Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2014

Épreuve à option (A) : Mathématiques

Durée : 4h

Le problème a pour objet l'extension de la notion de série entière à des séries de matrices, dans le but de définir le logarithme d'une matrice au voisinage de la matrice-identité et d'en examiner certaines propriétés.

Les quatre parties du problème sont largement indépendantes. Quel que soit l'ordre dans lequel le candidat décide de les aborder, on attend de lui une démarche claire, ainsi qu'une rédaction soignée. La présentation, la précision des arguments et la rigueur des raisonnements seront prises en compte dans la notation.

Dans tout le problème, p désigne un nombre entier strictement positif. On note $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre p à coefficients complexes, et $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients sont réels.
Pour toute matrice M de $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ et tout couple (ℓ, k) d'entiers compris entre 1 et p, on note $M[\ell, k]$ le coefficient situé dans la ℓ-ième ligne et la k-ième colonne de la matrice M.
Dans la base des matrices élémentaires $E_{\ell,k}$ (matrice dont tous les coefficients valent 0, sauf celui situé dans la ℓ-ième ligne et la k-ième colonne, qui vaut 1) une matrice M de $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ s'écrit donc :

$$M = \sum_{\ell=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} M[\ell, k]\; E_{\ell,k} \,.$$

On dit qu'une matrice M de $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ est triangulaire si tous ses coefficients sous-diagonaux (les $M[\ell, k]$ pour lesquels $\ell > k$) sont nuls.

On appelle polynôme caractéristique de M le polynôme $\chi_M = \det(X.I_p - M)$, où I_p désigne la matrice-identité d'ordre p. Pour tout entier k compris entre 0 et p, on notera $a_k(M)$ le coefficient de son monôme de degré k, de sorte que :

$$\chi_M = \sum_{k=0}^{p} a_k(M)\, X^k \text{ , avec } a_p(M) = 1 \text{ et } a_0(M) = (-1)^p \det(M).$$

Le spectre de M, constitué des racines (complexes) de χ_M, sera noté $\mathrm{sp}(M)$:

$$\mathrm{sp}(M) = \{\lambda \in \mathbb{C}\,;\ \det(\lambda.I_p - M) = 0\} \,.$$

On dit qu'une suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ est convergente si chacune des suites $(M_n[\ell, k])_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{C}$.
On dit que la série de terme général M_n est convergente si la suite $(\sum_{m=0}^{n} M_m)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Partie 1 : convergence d'une série entière de matrices

Soit $\|\ .\ \|$ une norme sur l'espace vectoriel $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ des matrices-colonnes à p coefficients complexes.

On note $\|\ .\ \|_s$ la norme sur $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ subordonnée à $\|\ .\ \|$, définie par :

$$\forall\ A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C}),\ \|\, A\, \|_s = \mathrm{Sup}\{\ \|\, A\,Y\, \|\ ;\ Y \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{C}),\ \|\, Y\, \| \leq 1\} \,.$$

1. Justifier pour toute matrice Y de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ et tout couple (A,B) de matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ les inégalités :

$$\| AY \| \leq \| A \|_s \| Y \| \ ,$$

$$\| AB \|_s \leq \| A \|_s \| B \|_s \ .$$

2. Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$, on appelle rayon spectral de A, noté $\rho(A)$, le plus grand des modules des valeurs propres (complexes) de A : $\rho(A) = \mathrm{Max}\{|\lambda|\,;\ \lambda \in \mathrm{sp}(A)\}$.
Démontrer que, pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$, on a : $\rho(A) \leq \| A \|_s$.

3. Dans cette question, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de nombres complexes, telle que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} c_n z^n$ soit strictement positif.
On note R ce rayon de convergence, éventuellement infini.
On note $\mathscr{A}_c$ l'ensemble des matrices A de $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ telles que la série $\sum\limits_{n\geq 0} c_n A^n$ soit convergente.

a) Établir les deux inclusions :

$$\{A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C});\ \| A \|_s < R\} \subset \mathscr{A}_c \subset \{A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C});\ \rho(A) \leq R\} \ .$$

b) Quel résultat sur les séries entières retrouve-t-on lorsque p est égal à 1, si on identifie alors $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ à $\mathbb{C}$?

c) Démontrer que $\mathscr{A}_c$ est invariant par similitude, c'est-à-dire que, si A appartient à $\mathscr{A}_c$ et si A' est semblable à A, alors A' est aussi un élément de $\mathscr{A}_c$.

d) Démontrer que si A est une matrice diagonalisable de $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ dont le rayon spectral est strictement inférieur à R, alors A appartient à $\mathscr{A}_c$.

Partie 2 : quelques calculs et un exemple

Pour tout couple $(n,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{C}$, on note $u_n(z) = (-1)^n \dfrac{z^{n+1}}{n+1}$ et $v_n(z) = \dfrac{z^{2n+1}}{2n+1}$.

1. a) Démontrer que la suite $d = (d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $d_n = \ln(n) - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ est convergente.

b) Exprimer, pour $N \in \mathbb{N}^*$, la somme partielle $\sum\limits_{n=0}^{2N-1} u_n(1)$ en fonction de d_{2N} et d_N, et en déduire l'égalité : $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(1) = \ln(2)$.

c) Pour quelles valeurs réelles de x la série de terme général $u_n(x)$ est-elle convergente ? Quelle est alors sa somme ?

2. a) Préciser le rayon de convergence de la série entière de terme général v_n.

   b) Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$, pour tout réel x tel que la série $\sum_{n\geq 0} v_n(x)$ converge.

   c) Établir, pour tout réel $x \in [-1,+1]$, l'égalité : $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(ix) = i \arctan(x)$.

   d) Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} u_n(i)$ et calculer sa somme.

3. Dans cette question, on note : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   a) Justifier l'existence d'une matrice inversible P de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que la matrice $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.

   b) Utiliser le résultat de la question 2d pour calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} D^{n+1}$.

   c) En déduire $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} A^{n+1}$.

Partie 3 : quelques questions topologiques

1. Soit T une matrice triangulaire de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

   Pour tout entier strictement positif n on pose : $T_n = T + \sum_{\ell=1}^{p} \frac{\ell}{n} E_{\ell,\ell}$.

   a) Calculer la limite, quand n tend vers l'infini, de la différence $T_n[\ell,\ell] - T_n[k,k]$ de deux coefficients diagonaux de T_n.

   b) Démontrer qu'il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, les coefficients diagonaux de T_n soient deux à deux distincts.

2. a) Rappeler pourquoi toute matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

   b) Démontrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

3. Pour tout polynôme $Q = \sum_{k=0}^{p} b_k X^k$ de $\mathbb{C}_p[X]$, on note : $\| Q \|_1 = \sum_{k=0}^{p} |b_k|$.

   Justifier, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}), \quad \| N - M \|_s \leq \alpha \Rightarrow \| \chi_N - \chi_M \|_1 \leq 1 .$$

4. Soit $M \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ et $\mu \in \mathrm{sp}(M)$.

a) Justifier successivement les inégalités :

(1) $|\mu|^p \leq \mathrm{Max}\{1, |\mu|^{p-1}\} \sum_{k=0}^{p-1} |a_k(M)|$ (2) $\mathrm{Max}\{1, |\mu|^p\} \leq \mathrm{Max}\{1, |\mu|^{p-1}\} \sum_{k=0}^{p} |a_k(M)|$

et (3) $|\mu| \leq \| \chi_M \|_1$.

b) En déduire que, pour toute matrice $N \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ telle que $\| \chi_N - \chi_M \|_1 \leq 1$, on a :

$$\forall \lambda \in \mathrm{sp}(N), \quad |\lambda| \leq 2 \| \chi_M \|_1 \ .$$

5. Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, de limite M.

On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme caractéristique de M_n est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ c'est-à-dire qu'il admet p racines réelles $\lambda_{1,n}, \ldots, \lambda_{p,n}$, distinctes ou non :

$$\chi_{M_n} = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_{k,n}) \ .$$

a) Justifier l'existence d'une suite convergente extraite de la suite $\big((\lambda_{1,n}, \ldots, \lambda_{p,n})\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) En déduire que le polynôme caractéristique de M est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

6. Soit $\mathscr{D}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ qui sont diagonalisables dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire telles qu'il existe une matrice inversible P de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ pour laquelle la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale.

a) Démontrer que l'adhérence de $\mathscr{D}_p(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ dont le spectre est inclus dans $\mathbb{R}$.

b) Montrer que si le polynôme caractéristique d'une matrice M de $\mathscr{D}_p(\mathbb{R})$ n'est pas scindé à racines simples, alors il existe une suite de matrices non diagonalisables convergeant vers M.

c) Que peut-on en déduire sur l'intérieur de $\mathscr{D}_p(\mathbb{R})$?

Partie 4 : logarithme de matrice

On note $\mathscr{T}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ qui sont trigonalisables dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire telles qu'il existe une matrice inversible P de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ pour laquelle la matrice $P^{-1}MP$ est triangulaire.

Soit $\mathscr{B} = \{M \in \mathscr{T}_p(\mathbb{R});\ \| M - I_p \|_s < 1\}$.

1. Soit $M \in \mathscr{B}$.

   a) Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}(M-I_p)^{n+1}$.

   b) Démontrer que $\text{sp}(M)$ est inclus dans l'intervalle ouvert $]0,2[$.

Pour toute matrice $M \in \mathscr{B}$, on note désormais : $\quad \text{Log}(M) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(M-I_p)^{n+1}$.

2. Démontrer que, pour toute matrice $M \in \mathscr{B}$, la trace de $\text{Log}(M)$ est égale à $\ln(\det M)$ (on pourra commencer par le cas où M est diagonalisable).

3. Soit M et N deux matrices de $\mathscr{T}_p(\mathbb{R})$ telles que : $MN = NM$.

   a) Démontrer qu'il existe une matrice inversible P de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ pour laquelle les deux matrices $P^{-1}MP$ et $P^{-1}NP$ sont triangulaires.

   b) Démontrer qu'il existe deux suites $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathscr{D}_p(\mathbb{R})$ qui convergent respectivement vers M et N, telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$M_n N_n = N_n M_n .$$

4. Utiliser le résultat précédent pour prouver que, si M et N sont deux matrices de $\mathscr{B}$ telles que $MN = NM$ et $MN \in \mathscr{B}$, alors :

$$\text{Log}(MN) = \text{Log}(M) + \text{Log}(N) .$$