k}.
\end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

d) D'après la question a), pour tout $i \in [\![m+1, 2m]\!]$, pour tout $t \in [0,1]$, $G_{T_i}(t) = 1 - \dfrac{1}{i} + \dfrac{1}{i}t = 1 + \dfrac{t-1}{i}$. D'après la question 7 de la partie II, les variables $T_{m+1}, \ldots, T_{2m}$ sont indépendantes et donc, d'après la question c), pour tout $t \in [0,1]$,

$$G_{W_n}(t) = G_{T_{m+1}+\ldots+T_{2m}}(t) = \prod_{i=m+1}^{2m} G_{T_i}(t) = \prod_{i=m+1}^{2m}\left(1 + \frac{t-1}{i}\right).$$

e) Soit $t \in [0,1]$. Pour $i \in [\![m+1, 2m]\!]$, $1 + \dfrac{t-1}{i} \geqslant 1 - \dfrac{1}{i} \geqslant 1 - \dfrac{1}{m+1} > 0$ et on peut donc écrire

$$\ln\left(G_{W_n}(t)\right) = \sum_{i=m+1}^{2m} \ln\left(1 + \frac{t-1}{i}\right).$$

La fonction $x \mapsto \ln\left(1 + \dfrac{t-1}{x}\right)$ est croissante sur $]0, +\infty[$ (car $t - 1 \leqslant 0$) et on peut donc écrire

$$\ln\left(G_{W_n}(t)\right) \leqslant \sum_{i=m+1}^{2m} \int_{i}^{i+1} \ln\left(1 + \frac{t-1}{x}\right)\,dx = \int_{m+1}^{2m+1} \ln\left(1 + \frac{t-1}{x}\right)\,dx$$

et aussi

$$\ln\left(G_{W_n}(t)\right) \geqslant \sum_{i=m+1}^{2m} \int_{i-1}^{i} \ln\left(1 + \frac{t-1}{x}\right)\,dx = \int_{m}^{2m} \ln\left(1 + \frac{t-1}{x}\right)\,dx.$$

Or,

$$\begin{aligned}
\int \ln\left(1 + \frac{t-1}{x}\right)\,dx &= \int \ln(x+t-1)\,dx - \int \ln x\,dx = ((x+t-1)\ln(x+t-1) - x) - (x\ln x - x) + C\\
&= (x+t-1)\ln(x+t-1) - x\ln x + C.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\ln\left(G_{W_n}(t)\right) &\geqslant ((2m+t-1)\ln(2m+t-1) - 2m\ln(2m)) - ((m+t-1)\ln(m+t-1) - m\ln m)\\
&= 2m\ln\left(\frac{2m+t-1}{2m}\right) - m\ln\left(\frac{m+t-1}{m}\right) + (t-1)\ln\left(\frac{2m+t-1}{m+t-1}\right)
\end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}
\ln\left(G_{W_n}(t)\right) &\leqslant ((2m+1+t-1)\ln(2m+t) - (2m+1)\ln(2m+1)) - ((m+1+t-1)\ln(m+t) - (m+1)\ln(m+1))\\
&= (2m+1)\ln\left(\frac{2m+t}{2m+1}\right) - (m+1)\ln\left(\frac{m+t}{m+1}\right) + (t-1)\ln\left(\frac{2m+t}{m+t}\right)
\end{aligned}$$

Or, $2m\ln\left(\dfrac{2m+t-1}{2m}\right) = 2m\ln\left(1 + \dfrac{t-1}{2m}\right) \underset{m\to+\infty}{=} t - 1 + o(1)$ et de même, $m\ln\left(\dfrac{m+t-1}{m}\right) \underset{m\to+\infty}{=} t - 1 + o(1)$. On en déduit que

$$\lim_{m\to+\infty}\left(2m\ln\left(\frac{2m+t-1}{2m}\right)-m\ln\left(\frac{m+t-1}{m}\right)+(t-1)\ln\left(\frac{2m+t-1}{m+t-1}\right)\right)=(t-1)\ln 2$$

et de même,

$$\lim_{m\to+\infty}\left((2m+1)\ln\left(\frac{2m+t}{2m+1}\right)-(m+1)\ln\left(\frac{m+t}{m+1}\right)+(t-1)\ln\left(\frac{2m+t}{m+t}\right)\right)=(t-1)\ln 2.$$

Le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{m\to+\infty}\ln\left(G_{W_n}(t)\right)=(t-1)\ln 2$ puis que $\lim\limits_{m\to+\infty}G_{W_n}(t)=e^{(t-1)\ln 2}$. On reconnaît la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda=\ln 2$.

D'après le résultat admis par l'énoncé, la suite $(W_n)_{n\geqslant 4}=\left(\sum\limits_{k=m+1}^{2m}T_k\right)_{m\geqslant 2}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y telle que $Y\sim\mathscr{P}(\ln 2)$.

