Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique.
Mathématiques. Option A

Partie I. Convergence d'une série entière de matrices

1) Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$. $\|A\|_s$ est un majorant de $\{\|AY\|,\ Y \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{C}),\ \|Y\| \leqslant 1\}$.
Soit $Y \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{C})$.

- Si $Y = 0$, alors $\|AY\| = 0 \leqslant 0 = \|A\|_s\|Y\|$.
-Si $Y \neq 0$, le vecteur colonne $Y' = \dfrac{1}{\|Y\|}Y$ vérifie $\|Y'\| = \dfrac{1}{\|Y\|}\|Y\| = 1 \leqslant 1$ et donc $\|AY'\| \leqslant \|A\|_s$ puis $\dfrac{1}{\|Y\|}\|AY\| \leqslant \|A\|_s$ et donc $\|AY\| \leqslant \|A\|_s\|Y\|$.

On a montré que : $\forall Y \in \mathscr{M}_{p,1},\ \|AY\| \leqslant \|A\|_s\|Y\|$.

Soit $(A, B) \in (\mathscr{M}_p(\mathbb{C}))^2$. Soit $Y \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ tel que $\|Y\| \leqslant 1$. D'après ce qui précède,

$$\|ABY\| \leqslant \|A\|_s\|BY\| \leqslant \|A\|_s\|B\|_s\|Y\| \leqslant \|A\|_s\|B\|_s.$$

$\|A\|_s\|B\|_s$ est donc un majorant de $\{\|ABY\|,\ Y \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{C}),\ \|Y\| \leqslant 1\}$ et $\|AB\|_s$ est le plus petit des majorants de $\{\|ABY\|,\ Y \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{C}),\ \|Y\| \leqslant 1\}$. Donc, $\|AB\|_s \leqslant \|A\|_s\|B\|_s$.

$\|\ \|_s$ est donc une norme sous-multiplicative sur $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$.

2) Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$. On sait que χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$. Soit λ une valeur propre de A. Soit Y un vecteur propre associé. Alors, $Y \neq 0$ puis $Y_0 = \dfrac{1}{\|Y\|}Y$ est un vecteur propre unitaire ($\|Y_0\| = 1$) de A associé à λ.

$$\|A\|_s \geqslant \|AY_0\| = \|\lambda Y_0\| = |\lambda|\,\|Y_0\| = |\lambda|.$$

Donc, pour tout $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$, $|\lambda| \leqslant \|A\|_s$ puis $\rho(A) \leqslant \|A\|_s$.

3) a)

• Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ telle que $\|A\|_s < R$. D'après la question 1., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|A^n\|_s \leqslant \|A\|_s^n$ (y compris si $n = 0$).
Puisque $\|A\|_s < R$, on sait que la série numérique de terme général $c_n\|A\|_s^n$, $n \in \mathbb{N}$, converge. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|c_nA^n\|_s \leqslant |c_n|\,\|A\|_s^n$, on en déduit que la série numérique de terme général $\|c_nA^n\|_s$ converge.
Ainsi, la série de matrices de terme général c_nA^n est absolument convergente et donc convergente car $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ est de dimension finie. Ceci montre que $A \in \mathscr{A}_c$.

• Soit $A \in \mathscr{A}_c$. Soit λ une valeur propre de A. Soit $Y \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé.
La série de matrices de terme général c_nA^n, $n \in \mathbb{N}$, converge. Par continuité de l'application $\varphi\ :\ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_p(\mathbb{C}) & \to & \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto & MY \end{array}$
(φ est continue sur $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ car φ est linéaire sur un espace de dimension finie), on en déduit que la série de vecteurs de terme général $c_nA^nY = c_n\lambda^nY$, $n \in \mathbb{N}$, converge et que

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_nA^n\right)Y = \sum_{n=0}^{+\infty} c_nA^nY = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\lambda^nY.$$

Puisque $Y \neq 0$, on en déduit encore que la série numérique de terme général $c_n\lambda^n$, $n \in \mathbb{N}$, converge et donc que $|\lambda| \leqslant R$.

Ainsi, si $A \in \mathscr{A}_c$, alors $\rho(A) \leqslant R$.

b) Si $p = 1$, on retrouve le fait que le domaine de définition Δ de la somme de la série entière vérifie

$$B_o(0, R) \subset \Delta \subset B_f(0, R).$$

c) Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$. Soit $\psi\ :\ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_p(\mathbb{C}) & \to & \mathscr{M}_p(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto & P^{-1}MP \end{array}$. ψ est continue sur $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ car linéaire sur $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ qui est de dimension finie.

Soient $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ puis $A' = P^{-1}AP$. Si $A \in \mathscr{A}_c$ ou encore si la série de matrices de terme général a_nA^n, $n \in \mathbb{N}$, converge, alors par continuité de ψ, la série de terme général

$$\psi\left(c_nA^n\right) = c_nP^{-1}A^nP = c_nA'^n$$

converge et donc $A' \in \mathscr{A}_c$. Ainsi, si une matrice A est dans $\mathscr{A}_c$, alors toute matrice semblable à A est dans $\mathscr{A}_c$.

d) Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ diagonalisable. Il existe $D = \text{diag}\,(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant p} \in \mathscr{D}_p(\mathbb{C})$ et $P \in GL_p(\mathbb{C})$ telles que $A = PDP^{-1}$. Dans ce cas, $\text{sp}(A) = \text{sp}(D)$ et en particulier $\rho(A) = \rho(D)$.
Supposons de plus $\rho(D) = \rho(A) < R$. D'après la question précédente, A est dans $\mathscr{A}_c$ si et seulement si D est dans $\mathscr{A}_c$. Or, pour $N \in \mathbb{N}$ donné,

$$\sum_{n=0}^{N} c_n D^n = \text{diag}\left(\sum_{n=0}^{N} c_n \lambda_i^n\right)_{1\leqslant i\leqslant p} \qquad (*).$$

Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $|\lambda_i| < R$ et donc pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, la série numérique de terme général $c_n\lambda_i^n$, $n \in \mathbb{N}$, converge. Mais alors, d'après $(*)$, la série de matrices de terme général $c_n D^n$ converge et finalement, $A \in \mathscr{A}_c$.

Partie II. Quelques calculs et un exemple

1) a)

$$\begin{aligned}
d_{n+1} - d_n &= \left(\ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\right) - \left(\ln(n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) = \ln(n+1) - \ln(n) - \frac{1}{n+1} \\
&= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \times \frac{1}{1 + \dfrac{1}{n}} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, la série de terme général $d_{n+1} - d_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge. On sait alors que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{2N-1} u_n(1) &= \sum_{n=0}^{2N-1} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{2k-1}}{2k} + \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{2k-2}}{2k-1} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2k-1} \\
&= -\frac{1}{2}(\ln n - d_N) + \sum_{k=1}^{2N} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2k} \\
&= -\frac{1}{2}(\ln n - d_N) + (\ln(2n) - d_{2N}) - \frac{1}{2}(\ln n - d_N) \\
&= \ln 2 + d_N - d_{2N}.
\end{aligned}$$

Puisque la suite $(d_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge, $\displaystyle\sum_{n=0}^{2N-1} u_n(1) \underset{N\to+\infty}{=} \ln 2 + o(1)$. Ensuite,

$$\sum_{n=0}^{2N} u_n(1) = \sum_{n=0}^{2N-1} u_n(1) - \frac{1}{2N+1} \underset{N\to+\infty}{=} \ln 2 + o(1).$$

Finalement, les deux suites extraites $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{2N-1} u_n(1)\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{2N} u_n(1)\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ convergent et ont même limite, à savoir $\ln(2)$. On en déduit que la suite $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n(1)\right)_{N\in\mathbb{N}}$ converge ou encore la série de terme général $u_n(1)$, $n \in \mathbb{N}$, converge et de plus

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(1) = \ln 2.$$

c) Soit $z \in \mathbb{C}$. D'après le cours, on sait que $R_u = 1$. Donc, si Δ_u est l'ensemble des x réels pour lesquels la série de terme général $u_n(x)$ converge, alors $]-1,1[\subset \Delta_u \subset [-1,1]$.
D'après ce qui précède, la série numérique de terme général $u_n(1)$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge vers $\ln 2$. Enfin, la série de terme $u_n(-1) = -\dfrac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, diverge. Finalement, $\Delta_u =]-1,1]$ et de plus, d'après le cours,

$$\forall x \in]-1,1],\ \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \ln(1+x).$$

2) a) Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $|z| \leqslant 1$, $\left|\dfrac{z^{2n+1}}{2n+1}\right| = \dfrac{|z|^{2n+1}}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et donc $R_v \geqslant 1$ et si $|z| > 1$, $\left|\dfrac{z^{2n+1}}{2n+1}\right| \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ et donc $R_v \leqslant 1$. Finalement, $R_v = 1$.

b) On note Δ_v est l'ensemble des x réels pour lesquels la série de terme général $v_n(x)$ converge et on a $]-1,1[\subset \Delta_v \subset [-1,1]$. De plus, la série numérique de terme général $v_n(1) = \dfrac{1}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, diverge et la série numérique de terme général $v_n(-1) = -\dfrac{1}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, diverge. Donc, $\Delta_v =]-1,1[$.

Pour $x \in]-1,1[$, $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots$ et $\ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \ldots$

Donc, pour $x \in]-1,1[$, $\ln(1+x) - \ln(1-x) = 2\left(x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \ldots\right) = 2\displaystyle\sum_{n=0} v_n(x)$.

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

c) Soit $x \in]-1,1[$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(ix) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^{2n+1}x^{2n+1}}{2n+1} = i\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = i\,\mathrm{Arctan}(x).$$

Soit alors $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{i}\sum_{n=0}^{N} v_n(i\times 1) &= \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{N} \int_0^1 \left(-x^2\right)^n\ dx \\ &= \int_0^1 \frac{1-\left(-x^2\right)^{N+1}}{1-(-x^2)}\ dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\ dx + (-1)^N \int_0^1 \frac{x^{2N+2}}{1+x^2}\ dx.\end{aligned}$$

De plus, pour $N \in \mathbb{N}$, $\left|(-1)^N \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2N+2}}{1+x^2}\ dx\right| = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2N+2}}{1+x^2}\ dx \leqslant \int_0^1 x^{2N+2}\ dx = \frac{1}{2N+3}$. Puisque $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2N+3} = 0$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} (-1)^N \int_0^1 \frac{x^{2N+2}}{1+x^2}\ dx = 0$. Par suite, la série numérique de terme général $v_n(i)$, $n \in \mathbb{N}$, converge vers $i\dfrac{\pi}{4} = i\,\mathrm{Arctan}(1)$. Par parité, la série numérique de terme général $v_n(-i)$, $n \in \mathbb{N}$, converge vers $-i\dfrac{\pi}{4} = -i\,\mathrm{Arctan}(1)$ et finalement

$$\forall x \in [-1,1],\ \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(ix) = i\,\mathrm{Arctan}(x).$$

d) Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{4N-1} u_n(i) &= \sum_{n=0}^{4N-1} (-1)^n \frac{i^{n+1}}{n+1} = \sum_{k=0}^{2N-1} (-1)^{2k} \frac{i^{2k+1}}{2k+1} + \sum_{k=0}^{2N-1} (-1)^{2k+1} \frac{i^{2k+2}}{2k+2} \\ &= \sum_{k=0}^{2N-1} \frac{(-1)^k}{2k+2} + i\sum_{k=0}^{2N-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2N} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + i\sum_{k=0}^{2N-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \\ &\underset{N\to+\infty}{=} \frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{\pi}{4} + o(1).\end{aligned}$$

Ensuite, $\displaystyle\sum_{n=0}^{4N}u_n(i)=\sum_{n=0}^{4N-1}u_n(i)+(-1)^{4N}\frac{i^{4N+1}}{4N+1}\underset{N\to+\infty}{=}\frac{1}{2}\ln 2+i\frac{\pi}{4}+o(1)$ et de même, $\displaystyle\sum_{n=0}^{4N+1}u_n(i)\underset{N\to+\infty}{=}\frac{1}{2}\ln 2+i\frac{\pi}{4}+o(1)$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{4N+2}u_n(i)\underset{N\to+\infty}{=}\frac{1}{2}\ln 2+i\frac{\pi}{4}+o(1)$.

On sait alors que $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}u_n(i)\underset{N\to+\infty}{=}\frac{1}{2}\ln 2+i\frac{\pi}{4}+o(1)$. Ainsi, la série de terme général $u_n(i)$, $n\in\mathbb{N}$, converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(i)=\frac{1}{2}\ln 2+i\frac{\pi}{4}.$$

3) a) $\chi_A=X^2-(\mathrm{Tr}(A))X+\det(A)=X^2+1=(X-i)(X+i)$. χ_A est à racines simples dans $\mathbb{C}$ et donc A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Par suite, il existe $P\in GL_2(\mathbb{C})$ et $D=\mathrm{diag}(i,-i)$ telles que $A=PDP^{-1}$.

b) Soit $N\in\mathbb{N}$.

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{n+1}D^{n+1}=\mathrm{diag}\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n i^{n+1}}{n+1},\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n(-i)^{n+1}}{n+1}\right)=\mathrm{diag}\left(\sum_{n=0}^{N}u_n(i),\overline{\sum_{n=0}^{N}u_n(i)}\right).$$

D'après la question précédente, la série de matrice de termes général $\dfrac{(-1)^n}{n+1}D^{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$, converge et, par continuité de l'application $\begin{array}{ccc}\mathbb{C}&\to&\mathbb{C}\\ z&\mapsto&\overline{z}\end{array}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}D^{n+1}=\mathrm{diag}\left(\frac{1}{2}\ln 2+i\frac{\pi}{4},\frac{1}{2}\ln 2-i\frac{\pi}{4}\right).$$

c) Déterminons une matrice P. $A\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}=i\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}$ et en conjuguant, $A\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}=-i\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$. On peut donc prendre $P=\begin{pmatrix}1&1\\-i&i\end{pmatrix}$. On a alors $P^{-1}=\dfrac{1}{2i}\begin{pmatrix}i&-1\\i&1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&i\\1&-i\end{pmatrix}$ puis $A=PDP^{-1}$ où $D=\mathrm{diag}(i,-i)$.

L'application $\varphi\ \begin{array}{ccc}\mathscr{M}_n(\mathbb{R})&\to&\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\\ M&\mapsto&PMP^{-1}\end{array}$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ car linéaire sur un espace de dimension finie. Puisque la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n+1}D^{n+1}$ converge, la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n+1}A^{n+1}=\varphi\left(\dfrac{(-1)^n}{n+1}D^{n+1}\right)$ converge et

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}A^{n+1}&=\sum_{n=0}^{+\infty}\varphi\left(\frac{(-1)^n}{n+1}D^{n+1}\right)\\&=\varphi\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}D^{n+1}\right)\text{ (par continuité de }\varphi)\\&=P\,\mathrm{diag}\left(\frac{1}{2}\ln 2+i\frac{\pi}{4},\frac{1}{2}\ln 2-i\frac{\pi}{4}\right)P^{-1}\\&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-i&i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\ln 2+i\frac{\pi}{4}&0\\0&\frac{1}{2}\ln 2-i\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&i\\1&-i\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\ln 2+i\frac{\pi}{4}&\frac{1}{2}\ln 2-i\frac{\pi}{4}\\\frac{\pi}{4}-i\frac{1}{2}\ln 2&\frac{\pi}{4}+i\frac{1}{2}\ln 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&i\\1&-i\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\ln 2&-\frac{\pi}{4}\\\frac{\pi}{4}&\frac{1}{2}\ln 2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Partie III. Quelques questions topologiques

1) a) Soit $(k,\ell)\in[\![1,p]\!]^2$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$T_n[\ell,\ell]-T_n[k,k]=\left(T[\ell,\ell]+\frac{\ell}{n}\right)-\left(T[k,k]+\frac{k}{n}\right)=T[\ell,\ell]-T[k,k]+\frac{\ell-k}{n}.$$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n[\ell,\ell]-T_n[k,k]=T[\ell,\ell]-T[k,k]$.

b) Soit $(k,\ell)\in[\![1,p]\!]^2$ tel que $k<\ell$.

- Si $T[k,k]=T[\ell,\ell]$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $T_n[\ell,\ell]-T_n[k,k]=T[\ell,\ell]-T[k,k]+\dfrac{\ell-k}{n}=\dfrac{\ell-k}{n}\neq 0$.
- Si $T[k,k]\neq T[\ell,\ell]$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n[\ell,\ell]-T_n[k,k]=T[\ell,\ell]-T[k,k]\neq 0$ et donc, il existe un rang $N_{k,\ell}$ tel que pour $n\geqslant N_{k,\ell}$, $T_n[\ell,\ell]-T_n[k,k]\neq 0$.

Soit N un entier supérieur ou égal à tous les éventuels $N_{k,\ell}$ (qui sont en nombre fini au plus égal à $\left(p^2-p\right)/2$) ou $N=0$ si tous les coefficients de T sont égaux. Par construction, pour $n\geqslant N$, les coefficients diagonaux de T_n sont deux à deux distincts.

2) a) Soit $A\in\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$. χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$ d'après le théorème de d'Alembert-Gauss et donc A est trigonalisable.

b) Soit $A\in\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$. Il existe une matrice triangulaire T et une matrice inversible P telles que $A=PTP^{-1}$. Soit alors $N\in\mathbb{N}$ défini comme à la question précédente. La suite $(T_n)_{n\geqslant N}=\left(T+\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\frac{\ell}{n}E_{\ell,\ell}\right)_{n\geqslant N}$ est une suite de matrices triangulaires, convergeant vers la matrice T. De plus, d'après la question précédente,pour $n\geqslant N$, les coefficients diagonaux de la matrice triangulaire T_n sont deux à deux distincts ou encore T_n est à valeurs propres simples. On en déduit que pour $n\geqslant N$, T_n est diagonalisable.

Pour $n\geqslant N$, posons $A_n=PT_nP^{-1}$. Pour $n\geqslant N$, A_n est semblable à une matrice diagonalisable et donc A_n est diagonalisable. De plus, par continuité de l'application $M\mapsto PMP^{-1}$, la suite $(A_n)_{n\geqslant N}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty}A_n=\lim_{n\to+\infty}PT_nP^{-1}=P\left(\lim_{n\to+\infty}T_n\right)P^{-1}=PTP^{-1}=A.$$

Ainsi, tout élément de $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ est limite d'une suite de matrices diagonalisables. Ceci montre que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$.

3) Pour $M=\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$, posons $\chi_M=X^p+\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}a_k(M)X^k$.

Soit $k\in[\![0,p-1]\!]$. L'application $\varphi_k\ :\ M\mapsto a_k(M)$ est un polynôme en les coordonnées de M dans la base canonique de $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ et est donc continue sur l'espace vectoriel normé $(\mathscr{M}_p(\mathbb{C}),\|\ \|_s)$.

Soit $M\in\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$. Pour tout $k\in[\![0,p-1]\!]$, par continuité de φ_k en M, il existe $\alpha>0$ tel que

$$\forall N\in\mathscr{M}_p(\mathbb{C}),\ \left(\|N-M\|_s\leqslant\alpha_k\Rightarrow|a_k(N)-a_k(M)|\leqslant\frac{1}{p}\right).$$

Soit $\alpha=\mathrm{Min}\{\alpha_k,\ 0\leqslant k\leqslant p-1\}>0$. Pour $N\in\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ telle que $\|N-M\|\leqslant\alpha$,

$$\|\chi_N-\chi_M\|_1=\sum_{k=0}^{p-1}|a_k(N)-a_k(M)|+|1-1|\leqslant\sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{p}=1.$$

4) a) (1) Soit $M\in\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ puis $\mu\in\mathrm{Sp}(M)$.

$$\chi_M(\mu)=0\Rightarrow\mu^p=-\sum_{k=0}^{p-1}a_k(M)\mu^k\Rightarrow|\mu|^p\leqslant\sum_{k=0}^{p-1}|a_k(M)|\,|\mu|^k.$$

Si $|\mu|\leqslant 1$, alors pour tout $k\in[\![0,p-1]\!]$, $|\mu|^k\leqslant 1$ puis $|\mu|^p\leqslant\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}|a_k(M)|=\mathrm{Max}\left\{1,|\mu|^{p-1}\right\}\left(\sum_{k=0}^{p-1}|a_k(M)|\right)$.

Si $|\mu|>1$, la suite $\left(|\mu|^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante et donc $|\mu|^p\leqslant|\mu|^{p-1}\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}|a_k(M)|=\mathrm{Max}\left\{1,|\mu|^{p-1}\right\}\left(\sum_{k=0}^{p-1}|a_k(M)|\right)$.

On a montré que pour tout $\mu\in\mathrm{Sp}(M)$, $|\mu|^p\leqslant\mathrm{Max}\left\{1,|\mu|^{p-1}\right\}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}|a_k(M)|\right)$.

(2) Si $|\mu| \leqslant 1$,

$$\mathrm{Max}\{1, |\mu|^p\} = 1 \leqslant 1 + \sum_{k=0}^{p-1} |a_k(M)| = \mathrm{Max}\{1, |\mu|^p\} \left(\sum_{k=0}^{p} |a_k(M)|\right).$$

Si $|\mu| > 1$,

$$\mathrm{Max}\{1, |\mu|^p\} = |\mu|^p \leqslant \mathrm{Max}\left\{1, |\mu|^{p-1}\right\} \left(\sum_{k=0}^{p-1} |a_k(M)|\right) \leqslant \mathrm{Max}\{1, |\mu|^p\} \left(\sum_{k=0}^{p} |a_k(M)|\right).$$

(3) Si $|\mu| \leqslant 1$, alors $|\mu| \leqslant 1 + \sum_{k=0}^{p-1} |a_k(M)| = \|\chi_M\|_1$.

Si $|\mu| > 1$, (2) fournit $|\mu|^p \leqslant |\mu|^{p-1} \sum_{k=0}^{p} |a_k(M)| = |\mu|^{p-1} \|\chi_M\|_1$. Après simplification par le réel strictement positif $|\mu|$, on obtient encore une fois $|\mu| \leqslant \|\chi_M\|_1$.

On a montré que $\forall \mu \in \mathrm{Sp}(M)$, $|\mu| \leqslant \|\chi_M\|_1$.

b) Soit $N \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ telle que $\|\chi_N - \chi_M\|_1 \leqslant 1$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(N)$.

$\|\chi_M\|_1 = 1 + \sum_{k=0}^{p-1} |a_k(M)| \geqslant 1$ et donc

$$|\lambda| \leqslant \|\chi_N\|_1 \leqslant \|\chi_N - \chi_M\|_1 + \|\chi_M\|_1 \leqslant 1 + \|\chi_M\|_1 \leqslant 2\|\chi_M\|_1.$$

5) a) La suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers M. Donc, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $\|M_p - M\|_s \leqslant \alpha$ (α ayant été défini à la question 3).
Pour $n \geqslant n_0$, on a donc $\left\|\chi_{M_p} - \chi_N\right\|_1 \leqslant 1$. D'après la question précédente, pour tout $n \geqslant n_0$ et tout $k \in [\![1, p]\!]$, $|\lambda_{k,n}| \leqslant 2\|\chi_M\|_1$.
Ainsi, la suite $(\lambda_{1,n}, \ldots, \lambda_{p,n})_{n \geqslant n_0}$ est bornée (en munissant par exemple $\mathbb{R}^p$ de la norme infinie) puis la suite $(\lambda_{1,n}, \ldots, \lambda_{p,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Puisque $\mathbb{R}^p$ est de dimension finie sur $\mathbb{R}$, le théorème de Bolzano-Weierstrass permet d'affirmer que l'on peut extraire de la suite $(\lambda_{1,n}, \ldots, \lambda_{p,n})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $\left(\lambda_{1,\varphi(n)}, \ldots, \lambda_{p,\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente.

b) Pour $k \in [\![1, p]\!]$, posons $\lambda_k = \lim_{n\to+\infty} \lambda_{k,\varphi(n)}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on sait que les coefficients $a_i(M_n)$ de χ_{M_n} sont des polynômes en les $\lambda_{k,n}$ (relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé) :

$$a_i(M_n) = (-1)^{p-i}\sigma_i(\lambda_{1,n}, \ldots, \lambda_{p,n}).$$

Quand n tend vers $+\infty$, on a donc pour chaque $i \in [\![0, p-1]\!]$,

$$\lim_{n\to+\infty} a_i\left(M_{\varphi(n)}\right) = \lim_{n\to+\infty} (-1)^{p-i}\sigma_i\left(\lambda_{1,\varphi(n)}, \ldots, \lambda_{p,\varphi(n)}\right) = (-1)^{p-i}\sigma_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$$

et donc, puisque $\chi_{M_{\varphi(n)}}$ converge vers χ_M,

$$\chi_M = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k).$$

Ainsi, χ_M est scindé sur $\mathbb{R}$.

6) a) Notons $S_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices éléments de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$.
Soit $M \in \overline{\mathscr{D}_p(\mathbb{R})}$. Il existe une suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{D}_p(\mathbb{R})$ convergeant vers M. Chaque M_n, $n \in \mathbb{N}$, a un polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{R}$ et donc, d'après la question précédente, M a un polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{R}$. Ceci montre que $\overline{\mathscr{D}_p(\mathbb{R})} \subset S_p(\mathbb{R})$.

Inversement, soit $M \in S_p(\mathbb{R})$. M est donc trigonalisable dans $\mathbb{R}$ puis il existe $P \in GL_p(\mathbb{R})$ et T triangulaire réelle telles que $M = PTP^{-1}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit T_n la matrice définie à la question 1 de cette partie puis $M_n = PT_nP^{-1}$. Pour $n \geqslant N$, T_n est triangulaire, réelle, à coefficients diagonaux deux à deux distincts et donc à valeurs propres simples. Par suite, pour $n \geqslant N$, T_n et donc aussi M_n sont diagonalisables dans $\mathbb{R}$. Enfin, la suite $(T_n)_{n\geqslant N}$ converge vers T et donc, par continuité de l'application $A \mapsto PAP^{-1}$, la suite $(M_n)_{n\geqslant N}$ converge vers M.
Ainsi, tout élément de $S_p(\mathbb{R})$ est limite d'une suite d'éléments de $\mathscr{D}_p(\mathbb{R})$ et donc $S_p(\mathbb{R}) \subset \overline{\mathscr{D}_p(\mathbb{R})}$.

Finalement, $\overline{\mathscr{D}_p(\mathbb{R})} = S_p(\mathbb{R})$.

b) Soit $M \in \mathscr{D}_p(\mathbb{R})$ dont le polynôme caractéristique n'est pas à racines simples. M admet donc une valeur propre λ d'ordre $k \geqslant 2$. Puisque M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, on peut poser $M = PDP^{-1}$ où $P \in GL_p(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda, \ldots, \lambda, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_p)$ avec $\lambda_i \neq \lambda$ pour $i \geqslant k+1$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $T_n = D + \dfrac{1}{n}E_{1,1}$ puis $M_n = PT_nP^{-1}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, T_n a le même spectre que D et en particulier, T_n admet λ pour valeur propre d'ordre k mais, $\text{rg}(T_n - \lambda I_p) = p - k + 1 > p - k$ puis $\dim(\text{Ker}(T_n - \lambda I_p)) = k - 1 < k$. Ceci montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n n'est pas diagonalisable puis M_n n'est pas diagonalisable. Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} M_n = M$, on vient de fournir une suite de matrices à coefficients réels, toutes non diagonalisables et convergeant vers M.

c) Donc, un élément de $\mathscr{D}_p(\mathbb{R})$, qui a une valeur propre d'ordre au moins 2, n'est pas dans l'intérieur de $\mathscr{D}_p(\mathbb{R})$ puisque tout voisinage d'une telle matrice contient au moins une matrice qui n'est pas élément de $\mathscr{D}_p(\mathbb{R})$. L'intérieur de $\mathscr{D}_p(\mathbb{R})$ est donc contenu dans l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples.

Partie IV. Logarithme de matrices

1) a) Soit $M \in \mathscr{B}$. Donc, M est une matrice trigonalisable dans $\mathbb{R}$ telle que $\|M - I_p\|_s < 1$.

Le rayon R associé à la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{(-1)^n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est $R = 1$. D'après la question 3.a) de la partie I, la série de matrices de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n+1}(M - I_p)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, converge.

b) χ_M est scindé sur $\mathbb{R}$ ou encore $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \mathbb{R}$. D'après la question 2. de la partie I, $\rho(M - I_p) \leqslant \|M - I_p\|_s < 1$. On sait que si $\text{Sp}(M) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$, alors $\text{Sp}(M - I_p) = (\lambda_1 - 1, \ldots, \lambda_p - 1)$.
Donc, pour toute valeur propre λ de M, $|\lambda - 1| \leqslant \rho(M - I_p) < 1$ et donc $\lambda \in]0, 2[$.

On a montré que $\text{Sp}(M) \subset]0, 2[$.

2) • Soit $D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ une matrice diagonale réelle telle que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $0 < \lambda_i < 2$. D est dans $\mathscr{B}$ et

$$\begin{aligned}\ln(D) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\text{diag}(\lambda_i - 1)_{1\leqslant i\leqslant p}\right)^{n+1} = \text{diag}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(\lambda_i - 1)^{n+1}\right)_{1\leqslant i\leqslant p} \\ &= \text{diag}(\ln(1 + (\lambda_i - 1)))_{1\leqslant i\leqslant p} = \text{diag}(\ln(\lambda_i))_{1\leqslant i\leqslant p},\end{aligned}$$

puis

$$\text{Tr}(\ln(D)) = \sum_{i=1}^{p} \ln(\lambda_i) = \ln\left(\prod_{i=1}^{p} \lambda_i\right) = \ln(\det(D)).$$

• Soit maintenant M un élément de $\mathscr{B}$ qui est diagonalisable. Il existe $P \in GL_p(\mathbb{R})$ et D matrice diagonale réelle à coefficients dans $]0, 2[$ telles que $M = PDP^{-1}$. Par continuité de l'application $A \mapsto PAP^{-1}$, on a

$$\ln(M) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\left(PDP^{-1} - PP^{-1}\right)^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}P(D - I_p)^{n+1}P^{-1} = P\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(D - I_p)^{n+1}\right)P^{-1} = P\ln(D)P^{-1}$$

et donc

$$\text{Tr}(\ln(M)) = \text{Tr}\left(P\ln(D)P^{-1}\right) = \text{Tr}(\ln(D)) = \ln(\det(D)) = \ln(\det(M)).$$

• Soit M un élément quelconque de $\mathscr{B}$. Soit $d = \|M - I_p\|_s < 1$. Soit $N \in \mathscr{T}_p(\mathbb{R})$ telle que $\|N - M\|_s \leqslant \dfrac{1-d}{2}$. Alors,

$$\|N - I_p\|_s \leqslant \|M - I_p\|_s + \|N - M\|_s \leqslant d + \frac{1-d}{2} = \frac{1+d}{2} < 1.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\|\ln(M) - \ln(N)\|_s &\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\left\|(M - I_p)^{n+1} - (N - I_p)^{n+1}\right\|_s = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\left\|(M - N)\left(\sum_{k=0}^{n}(M - I_p)^k(N - I_p)^{n-k}\right)\right\|_s \\ &\leqslant \|M - N\|_s \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n}\|M - I_p\|_s^k\|N - I_p\|_s^{n-k}\right) \leqslant \|M - N\|_s \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} d^k\left(\frac{1+d}{2}\right)^{n-k}\right) \\ &= \|M - N\|_s \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\frac{\left(\dfrac{1+d}{2}\right)^{n+1} - d^{n+1}}{\dfrac{1+d}{2} - d} \leqslant \frac{2\|M - N\|_s}{1-d}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1+d}{2}\right)^{n+1} = \frac{2(1+d)}{(1-d)^2} \times \|M - N\|_s.\end{aligned}$$

• Montrons enfin que $\mathrm{Tr}(\ln(M)) = \ln(\det(M))$. D'après la question 6.a) de la partie III, il existe une suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{D}_p(\mathbb{R})$ (et en particulier de $\mathscr{T}_p(\mathbb{R})$), convergente de limite M.
Puisque $\|M - I_p\|_s < 1$, il existe un rang n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$, $\|M_n - I_p\|_s < 1$. Pour $n \geqslant n_0$, M_n est dans $\mathscr{B}$ de sorte que $\ln(M_n)$ existe puis, pour n suffisamment grand, $\|\ln(M) - \ln(M_n)\|_s \leqslant \dfrac{2(1+d)}{(1-d)^2} \times \|M - M_n\|_s$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(M_n) = \ln(M).$$

Par continuité de la trace sur $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ et du déterminant sur $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\ln(M)) &= \mathrm{Tr}\left(\lim_{n\to+\infty} \ln(M_n)\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{Tr}(\ln(M_n)) = \lim_{n\to+\infty} \ln(\det(M_n)) = \ln\left(\det\left(\lim_{n\to+\infty} M_n\right)\right)\\ &= \ln(\det(M)).\end{aligned}$$

3) a) Montrons par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, si M et N sont deux éléments de $\mathscr{T}_p(\mathbb{R})$, M et N sont simultanément trigonalisables.

- Le résultat est immédiat quand $p = 1$.

- Soit $p \geqslant 1$. Supposons le résultat pour p. Soient M et N deux éléments de $\mathscr{T}_{p+1}(\mathbb{R})$ tels que $MN = NM$. Notons f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^{p+1}$ canoniquement associés à M et N respectivement.
Puisque $M \in \mathscr{T}_p(\mathbb{R})$, $\chi_f = \chi_M$ est scindé sur $\mathbb{R}$. Soit λ une valeur propre de f. Puisque f et g commutent, g laisse stable $E_\lambda(f) \neq \{0\}$ et donc la restriction de g à $E_\lambda(f)$ induit un endomorphisme $\widetilde{g}$ de ce sous-espace. On sait que $\chi_{\widetilde{g}}$ divise χ_g et en particulier, $\chi_{\widetilde{g}}$ est scindé sur $\mathbb{R}$. $\widetilde{g}$ admet donc au moins une valeur propre et donc au moins un vecteur propre e_1. Par construction, e_1 est un vecteur propre commun à f et à g. On complète la famille libre (e_1) en une base $(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1})$ de $\mathbb{R}^{p+1}$. On note P_1 la matrice de la base $(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1})$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^{p+1}$.
Par construction, $P_1^{-1}MP_1$ et $P_1^{-1}NP_1$ sont respectivement de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & \times \\ 0_{p,1} & M_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \mu & \times \\ 0_{p,1} & N_1 \end{pmatrix}$ où M_1 et N_1 sont des éléments de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$.
Puisque $\chi_M = \chi_{P_1MP_1^{-1}} = (X - \lambda)\chi_{M_1}$, χ_{M_1} est scindé sur $\mathbb{R}$ ou encore $M_1 \in \mathscr{T}_p(\mathbb{R})$. De même, $N_1 \in \mathscr{T}_p(\mathbb{R})$. Enfin, puisque $MN = NM$, un calcul par blocs fournit $M_1N_1 = N_1M_1$. Par hypothèse de récurrence, il existe $P' \in GL_p(\mathbb{R})$ telle que $P'^{-1}M_1P_1$ et $P'^{-1}N_1P_1$ soient des matrices triangulaires T_M et T_N. Soit $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,p} \\ 0_{p,1} & P' \end{pmatrix}$.
$\det(P_2) = \det(P') \neq 0$ et donc $P_2 \in GL_{p+1}(\mathbb{R})$. De plus, $P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,p} \\ 0_{p,1} & P'^{-1} \end{pmatrix}$. Un calcul par blocs fournit montre alors que les matrices $P_2^{-1}P_1^{-1}MP_1P_2$ et $P_2^{-1}P_1^{-1}NP_1P_2$ sont triangulaires. La matrice $P = P_1P_2$ est une matrice réelle inversible telle que $P^{-1}MP$ et $P^{-1}NP$ soient triangulaires.

Le résultat est démontré par récurrence.

b) D'après la question précédente, il existe P une matrice réelle inversible et T et T' deux matrices triangulaires réelles telles que $M = PTP^{-1}$ et $N = PT'P^{-1}$ ce qui ramène le problème au cas où $M = T$ et $N = T'$ sont deux matrices triangulaires réelles qui commutent.

Je n'ai pas réussi pour l'instant à construire simplement des suites de matrices diagonalisables (T_n) et (T'_n), convergeant vers T et T' respectivement, et vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_nT'_n = T'_nT_n$.

4) Soient $D = \mathrm{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ et $D' = \mathrm{diag}(\lambda'_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ deux matrices diagonales éléments de $\mathscr{B}$ telles que $DD' \in \mathscr{B}$.

$$\begin{aligned}\ln(D) + \ln(D') &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(D - I_p)^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(D' - I_p)^{n+1}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\mathrm{diag}\left((\lambda_i - 1)^{n+1}\right)_{1\leqslant i\leqslant p} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\mathrm{diag}\left((\lambda'_i - 1)^{n+1}\right)_{1\leqslant i\leqslant p}\\ &= \mathrm{diag}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(\lambda_i - 1)^{n+1}\right)_{1\leqslant i\leqslant p} + \mathrm{diag}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)n}{n+1}(\lambda'_i - 1)^{n+1}\right)_{1\leqslant i\leqslant p}\\ &= \mathrm{diag}(\ln(\lambda_i))_{1\leqslant i\leqslant p} + \mathrm{diag}(\ln(\lambda'_i))_{1\leqslant i\leqslant p} = \mathrm{diag}(\ln(\lambda_i\lambda'_i))_{1\leqslant i\leqslant p} = \ln(DD').\end{aligned}$$

Le résultat est donc établi quand M et N sont deux matrices diagonales. Plus généralement, si M et N sont diagonalisables qui commutent et donc simultanément diagonalisables, il existe une matrice P inversible et deux matrices diagonales éléments de $\mathscr{B}$ telles que $M = PDP^{-1}$ et $N = PD'P^{-1}$. Puisque $MN = PDD'P^{-1}$ est dans $\mathscr{B}$, les valeurs propres de DD' sont dans $]0, 2[$ et donc $DD' \in \mathscr{B}$. D'après ce qui précède, toujours par continuité de l'application $A \mapsto PAP^{-1}$,

$$\begin{aligned}\ln(MN) &= \ln\left(PDD'P^{-1}\right) = P\ln(DD')P^{-1} = P(\ln(D)+\ln(D'))P^{-1} = P\ln(D)P^{-1} + P\ln(D')P^{-1}\\ &= \ln\left(PDP^{-1}\right) + \ln\left(PD'P^{-1}\right) = \ln(M)+\ln(N).\end{aligned}$$

Enfin, si M et N sont deux éléments de $\mathscr{B}$ telles que $MN = NM \in \mathscr{B}$, il existe d'après la question précédente deux suites de matrices $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{D}_p(\mathbb{R})$ convergeant vers M et N respectivement et telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_nN_n = N_nM_n$. Pour n suffisamment grand, M_n, N_n et M_nN_n sont dans $\mathscr{B}$ puis

$$\ln(M_nN_n) = \ln(M_n) + \ln(N_n).$$

Comme de nombreuses fois dans ce problème, quand n tend vers $+\infty$, on obtient

$$\ln(MN) = \ln(M) + \ln(N).$$

